25/09/2017

BERARDUCCI
TEORIA

OSS Il simbolo "$\in$" in realtà non è un simbolo logico, solo uno che appartiene al linguaggio della teoria degli insiemi.
I simboli logici sono

- connettivi booleani $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow$
- quantificatori $\forall, \exists$

Il simbolo "=" dipende dalle interpretazioni: può essere considerato sia logico che non

LOGICA PROPOSIZIONALE

Verranno utilizzate delle variabili proposizionali (A, B, C, ...) che rappresentano proposizione generiche
Una proposizione è un affermazione che può essere vera (1) o falsa (0)
Queste possono essere combinate con formule proposizionali

Esempio $(A \vee B) \wedge \neg B \rightarrow A$

Una formula è solo uno schema generale, dove se ad A e B si sostituiscono delle vere proposizioni si ottiene una proposizione

Def Una tautologia è una formula che risulta vera indipendentemente dai valori di verità delle variabili

OSS L'esempio è una tautologia

OSS

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$ (vel)	$A \oplus B$ (aut)	$A \rightarrow B$
0	0	0	0	0	1
0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	0	1

In logica si scelgono quelli come simboli perché da essi si possono ottenere con facilità tutti gli altri

Esempio $A \oplus B \equiv$ ~~[illegible]~~ $(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$

OSS La necessità di questa tavola di verità per l'implicazione c'è anche ~~per~~ nelle dimostrazioni in cui si utilizzano implicazione che sono vere a vuoto.

Def Due formule si dicono equivalenti se hanno la stessa tavola di verità

Esempio $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$

Esercizio Usando i simboli $\oplus$ e $\neg$ è possibile ottenere $\leftrightarrow$ ma non $\vee$

$$A \leftrightarrow B \equiv \neg(A \oplus B)$$

In generale, si può dimostrare che dalle combinazioni di $\oplus$ e $\neg$ si ottengono tavole con un numero pari di 0 e 1

Esercizio Mi invento un connettivo ternario tale che

A	B	C	ite(A,B,C)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Riesco a ricondurmi a una combinazione di A, B, C, $\wedge$, $\vee$, $\neg$?

Sì $(A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow C) \equiv (\neg A \vee B) \wedge (A \vee C)$ o altrimenti
Affermare che è vero "ite" significa che siamo nel 2, 4, 7, 8 caso, cioè

$$(\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C)$$

OSS Una DNF (disjunction normal form) è una disgiunzione di congiunzioni di letterali
$(\bigvee_i \bigwedge_j \text{letterali}_{ij})$
Ogni formula può essere scritta in DNF
Esiste anche la CNF (conjunction normal form), che è una congiunzione di disgiunzioni di letterali $(\bigwedge_i \bigvee_j \text{letterali}_{ij})$
Ogni formula può essere espressa in CNF

Esempio $(A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow C) \equiv (\neg A \vee B) \wedge (A \vee C)$ è CNF
Invece la sua DNF è $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge C)$.

OSS Volendo si può vedere $CNF = \neg DNF(\neg \varphi)$, dove φ è una formula

Def Una formula φ è soddisfacibile se esiste almeno un'interpretazione vera

OSS φ è tautologia $\leftrightarrow$ $\neg\varphi$ non è soddisfacibile.

Def Una formula φ è contraddittoria se non esistono interpretazioni vere

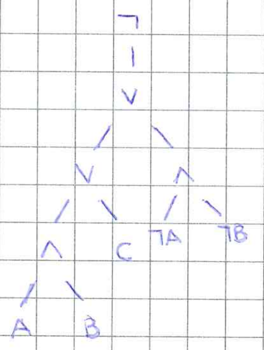
OSS φ è contraddittoria $\leftrightarrow$ φ non è soddisfacibile $\leftrightarrow$ $\neg\varphi$ è una tautologia

OSS In realtà esiste anche la NNF (negation normal form) in cui tutte le negazioni sono applicate a variabili e non a altre formule

METODO DEI TABLEAUX

A partire da una formula φ si costruisce un albero che si dirama in formule più semplici, e in cui vale che φ è soddisfacibile se un nodo dei figli è soddisfacibile.
Nei nodi degli alberi ci sono insiemi di formule e non formule singole.

OSS $\varphi = \neg\{\neg((A \wedge \neg B) \vee C) \vee (\neg A \wedge \neg B)\}$


$= \varphi$

Si noti come le formule possano avere anche una profondità elevata.

OSS Vedremo come in generale si costruisce un tableaux

$$\neg(\neg\varphi) \;\to\; \varphi \qquad\qquad \neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \;\to\; \neg\varphi_1 \;\mid\; \neg\varphi_2 \qquad\qquad \neg(\varphi_1 \vee \varphi_2) \;\to\; \neg\varphi_1, \neg\varphi_2$$

Esempio Si consideri la φ presentata nell'osservazione.

φ

$\neg(\neg((A \wedge \neg B) \vee C)), \neg(\neg A \wedge \neg B)$

$(A \wedge \neg B) \vee C, \neg(\neg A \wedge \neg B)$

$(A \wedge \neg B) \vee C, A \qquad\qquad B, (A \wedge \neg B) \vee C$

$(A \wedge \neg B), A \qquad C, A \qquad\qquad B, (A \wedge \neg B) \qquad B, C$

$\uparrow$ chiuso

Visto che c'è almeno un nodo finale soddisfacibile, allora φ è soddisfacibile.
In particolare, inoltre, φ è la disgiunzione delle foglie, dunque:

$$\varphi: (A \wedge \neg B) \vee (C \wedge A) \vee (B \wedge C) \qquad \text{DNF}$$

Notazione $\models \varphi$ significa φ è una tautologia

OSS φ è tautologia $\Leftrightarrow$ $\neg\varphi$ non è soddisfacibile $\Leftrightarrow$ $\neg\varphi$ ha un tableaux con tutte le foglie chiuse

/09/2017

BERARDUCCI
TEORIA

Oltre ai tableaux, esiste anche un altro algoritmo per la logica proposizionale: il DPLL, per cui:

Se ho una formula $\varphi(A, B, \dots)$, con i connettivi $\wedge, \vee, \neg, \perp, \top = \neg\perp \dots$
Se φ è vero allora ci sono due casi

- $A = 0$, allora equivale a $\varphi(\perp, B, \dots) \wedge \neg A$
- $A = 1$, allora equivale a $\varphi(\top, B, \dots) \wedge A$

Il vantaggio è che queste seconde formule possono essere semplificate (infatti $\perp \wedge A = \perp$, $\perp \vee A = A$, $\top \wedge A = A$, $\top \vee A = \top$)

QUANTIFICATORI

Def L'analogo delle tautologie quando ci sono i quantificatori sono le verità logiche o logicamente valide

Esempio $\exists y \forall x P(x, y) \rightarrow \forall x \exists y P(x, y)$ è una verità logica.

Esempio
- $\neg \exists x P(x) \longrightarrow \forall x \neg P(x)$ è logicamente valida.
- $\neg \forall x P(x) \longrightarrow \exists x \neg P(x)$ è valida (non per gli intuizionisti)

Come funzionano i tableaux con i quantificatori?

Notazione Con Σ si indica un insieme di formule.

- $\dfrac{\Sigma, \varphi \wedge \psi}{\Sigma, \varphi, \psi}$
- $\dfrac{\Sigma, \varphi \vee \psi}{\Sigma, \varphi \qquad \Sigma, \psi}$
- $\dfrac{\Sigma, \neg\neg\varphi}{\Sigma, \varphi}$
- $\dfrac{\Sigma, \neg(\varphi \wedge \psi)}{\Sigma, \neg\varphi \qquad \Sigma, \neg\psi}$
- $\dfrac{\Sigma, \neg(\varphi \vee \psi)}{\Sigma, \neg\varphi, \neg\psi}$

Notazione • Con $P(x, y, \dots)$ si indicano dei predicati, detti simboli di predicato

Def Dato un predicato $P(x, y, \dots)$ i termini $x, y, \dots$ sono detti simboli di costante.

Per il momento supponiamo ~~di~~ di avere nel nostro linguaggio infiniti di questi simboli

- $\dfrac{\Sigma, \forall x\, \varphi(x)}{\Sigma, \varphi(c), \forall x\, \varphi(x)}$
- $\dfrac{\Sigma, \exists x\, \varphi(x)}{\Sigma, \varphi(c)}$

, dove c non compare sopra.

Def (non precisa) ~~Nel~~ Nel caso dei quantificatori, un modello significa decidere il dominio in cui variano le variabili e che significato hanno i predicati.

Def Si chiama struttura per un linguaggio $\mathcal{L} = \{P(x), Q(x,y), \dots, a, b, c, \dots\}$ è un dominio non vuoto M in cui variano i simboli del linguaggio

OSS Niente vieta che all'interno del dominio due simboli del linguaggio indichino la stessa cosa o addirittura che ci siano simboli che non stanno nel linguaggio iniziale.
Inoltre si noti che ad esempio $P^M \subseteq M$, $Q^M \subseteq M^2$.

Esempio $\mathcal{L} = \{P(x,y,z), A(x,y,z), a, b\}, O(x,y), U(x,y)$

Considero il dominio $M = \mathbb{N}$, $P(x,y,z)^M \equiv x \cdot y = z$, $A(x,y,z) \equiv x+y=z$, $O(x,y) \equiv x \leq y$
$a^M = 0$, $b^M = 1$, $U(x,y)^M \equiv O(x,y) \wedge O(y,x)$

Esercizio Si scriva l'affermazione $\varphi(x) \equiv$ "x è primo"

$$\varphi(x) \equiv \forall u v \, (u \cdot v = x \longrightarrow u = 1 \vee v = 1) \equiv \forall u \forall v \, [P(u,v,x) \rightarrow U(u,b) \vee U(v,b)]$$

Si scriva ora la congettura di Goldbach

$$\forall x \, (x \text{ pari} \wedge x > 2 \longrightarrow \exists p, q \text{ primi } x = p + q)$$

$\vdots$

OSS La regola dei tableaux che riguarda l'$\exists$ costituisce un'eccezione perché tutte le altre erano caratterizzate dal fatto che il genitore ha un modello se e solo se il figlio ha lo stesso modello.
Nell'ultima invece per quanto sia comunque necessaria l'esistenza di un modello non è necessaria l'uguaglianza.

- $$\begin{array}{c} \Sigma, \neg\exists x \, \varphi(x) \\ | \\ \Sigma, \neg\varphi(c), \neg\exists x \, \varphi(x) \end{array}$$
- $$\begin{array}{c} \Sigma, \neg\forall x \, \varphi(x) \\ | \\ \Sigma, \neg\varphi(d) \end{array}$$ con d che non compare sopra

Esempio $\neg\forall x \, P(x) \longrightarrow \exists x \neg P(x) = \varphi(x)$

Considero la negazione

$$\begin{array}{c} \neg\varphi = \neg[\neg\forall x \, P(x) \longrightarrow \exists x \neg P(x)] \\ | \\ \neg\forall x \, P(x), \neg(\exists x \neg P(x)) \\ | \\ \neg P(a), \neg(\exists x \neg P(x)) \\ | \\ \neg P(a), \neg\neg P(a), \neg\exists x \neg P(x) \end{array}$$

contraddizione $\Rightarrow$ φ è valida

Esercizio $\exists x\,(P(x) \rightarrow \forall y\, P(y)) = \varphi$

$\neg \varphi$

$\neg(P(a) \rightarrow \forall y\, P(y)),\ \neg \varphi$

$P(a),\ \neg \forall y\, P(y),\ \neg \varphi$

$P(a),\ \neg P(b),\ \neg \varphi$

~~contraddizione $\Rightarrow$ φ è valida~~

$P(a),\ \neg P(b),\ P(b),\ \neg \varphi$

contraddizione $\Rightarrow$ φ è valida

2/10/2017

BERARDUCCI
TEORIA

Def Il linguaggi del I ordine $\mathcal{L}$ è un insieme di tre tipologie di simboli: i simboli di costante, i simboli di funzione e i simboli di predicato

$$\mathcal{L} = \{c_i \mid i \in I\} \cup \{f_j \mid j \in J\} \cup \{p_k \mid k \in K\}$$

Oltre al linguaggio esistono le variabili $V = \{x_0, x_1, \dots\}$ e i connettivi $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \forall, \exists\}$

Def A ognuno dei simboli è associato un numero naturale, detto arietà, che indica il numero degli argomenti

OSS L'arietà fa implicitamente parte del linguaggio

Esempio In teoria dei campi ho $\mathcal{L} = \{0, 1, +, \cdot, <\}$

Def Si definisce $\mathcal{L}$-struttura M un insieme tale che $M = (\mathrm{dom}(M) \neq \emptyset, c^M, f^M, p^M)$ con $c^M \in M$, $f^M : M^n \longrightarrow M$, dove n è l'arietà di f, e $p^M \subseteq M^n$, con n arietà di p*

OSS Notare che con M si indica sia il dominio sia la struttura

Esempio $(\mathbb{R}, 0^{\mathbb{R}}, 1^{\mathbb{R}}, +^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}}, <^{\mathbb{R}})$ è una $\mathcal{L}$-struttura

OSS Oltre che come sottoinsieme del prodotto cartesiano M^n, è possibile interpretare il predicato come funzione caratteristica

$$p^M : M^n \longrightarrow \{0, 1\}$$

OSS Chiaramente il modo di interpretare le variabili dipende dal linguaggio mentre si sceglie di interpretare i quantificatori secondo la logica classica e i connettivi tramite le tavole di verità

Def In un linguaggio privo di funzioni e senza il simbolo di uguaglianza, e in cui gli $\mathcal{L}$-termini sono le variabili o le costanti, si distinguono le formule atomiche, cioè del tipo $P(x_1, \dots, x_n)$, e le formule non atomiche, che possono essere della forma:

- $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$
- $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$
- $\neg \varphi_1$, dove φ_1 e φ_2 sono formule
- $\forall x\, \varphi$
- $\exists x\, \varphi$
- $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$

OSS Questa è una definizione induttiva.

OSS Con formula si intende la più piccola stringa che esprime un'affermazione

OSS Si osservi che la logica proposizionale è contenuta in questo contesto predicativo, infatti le proposizioni che consideravamo $(L = \{A, B, \dots\})$ possono essere visti come predicati di arietà 0

OSS Le parentesi nella $\wedge$ e $\vee$ sono necessarie perché altrimenti si creerebbero delle ambiguità

Esercizio Creare una grammatica che necessiti di meno parentesi e non sia ambigua.

OSS Una possibile soluzione è quella della "notazione polacca", cioè

$$\varphi ::= \text{Atomiche} \mid \wedge\varphi_1\varphi_2 \mid \vee\varphi_1\varphi_2 \mid \neg\varphi \mid \forall x\varphi \mid \exists x\varphi$$

Def $\mathcal{L}$-formule e $\mathcal{L}$-struttura M vanno a costituire la semantica.

Esempio Un esempio di semantica può essere la semantica di Tarski:

- $M \models \varphi$, cioè φ è vera in M
- $M \not\models \varphi$, cioè φ è falsa in M

Esempio Sia $\mathcal{L} = \{0, 1, +, \cdot, <\}$ e la $\mathcal{L}$-struttura $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, 0^{\mathbb{R}}, 1^{\mathbb{R}}, +^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}}, <^{\mathbb{R}})$

$$\mathbb{R} \models <(0,1) \underset{\text{Tarski}}{\iff} (0^{\mathbb{R}}, 1^{\mathbb{R}}) \in <^{\mathbb{R}} \iff 0^{\mathbb{R}} <^{\mathbb{R}} 1^{\mathbb{R}}$$

Ciò consiste nel trasformare una formula, cioè una stringa di simboli sintatticamente neutra, in un affermazione che può essere vera o falsa.

Un modo per definire la semantica su formule più complesse può essere quello induttivo: ad esempio $M \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \iff (M \models \varphi_1)$ e $(M \models \varphi_2)$

Un modo alternativo però è quello per cui ~~considerando~~ ~~[illegible]~~,

$$M \models \varphi \iff V_M(\varphi) = 1 \qquad \text{, dove } V_M : \{\text{formule}\} \to \{0,1\}$$
$$M \not\models \varphi \iff V_M(\varphi) = 0$$

Perciò si avrebbe

- $V_M((\varphi_1 \wedge \varphi_2)) = \min\{V_M(\varphi_1), V_M(\varphi_2)\}$
- $V_M((\varphi_1 \vee \varphi_2)) = \max\{V_M(\varphi_1), V_M(\varphi_2)\}$
- $V_M(\neg\varphi) = 1 - V_M(\varphi)$

Quando si considerano i quantificatori, però, si incontra qualche difficoltà con entrambi gli approcci

Esempio $\mathcal{L} = \{<\}$, $M = (\mathbb{R}, <^{\mathbb{R}})$. Sia $\varphi = \forall x \exists y (x < y)$

$M \models \varphi$? In $\mathbb{R}$ è vera, quindi $V_{\mathbb{R}}(\varphi) = 1$

Se si tenta un procedimento induttivo, si potrebbe vedere $\forall x\, P(x)$ come minimo su infiniti termini e $\exists x\, P(x)$ come massimo di infiniti termini.

$V_{\mathbb{R}}(\forall x \exists y (x<y)) \Rightarrow$

$$\Rightarrow V_{\mathbb{R}}(\forall x\, \psi) = \min_a V_{\mathbb{R}}(\psi[a/x])$$

Il problema è che $\psi[a/x]$ non è una formula e ciò deriva dalla presenza di variabili libere.

si sostituisce a al posto di x

Def Si definisce 'assegnazione' una funzione $s : \{\text{Variabili}\} \longrightarrow M$

Oss Definendo quindi $V_M : \{\text{formule}\} \times S \longrightarrow \{0,1\}$ si ha che $V_M(\varphi, s) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ anche se all'inizio ci sono variabili libere.

Esempio $V_{\mathbb{R}}(x < y, [3/x, \pi/y, 5/z]) = 1$

Oss Definendo ora $V_M(\forall x \varphi, s) = \min_{a \in M} (\varphi, s[a/x])$, il problema precedente non si pone in quanto anche se è rimasto il concetto di "fare il minimo sui $\varphi[a]$", non c'è stata una vera sostituzione e φ rimane una formula.

Oss Allo stesso modo si può definire $V_M(\exists x \varphi, s) = \max_{a \in M} (\varphi, s[a/x])$
$V_M(\varphi \wedge \psi, s) = \min\{V_M(\varphi, s), V_M(\psi, s)\}$ e così via.

Oss Si noti che $s[a/x]$ rappresenta una nuova assegnazione s' tale che $s'(x) = a$ e $s'(y) = s(y)$

Esempio $V_{\mathbb{R}}(\exists x (y = x \cdot x), [2/y, 3/x, 4/z, \dots]) =$

$= \max_{a \in \mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}(y = x \cdot x, [2/y, a/x, 4/z, \dots]) = 1$

Infatti se $a = \sqrt{2}$ $V_{\mathbb{R}}(y = x \cdot x, [2/y, \sqrt{2}/x, \dots]) = 1$.

Si considerino adesso le formule atomiche.

Si ha $M \models P(x_1, \dots, x_n)(s) \iff P^M(a_1 = s(x_1), \dots, a_n = s(x_n)) = 1$

predicato con l'assegnazione s.

Nel caso in cui ci siano non solo variabili ma anche costanti e funzioni si dà una definizione induttiva.

dato t termine $::=$ variabili $\mid c \mid f(t_1, \dots, t_n)$, $t^M(s) \in M$
in particolare:

- se $t = c$ $\quad c^M(s) = c^M \in M$
- se t è variabile x $\quad x^M(s) = s(x) \in M$
- se t è una funzione $f(t_1, \dots, t_n)$ $\quad f(t_1, \dots t_n)^M(s) = f^M(t_1^M(s), \dots, t_n^M(s)) \in M$

Perciò si definisce

$M \models P(t_1, \dots, t_n)(s) \iff \langle t_1^M(s), \dots, t_n^M(s) \rangle \in P^M$

Si vedano altri esempi riguardanti la semantica di Tarski

Esempio $\mathbb{R} \models (x<y)(^2/_x, ^3/_y) \iff (2,3) \in <^{\mathbb{R}} \iff 2<3$ in $\mathbb{R}$

Esempio $\mathbb{R} \models \exists y(x=y^2)(^3/_x)$ è vera mentre $\mathbb{R} \models \exists y(x=y^2)(^{-3}/_x$ è falsa)

OSS Non è stato necessario valutare anche y.

Si veda adesso chi sono le variabili libere di φ ($VL(\varphi)$):

- $VL(\varphi$ atomica$)$ = tutte le variabili che compaiono
- $VL(x<y) = \{x,y\}$
- $VL(\forall x\, \varphi) = VL(\varphi) - \{x\}$
- $VL(\exists x\, \varphi) = VL(\varphi) - \{x\}$
- $VL(\neg \varphi) = VL(\varphi)$
- $VL(\varphi \overset{\wedge}{\vee} \psi) = VL(\varphi) \cup VL(\psi)$

Esempio $VL[(\forall x\,(x>y)) \wedge (x>2)] = \{y, x\}$

occorrenza legata di x — occorrenza libera

Esercizio $V_M(\varphi)(S)$ dipende solo da $S|_{VL(\varphi)}$ ← si dimostra per induzione sulla complessità di φ

Corollario Se φ è chiusa (quindi φ è un enunciato), cioè $VL(\varphi)=\emptyset$, allora $V_M(\varphi)(S)$ non dipende da S

OSS Si scrive $M \models \varphi$ se $V_M(\varphi)(S)=1 \ \forall S$ e $M \not\models \varphi$ se $V_M(\varphi)(S)=0 \ \forall S$

Tornando alla semantica di Tarski sulle formule atomiche, si consideri il simbolo di uguaglianza, si ha

$$M \models (t_1 = t_2)(s) \iff V_M(t_1)(s) = V_M(t_2)(s) \iff (V_M(t)(s), V_M(t)(s)) \in \Delta_M = \{(x,x) \mid x \in M\}$$

OSS Il primo "=" ha valore sintattico, il secondo no

Esercizio Sia $\mathcal{L} = \{0, 1, +, \cdot\}$, $M = \mathbb{Z}_{1000}$, $0^M = [0]_{1000}$, $1^M = [1]_{1000}$, $+^M = +$ mod 1000, $\cdot^M = \cdot$ mod 1000.

~~Data~~ Esiste un algoritmo che data φ chiusa, determina se $\mathbb{Z}_{1000} \models \varphi$

La risposta è sì, in quanto il dominio è finito.

Infatti, procedendo dall'interno all'esterno, l'algoritmo trasforma

- $\exists x\, \varphi(x) \equiv \bigvee_{0 \le a < 1000} \varphi(a)$
- $\forall x\, \varphi(x) \equiv \bigwedge_{0 \le a < 1000} \varphi(a)$

In questo modo spariscono tutti i quantificatori e ottengo una grande formula in cui non ci sono nemmeno più variabili in quanto sono state tutte sostituite.
Infine, seguendo le tavole di verità si ha il risultato.

Dato $\mathcal{L} = \{0, 1, +, \cdot\}$ con l'interpretazione naturale dei simboli
In $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_{1000}$, dato enunciato φ esiste questo algoritmo?

In $\underbrace{\mathbb{R}, \mathbb{C}}_{\text{Tarski}}$, $\mathbb{Z}_{1000}$ sì, mentre non esiste in $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$.

Gödel Julia Robinson

Tornando ai tableaux, si osservi, infine, la regola per l'uguaglianza

- $$\begin{array}{c} \Gamma, t_1 = t_2, \varphi[^{t_1}/_x] \\ | \\ \Gamma, t_1 = t_2, \varphi[^{t_2}/_x], \varphi[^{t_1}/_x] \end{array}$$

- $$\begin{array}{c} \Gamma, t \\ | \\ \Gamma, t = t \end{array}$$

Esercizio Sia $\mathcal{L} = \{0, 1, +, \cdot\}$ e si consideri l'aritmetica di Robinson, che ha come assiomi: Q:

- $\forall x \forall y\, (S(x) = S(y) \rightarrow x = y)$
- $\forall x \quad 0 \neq S(x)$
- $\forall x\, [x \neq 0 \rightarrow \exists y \quad x = S(y)]$
- $\forall x \quad x + 0 = x$
- $\forall x \forall y\, [x + S(y) = S(x + y)]$
- $\forall x \quad x \cdot 0 = 0$
- $\forall x \forall y \quad x \cdot S(y) = x \cdot y + x$

Definendo $2 = S(S(0))$ e $3 = S(S(S(0)))$, si dimostri che $2 \cdot 2 \neq 3$

$Q, \neg(2 \cdot 2 \neq 3)$

$\downarrow$

$Q, 2 \cdot 2 = 3$

$\downarrow$ Q_7 con $x = 2$

$\forall y [2 \cdot S(y) = 2 \cdot y + 2]$

$\downarrow$ Q_7 con $y = 1 = S(0)$

$2 \cdot S(1) = 2 \cdot 1 + 2$

$\downarrow$ Q_7 $\begin{matrix} x = 2 \\ y = 0 \end{matrix}$

$2 \cdot S(0) = 2 \cdot 0 + 2$

$\downarrow$ Q_6

$2 \cdot 0 = 0$

$\downarrow$ considerando $\varphi \equiv (2 \cdot 1 = x + 2)[^{2 \cdot 0}/_x]$
applicando la regola dell'ug.

$2 \cdot 1 = 0 + 2$

$\downarrow$ Q_5

$0 + 2 = S(0 + 1)$

$\downarrow$ Q_5

$0 + 1 = S(0 + 0)$

$\downarrow$ Q_4

$0 + 0 = 0$

$\downarrow$ $\varphi\, (0 + 1 = S(x))[^{0+0}/_x]$

$0 + 1 = S(0)$

$\downarrow$ stesso modo

$0 + 2 = S(S(0))$

$\downarrow$

$2 \cdot 1 = S(S(0)$

$\downarrow$

$2 \cdot 1 = S(S(0)) + 2$

$\downarrow$

$S(S(0)) + 2 = S(S(S(S(0))))$

$\downarrow$

$S(S(0)) + 2 = S(S(S(S(0))))$

$\downarrow$

$2 + 2 = S(S(S(S(0))))$

$\downarrow$

$2 \cdot 2 = S(S(S(S(0))))$

$\downarrow$ Q_1 $\begin{matrix} x = 3 \\ y = 2 \end{matrix}$

$4 = 3 \rightarrow 3 = 2$

$\downarrow$

$3 = 2 \longrightarrow 2 = 1$

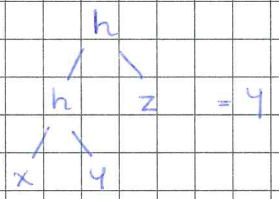
$2 = 1 \longrightarrow 1 = 0$

9/10/2017

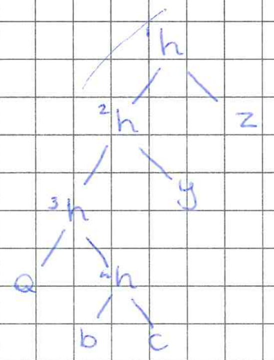
BERARDUCCI
TEORIA

Esercizio $\forall x,y,z\ h(h(x,y),z)=y \Rightarrow \forall x y\ x=y$] = φ

A livello semantico

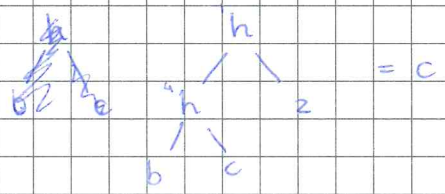


Considerando la sostituzione di x con:



Considerando la prima h, si ha che questo è uguale a y.

Considerando la seconda h, invece si ottiene



Quindi $y=c$ e, visto che sono completamente arbitrari, si ha la tesi.

Affrontando il problema con i tableaux

$\neg\varphi$

$\forall xyz\ h(h(x,y),z)=y,\ \neg\forall xy\ x=y$

$z=\underline{z}$, $y=\underline{y}$, $x=h(a,h(b,c))$

$\circledast$, $h(h(h(a,h(b,c)),\underline{y}),\underline{z})=\underline{y}$, $\underline{y}\neq c$

Continuando attraverso le regole dell'uguaglianza

$\underline{y}=c$, $\underline{y}\neq c$ assurdo.

Def Dato un linguaggio $\mathcal{L} = \{c_i, f_j, P_k\}$, si definisce $\mathcal{L}$-teoria T un insieme di $\mathcal{L}$-enunciati

Esempio Un esempio è l'aritmetica di Robinson.

cioè T soddisfa φ

Def Si dice che $T \vdash \varphi$, con φ formula $\Leftrightarrow$ esiste un tableaux chiuso.
A livello semantico invece, si dice $T \models \varphi$, cioè φ è conseguenza logica di T se i $\text{modelli}_{\mathcal{L}}(T) \subseteq \text{modelli}_{\mathcal{L}}(\varphi)$

OSS $M \in Mod(\varphi) \Leftrightarrow M \models \varphi$ e $M \in Mod(T) \Leftrightarrow \forall \varphi \in T \;\; M \models \varphi$

Teorema La definizione sintattica è equivalente a quella semantica.

OSS $T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$ è detto TEOREMA DI CORRETTEZZA
$T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$ è detto TEOREMA DI COMPLETEZZA

OSS Non si deve confondere il significato di "completezza" di questo teorema con quello usato con gli assiomi.
Un sistema di assiomi T infatti si dice completo se per ogni $\mathcal{L}$-enunciato φ $T \models \varphi$ o $T \models \neg\varphi$ (e non entrambi).
($\models \Leftrightarrow \vdash$)

Esempio Si consideri $T = Q$ l'aritmetica di Robinson.

- $S(x) = S(y) \Rightarrow x = y$
- $0 \neq S(x)$
- $y \neq 0 \Rightarrow \exists x \;\; y = S(x)$
- $x + 0 = x$
- $x + S(y) = S(x+y)$
- $x \cdot 0 = 0$
- $x \cdot S(y) = x \cdot y + x$

Questo non è un sistema completo, infatti, si consideri
"$\varphi \equiv \forall x \, (x$ è pari $\vee$ x è dispari$)$", cioè

$$\varphi \equiv \forall x \left(\exists y \;\; x = y + y \;\vee\; \exists y \;\; x = y + y + 1 \right), \quad \text{con } 1 = S(0)$$

Def T si dice coerente se $T \nvdash \perp$ o $T \not\models \perp$ $(Mod(T) \not\subseteq Mod(\perp) = \emptyset)$

Sicuramente non è possibile che $Q \models \neg\varphi$. Infatti basta considerare $\mathbb{N}$ come modello.
Si considerino ora i polinomi in $\mathbb{Z}[t]$ con termine di grado massimo è positivo o il polinomio nullo.
Questi soddisfano gli assiomi, ma t non è né pari né dispari.
Q quindi è incompleta.
La si completi mantenendo $\mathbb{N}$ come modello:
- barando: $T \subset Th(\mathbb{N}) = \{\varphi \mid \mathbb{N} \models \varphi\}$
- definizione induttiva: $\forall P \, (P(0) \wedge \forall x \, (P(x) \to P(S(x))) \to \forall y \, P(y))$
  ma non va bene perché sto quantificando su P.

Esercizio: Se T completa, allora $T \models A \vee T \models \neg A \Leftrightarrow T \models A \vee \neg A$ ($\Rightarrow$ è sempre ovvio)
- L'aritmetica di Peano $PA = Q +$ induzione, a livello semantico è completo in quanto

Esercizio: Se T coerente ha un modello $\mathbb{N}$, ma non posso fare il tableaux $\neg\varphi$
(semantic. $Mod(T) \subseteq Mod(\varphi) \cap Mod(\neg\varphi) = \emptyset$)
- $PA^{(1)} = PA|_{1\text{ ordine}}$ dove l'induzione è data da uno schema di assiomi
  Assioma: $\forall \bar{z} (\varphi(0) \wedge \forall x \, [\varphi(x) \to \varphi(S(x))] \to \forall y \, \varphi(y))$

OSS $PA^{(1)}$ dimostra che ogni x è pari o dispari

$\varphi(x) \equiv x$ è pari o dispari

- base $\varphi(0)$ vale ($0 = 0+0$, quindi pari)

- passo ind $\forall x\, [\varphi(x) \rightarrow \varphi(S(x))]$ è vero (fare)

x pari $\rightarrow x = a+a \rightarrow S(x) = a+a+1$ ✓

x disp $\rightarrow x = (a+a)+1 \rightarrow x = a+1+a+1$ ✓

devo dim la commutatività

OSS ~~Ma~~ In realtà nemmeno $PA^{(1)}$ è completa

12/10/2017

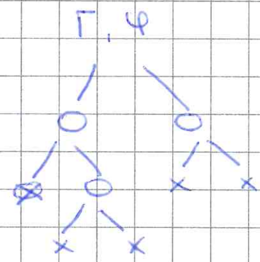
BERARDUCCI
TEORIA

Si torni a considerare i tableaux.

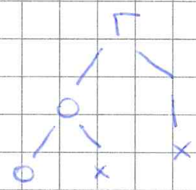
Nel caso proposizionale, questi terminano sempre.
I tableaux però non nascono come metodo dimostrativo ma come metodo per trovare modelli.
Qui però, avendo le tavole di verità, non sarebbero necessari.

Nel caso predicativo, invece, dove non ci sono tavole di verità possono verificarsi 3 casi:

- esiste un tableaux chiuso con radice φ quindi $\Gamma \vdash_{tab} \neg\varphi$, cioè φ non ha modelli.
  Ciò però significa che $\Gamma \models \neg\varphi$
  (quindi tutti i modelli di Γ sono modelli di $\neg\varphi$).
  Dunque i tableaux possono essere usati a scopo dimostrativo solo se si chiude



- Il tableaux "finisce", quindi mi riduco a formule atomiche, ma non si chiude

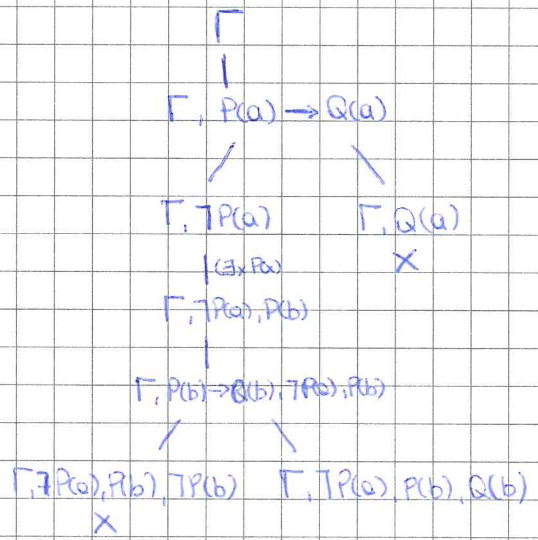


Esempio ~~...~~ $\mathcal{L} = \{P, Q, a\}$
$\Gamma = \{\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), \neg Q(a), \exists x P(x)\}$

Questo può avere come modello

$dom(M) = \{a^M, b^M\}$
$Q^M = \{b^M\}$
$P^M = \{b^M\}$

Si cerchi di trovare un modello tramite tableaux



← Questo ramo fornisce il modello che era stato individuato.

- Il terzo caso è quello in cui il tableaux non finisce mai

Esempio $\Gamma = \{\neg P(a,a), \forall x \exists y\, P(x,y)\}$, con $\mathcal{L} = \{a, P\}$

$$
\begin{array}{c}
\Gamma \\
\mid \ \forall x \exists \ldots \\
\Gamma, \exists y\, P(a,y) \\
\mid \ \exists \ldots \\
\Gamma, P(a,b) \\
\mid \ \forall x \exists \ldots \\
\Gamma, \exists y\, P(b,y)
\end{array}
$$

Anche se ci fossero modelli che permettono di fermare il tableaux questi non vengono esplicitamente indicati dal tableaux, che continuerebbe meccanicamente all'infinito.

Se il tableaux non finisce, dunque, possono esistere modelli? A volte si
In un caso peggiore, potrebbe capitare che ci sia un modello, ma che questo sia infinito

Si consideri ad esempio $\Gamma' = \Gamma \cup \{\forall x \neg P(x,x)\} \cup \{\forall xyz\, [P(x,y) \wedge P(y,z) \rightarrow P(x,z)]\}$
Come modello si potrebbe prendere come modello.

$\mathrm{dom}\, \mathbb{M} = \mathbb{N}$
$P^{M} = <$
$a^{M} = 0$

La risposta alla domanda, in conclusione, è sì, se il tableaux viene fatto con cura.

Si consideri $\Gamma = \{P(a,a) \wedge \neg P(a,a), \forall x \exists y\, P(x,y)\}$
Se non mi accorgessi del primo assioma, potrei continuare all'infinito
Ma guardando attentamente, ci si accorge che è possibile dedurre che non ci sono modelli che soddisfano Γ

Teorema Se c'è un tableaux chiuso a partire da Γ, allora Γ non ha modelli
Se si ha un tableaux finito ma non chiuso, allora Γ ha almeno un modello
Se il tableaux è fatto in modo sistematico e non si chiude, esiste un modello anche nel caso di tableaux infiniti.

Def Γ si definisce tableaux-coerente se non esiste un tableaux chiuso con radice Γ (con Γ insieme finito di formule)

Corollario ~~Teorema~~ Se Γ è tableaux-coerente, allora ha modello.

Dim

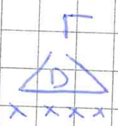
Facendo un tableaux sistematico, si hanno le ipotesi del teorema precedente.

oss È vero anche il viceversa, in quanto, banalmente, i tableaux sono stati creati in modo che se una radice ha modello, anche il figlio ha modello.

Teorema Se Γ ha modello, è tableaux-coerente

Dim

Se per assurdo Γ è tableaux-incoerente allora $\exists$ tableaux D



Ma, visto che le foglie non hanno modello anche la radice non ha modello. Perciò, risalendo il tableaux, si deduce che Γ non ha modello, assurdo.

Corollario $\Gamma \vdash_{tab} \varphi \iff \Gamma \models \varphi$

Dim

$\Gamma \vdash \varphi \overset{def}{\iff} \Gamma, \neg\varphi$ è tableaux-incoerente $\iff \Gamma, \neg\varphi$ non ha modello $\iff \Gamma \models \varphi$.

~~Un tableaux si svilupp~~

Def Dato $\mathcal{L}$ un linguaggio finito di partenza $\mathcal{L} = \{a, b, P, f, \dots\}$, $C = \{c_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ di costanti di riserva,
si considerino le $\mathcal{L} \cup C$-formule chiuse $= \{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$
Quando si sviluppa un nodo Γ del tableaux si analizza la $\varphi \in \Gamma$ con indice minimo
Considerando i $\mathcal{L} \cup C$-termini chiusi $= \{t_n \mid n \in \mathbb{N}\}$
Quando si analizza un $\forall x\, \varphi(x)$ si sostituisce in x il termine t vecchio con indice minimo non ancora sostituito. in $\varphi(x)$ in quel ramo
Se non ci sono termini vecchi, allora è possibile aggiungere un termine.
Se si sviluppa un $\exists x\, \varphi(x)$ si sostituisce x con una di nuovo $\in C$ non ancora utilizzata in quel ramo.
Così si sviluppa un tableaux in modo sistematico.

Def Si definisce insieme di Hintikka, dato un linguaggio $\mathcal{L}'$ con almeno una costante, un insieme di $\mathcal{L}'$-formule H tale che

- $\varphi \vee \psi \in H \Rightarrow \varphi \in H$ o $\psi \in H$
- $\varphi \wedge \psi \in H \Rightarrow \varphi \in H$ e $\psi \in H$
- $\neg\neg\varphi \in H \Rightarrow \varphi \in H$
- $\neg(\varphi \vee \psi) \in H \Rightarrow \neg\varphi \in H$ e $\neg\psi \in H$
- $\neg(\varphi \wedge \psi) \in H \Rightarrow \neg\varphi \in H$ o $\neg\psi \in H$
- $\varphi \in H \Rightarrow \neg\varphi \notin H$
- $\forall x\, \varphi \in H$ e t $\mathcal{L}'$-termine chiuso $\Rightarrow \varphi(t) \in H$
- $\exists x\, \varphi \in H \Rightarrow \exists\, t$ $\mathcal{L}'$-termine chiuso t.c. $\varphi(t) \in H$
- $\neg\forall \sim \exists\neg$
- $\neg\exists \sim \forall\neg$
- $t_1 = t_2 \in H$ e $\varphi(t_1) \in H \Rightarrow \varphi(t_2) \in H$
- $t = t \in H$

Teorema Ogni insieme di Hintikka ha un modello

16/10/2017

BERARDUCCI
TEORIA

Esempio — Un esempio di insieme di Hintikka può essere $\{(A \wedge B) \to A, A\}$.

Esempio — Un insieme di Hintikka con i quantificatori, con $\mathcal{L} = \{c, a, P\}$ può essere $\{\forall x \exists y\, P(x,y), \exists y P(a,y), \exists y P(c,y), P(a,a), P(c,a)\}$

OSS — Intuitivamente un insieme di Hintikka può essere visto come un insieme in cui ogni formula ha una sua "giustificazione".

Si noti inoltre che di solito una formula è implicata da una sua giustificazione, eccezion fatta per il "$\forall$".

Esempio — Si consideri $\mathcal{L} = \{0, 1, +, \cdot\}$ e sia $T = \{\varphi \mid \mathbb{R} \models \varphi\}$
T è di Hintikka? In realtà no, infatti con questo linguaggio, sarebbe possibile stanziare le cose solo coi naturali
~~Abbiamo~~ Si ha ad esempio $\mathbb{R} \models (\exists x\,(x \cdot x = 1+1))$, ma $\sqrt{2} \notin \mathcal{L}$
quindi questa formula non ha giustificazione.

Si noti che, con lo stesso linguaggio, T definito sul dominio $\mathbb{N}$, è di Hintikka.

Def — Una $\mathcal{L}$-struttura M si dice ricca se per ogni $a \in M$ esiste t $\mathcal{L}$-termine chiuso tale che $a = t^M$.

OSS — Con il linguaggio considerato prima, $\mathbb{N}$ è ricco mentre $\mathbb{R}$ no.

OSS — Se M è ricco e $\forall t$ termine chiuso vale $M \models \varphi(t)$ allora $M \models \forall x\, \varphi(x)$.

Esercizio — Se M è ricco, allora $Th(M) = \{\varphi \mid M \models \varphi\}$ è di Hintikka.

Teorema — Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio, ogni insieme di Hintikka T ha un modello M (ricco).

Domanda — Se il teorema è vero, necessariamente $Th(M) = T$?
In realtà no, si ha solo l'inclusione $Th(M) \supseteq T$.

— Inoltre, a meno di isomorfismo, il modello M è unico?

Si consideri $\mathcal{L} = \{a, c, P, Q\}$ e $T = \{\exists x\, P(x), P(a), Q(c)\}$
Questo è di Hintikka ma è contenuto in due modelli distinti, ad esempio uno in cui vale $Q(a)$ e uno in cui non vale.

Esercizio — Un insieme di Hintikka massimale (non ulteriormente estendibile) è completo.

Dm teo

Si consideri intanto il caso in cui non ci sono funzioni né il simbolo di uguaglianza.

Si sceglie intanto dom(M). Sicuramente dovrà essere un insieme in bigezione con i simboli di costante.
Qui si definisce $c^M \in dom(M) = f(c)$
Come si interpretano i predicati?

Preso $P \in \mathcal{L}$ n-ario, $P^M \subseteq M^n$ si dirà che $P(\underset{c_1^M}{a_1}, \ldots, \underset{c_n^M}{a_n})$ vale nel modello se la formula $P(c_1, \ldots, c_n) \in T$

In questo modo si ha che M soddisfa tutte le formule atomiche di T.
Per le altre?

Se $\varphi = \neg\theta \in T$, con θ atomica, allora $M \models \neg\theta$.
Infatti altrimenti si avrebbe $M \not\models \neg\theta \Leftrightarrow M \models \theta \Leftrightarrow \theta \in T$ quindi $\theta, \neg\theta \in T$, assurdo in quanto T è di Hintikka.

Per dimostrare che $\theta \in T \Rightarrow M \models \theta$ si procede per induzione sulla complessità della formula.

- $\theta = \alpha \vee \beta \Rightarrow \alpha \in T$ o $\beta \in T \overset{\text{induz.}}{\Rightarrow} M \models \alpha$ o $M \models \beta \Rightarrow M \models \alpha \vee \beta$

Analogamente gli altri

- $\exists x\, \varphi(x) \in T \Rightarrow \exists\, c \in \mathcal{L},\ \varphi(c) \in T \overset{\text{ind.}}{\Rightarrow} M \models \varphi(c) \Rightarrow M \models \exists x\, \varphi(x)$

- $\forall x\, \varphi(x) \in T \underset{\text{Hintikka}}{\Rightarrow} \forall c \in \mathcal{L}\ \ \varphi(c) \in T \overset{\text{ind.}}{\Rightarrow} \forall c \in \mathcal{L}\ \ M \models \varphi(c) \Rightarrow$

$\underset{\text{M ricca}}{\Rightarrow} \forall m \in M\ \ M \models \varphi(m/x) \Rightarrow M \models \forall x\, \varphi(x)$

Se invece sono presenti funzioni e "=", non è possibile considerare l'insieme delle costanti o dei termini, in quanto potrebbero esserci termini che vanno a identificare la stessa cosa
Perciò dom(M) = termini chiusi$/_E$, dove E è una relazione di equivalenza tale che $E(t_1, t_2) \in T \Leftrightarrow (t_1 = t_2) \in T$. Quindi $dom(M) = \{[t] \mid t\}$

Come si interpreta una costante a? $a^M = [a]$
Come si interpreta una funzione f? $f^M([t_1], [t_2]) = [f(t_1, t_2)]$

Da qui si può dimostrare che se t è un termine, $t^M = [t]$

Esempio $t = f(a,b)$

$t^M = f^M(a^M, b^M) = f^M([a], [b]) = [f(a,b)] = [t]$

Da ciò si deduce che M è ricco.

Ora si procede come prima dimostrando che se $\varphi \in T$, allora $M \models \varphi$

- φ atomica $\Rightarrow \varphi = t_1 = t_2 \ \vee\ \varphi = P(t_1, \ldots t_n)$
  - $t_1 = t_2 \in T \Rightarrow E(t_1, t_2) \Rightarrow [t_1] = [t_2] \Rightarrow t_1^M = t_2^M \Rightarrow M \models (t_1 = t_2)$
  - $\varphi = P(t_1, \ldots t_n) \in T \Rightarrow P^M([t_1], [t_2], \ldots) \Leftrightarrow P^M(t_1^M, t_2^M, \ldots) \Rightarrow M \models P(t_1, \ldots t_n)$

Dopodiché, si procede in maniera analoga per tutti i casi:
- $\forall x\, \varphi(x) \in T \Rightarrow \forall$ termine t chiuso $\varphi(t) \in T \Rightarrow M \models \varphi(t) \Rightarrow \forall m \in M$ ~~...~~ $M \models \varphi(m/x) \Rightarrow M \models \forall x\, \varphi(x)$ ($m = [t] = t^M$)

OSS In realtà, oltre all'essere una relazione di equivalenza, si dovrebbe dimostrare che E rispetta le operazioni, cioè:

$$E(t_i, t_i') \ \forall i = 1, \dots, n \Rightarrow E(f(t_1, \dots t_n), f(t_1', \dots t_n'))$$

Allora è lecito definire $f^M([t_1], \dots, [t_n]) = [f(t_1, \dots, t_n)]$

Basta dimostrare che se $t_i = t_i' \in \Rightarrow f(t_1, \dots, t_n) = f(t_1', \dots t_n') \in T$.

Intanto, se $t_1 = t' \overset{\in T}{} \Rightarrow f(t_1, t_2, \dots) = f(t_1', t_2, \dots) \in T$

Infatti, basta considerare $\varphi(x) = f(x, t_2, \dots) = f(t_1^*, t_2, \dots)$
Questo vale per $x = t_1$, quindi vale anche per ~~...~~ $x = t_i'$.

Corollario Dato Γ un ~~...~~ insieme finito di formule, allora Γ è tableaux-coerente $\Leftrightarrow$ Γ ha un modello.

Dim
"$\Rightarrow$" Il tableaux sistematico non si chiude.
Ogni suo ramo massimale non chiuso è di Hintikka $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ ~~...~~ ha modello $\Rightarrow \Gamma$ ha modello
"$\Leftarrow$" Se è incoerente, il tableaux si chiude quindi nessuna foglia ha un modello e, pertanto, non lo ha nemmeno la radice

19/10/2017

BERARDUCCI
TEORIA

Esercizio Sia $\mathcal{L} = \{\cap, \cup, \sim, 0, 1\}$ e si consideri la $\mathcal{L}$-teoria T con assiomi

- $x \cup 0 = x$
- $x \cap 0 = 0$
- $x \cup 1 = 1$
- $x \cap 1 = x$
- $x \cup y = y \cup x$
- $x \cap y = y \cap x$
- $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$
- $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$
- $x \cup \sim x = 1$
- $x \cap \sim x = 0$
- $x \cup y \cup z = (x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$
- $x \cap y \cap z = (x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z)$
- $\sim 0 = 1$
- $\sim 1 = 0$

(oss È possibile definire un "ordine" in modo che:

$x \leq y \Leftrightarrow x \cap y = x$)

Chi è il modello dei termini? Qual'è la cardinalità del modello dei termini?

Def Un modello dei termini è costituito dai $\text{termini chiusi}/E$, dove $E(t_1, t_2) \Leftrightarrow T \vdash t_1 = t_2$

Il modello ha solo due elementi: $M = \{[0], [1]\}$
Se si aggiungono al linguaggio $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{a\}$ il modello diventa di 4 elementi
$M' = \{0, 1, a, \sim a\}$
Con $\mathcal{L}'' = \mathcal{L} \cup \{a, b\}$ il modello ha 16 elementi. $M'' = \{0, 1, a, b, \tilde{a}, \tilde{b}, a \cap b, a \cap \tilde{b}, \dots\}$

Esercizio Usando gli assiomi, si dimostri $x \cap y = x \Leftrightarrow x \cup y = y$

Si noti che ad esempio, il terzo caso si comporta come l'insieme delle parti di 4 elementi. Partendo dagli elementi minimali $\{a \cap b, \tilde{a} \cap \tilde{b}, a \cap \tilde{b}, \tilde{a} \cap b\}$ unendo vari di questi si ottengono gli altri

Esempio Siano A, B variabili proposizionali e le formule includono $\wedge, \vee, \neg, A, B$.
Si consideri ora la relazione di equivalenza $\varphi \equiv \psi \Leftrightarrow \models (\varphi \leftrightarrow \psi)$
Questo è un algebra di Boole: infatti, è possibile interpretare

$$[\varphi] \cap [\psi] = [\varphi \wedge \psi]$$
$$\vdots$$

In questo caso dire $[\varphi] \leq [\psi] \Leftrightarrow [\varphi] \cap [\psi] = [\varphi] \Leftrightarrow \varphi \wedge \psi \equiv \varphi \Leftrightarrow \models \varphi \to \psi$

Questo esempio è l'algebra di Lindembaum

Anche qui, essendo isomorfo al caso precedente, il modello dei termini ha 16 elementi

oss Considerando $A_1, A_2, \dots$ variabili proposizionali, le formule $\neg \wedge \vee$ modulo equivalenza è un algebra di Boole senza atomi, cioè è sempre possibile trovare una formula minore

$[A_1]$
$\quad [A_1 \wedge A_2]$
$\quad\quad [A_1 \wedge A_2 \wedge A_3]$

OSS Ogni algebra di Boole è isomorfa a un algebra di insiemi (è un teorema che forse dimostreremo).

Esercizio Considerando gli assiomi dell'aritmetica di Robinson Q e si definisce $E(t_1, t_2) \Leftrightarrow Q \vdash t_1 = t_2$ qual è il modello dei termini?

$M \cong \mathbb{N}$, infatti ogni termine, per quanto complicato equivale a un successore (quindi intuitivamente a un numero naturale)

Esempio $(\mathbb{R}^{>0}, \cdot, 1) \cong (\mathbb{R}, +, 0)$. (quindi lo $\mathcal{L} = \{f, c\}$)

Chiamato $M_1 = (\mathbb{R}^{>0}, \cdot, 1)$ e $M_2 = (\mathbb{R}, +, 0)$, si ha che $c^{M_1} = 1$ e $c^{M_2} = 0$
Quindi un isomorfismo h dovrà mandare c^{M_2} in c^{M_1}
Inoltre, se ~~kaa~~ presi $a, b \in M_2$, si ha $h(a) = a'$ e $h(b) = b'$ deve essere che $h(f^{M_2}(a,b)) = f^{M_1}(h(a), h(b))$, cioè che $h(a+b) = a' \cdot b'$.
Un isomorfismo possibile, dunque, è $h(x) = e^x$

Esercizio Due strutture isomorfe verificano gli stessi assiomi

Esempio Se si considera $\mathcal{L} = \{1, \cdot, (\ )^{-1}\}$ e gli assiomi dei gruppi si ha che il modello dei termini è fatto da un solo elemento
Se si considera, invece, $\mathcal{L} = \{1, \cdot, (\ )^{-1}, a, b\}$ si ha che il modello dei termini è il gruppo libero generato da a e b.

Si ricordi che se T è di Hintikka allora ha un modello (quello dei termini) e quindi è coerente
Inoltre dato un tableaux sistematico con radice Γ questo o si chiude (dopo un numero finito di passi) o produce un modello (eventualmente infinito).

Il tableaux, infatti, o si chiude o ha un ramo massimale non chiuso, che è di Hintikka, e quindi ha un modello.

Corollario Γ è tableaux-coerente $\Leftrightarrow$ Γ ha modello

OSS Γ deve essere finito o numerabile. Nel caso in cui Γ sia più che numerabile non funzionerebbe più questa dimostrazione, in cui sono state enumerate le formule per stabilirne la priorità

Corollario $\Gamma \vdash_{tab} \varphi \Leftrightarrow \Gamma \models \varphi$

Dim

$\Gamma \vdash \varphi \overset{def}{\Leftrightarrow} \Gamma, \neg\varphi$ tableaux-incoerente $\Leftrightarrow$ $\Gamma, \neg\varphi$ non ha modello $\Leftrightarrow$ $\overset{def}{\Leftrightarrow} \Gamma \models \varphi$

OSS Tutte queste considerazioni, in che linguaggio vengono fatte?

Def Dato $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ e una $\mathcal{L}$-struttura M e una $\mathcal{L}'$-struttura M', si dice che M' è un'espansione di M se $M'|_{\mathcal{L}} = M$.

OSS Ciò significa interpretare nuovi simboli

Esercizio Se $M'|_{\mathcal{L}} = M$ e φ è una $\mathcal{L}$-formula, $M' \models \varphi \iff M \models \varphi$

OSS Quindi non è importante in quale linguaggio ci si trovi, se in quello di partenza o in quello espanso.

Corollario (COMPATTEZZA) Se T è un $\mathcal{L}$-teoria che non ha modelli, allora $\exists T' \subseteq T$, t.c. T' è finita e non ha modelli.

Dim

~~T non ha modelli~~
Si suppone T numerabile.
T non ha modelli $\Rightarrow T$ è tableaux-incoerente $(T \vdash \perp)$
Ma i tableaux se si chiudono in un numero finito di passi.
Quindi, la "stessa" dimostrazione mostra che $\exists T' \subset T$ ← andrebbe visto per induzione sulla profondità del tab.
che è tableaux-incoerente $(T' \vdash \perp)$, quindi T' non ha modelli.

Def T è finitamente soddisfacibile se $\forall T' \subseteq T$ finito, T' è soddisfacibile

OSS Se ~~T è~~ soddisfacibile, allora T è finitamente soddisfacibile.

Esempio Sia $T = PA^{(1)} \cup \{c \neq 0, c \neq S(0), c \neq S(S(0)), \dots\}$ e $\mathcal{L} = \{0, S, +, \cdot, c\}$.
C'è un modello?

Sì, in quanto è finitamente soddisfacibile, in quanto se si considera una parte finita di T allora $\exists k$ t.c. $T' \subset PA^{(1)} \cup \{0, S(0), \dots, S^k(0)\}$ perciò si ha un modello M con $\operatorname{dom} M = \mathbb{N}$ e in cui $c^M = k+1$.
Dunque, per il teorema di compattezza, anche T ha un modello.
Il problema è che non si riesce a vederlo.

OSS Preso $M \models PA^{(1)} \cup \{c \neq 0, \dots\}$, $M|_{0,S,+,\cdot} \cong \mathbb{N}$?

No, perché se per assurdo ci fosse un isomorfismo, chiamato $a = c^M \in \operatorname{dom} M$, e quindi $a \in M|_{0,S,+,\cdot}$, questo elemento a deve andare in un elemento $a' \in \mathbb{N}$ che, per rispettare le proprietà, deve essere diverso da ogni n, ma un tale elemento non c'è.

Dunque $PA^{(1)}$ non è una teoria categorica.