

Compitino di MDAL

10 aprile 2017

Cognome e nome:

Numero di matricola: Corso e Aula:

IMPORTANTE: Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non si può scrivere con il lapis.

Parte I, con esercizi a risposta secca.

Nelle risposte del tipo SI/NO, le risposte errate contano -1

1. (Punti 2) Si consideri la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 3 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + 20a_n \end{cases}$$

Trovare una formula esplicita per a_n . Scrivere qui: $a_n =$

2. (Punti 2) Con riferimento alla successione precedente, determinare il resto di $(a_{1000})^2$ modulo 5. Scrivere qui:

3. (Punti 2) Per quali valori del parametro $a \in \mathbb{Z}$ il sistema di congruenze

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod{12} \\ x \equiv 2a \pmod{18} \end{cases}$$

è risolubile? Scrivere qui:

4. (Punti 2) Si consideri l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la cui matrice, rispetto alla base standard di \mathbb{R}^2 è

$$[L] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Si considerino le seguenti due basi di \mathbb{R}^2 : la base β data dai vettori (che scriveremo in riga, per motivi di spazio) $(1, 1), (0, 1)$ e la base γ data dai

vettori $(1, 2), (0, 1)$. Si scriva qui la matrice associata ad L rispetto alla base β in partenza e alla base γ in arrivo. Scrivere qui:

5. (Punti 2) Si consideri lo spazio vettoriale $Mat_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ delle matrici 4×4 . Sia W il sottospazio dato dalle matrici $(a_{ij})_{i,j=1,\dots,4}$ che verificano le due condizioni $a_{12} + a_{23} + a_{34} = 0$ e $a_{13} + a_{24} + a_{34} = 0$, dove $a_{ij} \in \mathbb{R}$ è la componente nella riga i e colonna j . Scrivere qui la dimensione di W :
6. (Punti 2) Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{R} e siano v_1, v_2, v_3 tre vettori di V .
- i) Supponiamo che $3v_1 + v_2 = 5v_3$. Possiamo concludere che $v_1 \in Span(v_2, v_3)$? (Scrivere qui SI oppure NO).....
- ii) Supponiamo che v_1, v_2, v_3 siano linearmente dipendenti. Possiamo concludere che $v_1 \in Span(v_2, v_3)$? (Scrivere qui SI oppure NO).....

Cognome e nome:

Numero di matricola: Corso e Aula:

Esercizi con risposta da motivare dettagliatamente

Esercizio 1 (Punti 10). Si consideri il sistema di congruenze:

$$\begin{cases} 3x \equiv 1 \pmod{14} \\ x \equiv 1 \pmod{8} \\ 3x \equiv 9 \pmod{5} \end{cases}$$

1. Trovare una soluzione del sistema.
2. Trovare tutte le soluzioni del sistema.

Esercizio 2 (Punti 10). Sia $L : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare che, rispetto alle basi standard, ha matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 10 & 3 \\ 2 & 1 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Trovare una base di $\ker(L)$ e una base di $\text{Im}(L)$.
2. Per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ il vettore $(1, 1, a)$ (per motivi di spazio lo abbiamo scritto in riga) appartiene a $\text{Im}(L)$?