Logica Matematica: tipiche domande da esame

A. Berarducci

Versione del 7 Gen. 2018

1. Si dimostri che ogni formula proposizionale può essere messa in forma normale disgiuntiva e in forma normale disgiuntiva.
2. Si dimostri che ogni formula del calcolo dei predicati può essere messa in forma normale prenessa (ovvero con tutti i quantificatori all'inizio).
3. Si dia una definizione induttiva di $\varphi(t/x)$, dove $\varphi(t/x)$ è il risultato della sostituzione del termine t nelle occorrenze libere della variabile x in φ.
4. Si mostri che se il termine t è sostituibile per x in φ, allora $\models \forall x\varphi \to \phi(t/x)$, mentre se non si assume la sostituibilità il risultato in generale non vale.
5. Si mostri che se $T \models \varphi$ nel linguaggio L, e se i simboli di T, φ appartengono tutti ad un linguaggio $L' \subset L$, allora $T \models \varphi$ nel linguaggio L'.
6. Si diano esempi di dimostrazioni formali nel sistema dei Tableaux e nel sistema della deduzione naturale (essendo preparati ad improvvisare su richiesta).
7. Si dimostri il teorema di correttezza per i sistemi dimostrativi visti a lezione (Tableaux e deduzione naturale).
8. Si dimostri il teorema di completezza per i sistemi dimostrativi visti a lezione.
9. Si discutano i tre casi (chiuso, finito, infinito) che possono capitare quando si sviluppa un tableaux, sapendo fornire degli esempi.
10. Si dimostri il teorema di compattezza e si diano alcune applicazioni significative.
11. Si dimostri il Lemma di Lindenbaum: ogni teoria coerente ha un'estensione completa.
12. Si mostri che ogni teoria coerente ha una estensione coerente di Henkin.
13. Si diano esempi di teorie di Henkin e non.
14. Si dimostri che una teoria di Henkin massimale e coerente è di Hintikka.

15. Si diano esempi di teorie di Hintikka e non.

16. Si dimostri che ogni teoria i cui assiomi sono formule atomiche quantificate universalmente ha un modello.

17. Si dimostri, senza far uso del teorema di completezza, che se $T \vdash \varphi(c/x)$ e la costante c non compare in T o in φ, allora $T \vdash \forall x \varphi(x)$ (tramite una dimostrazione che non menziona c).

18. Si dimostri, senza far uso del teorema di completezza, che se $T \models \varphi(c/x)$ e la costante c non compare in T o in φ, allora $T \models \forall x \varphi(x)$.

19. Si dimostri che esistono modelli non numerabili di PA (aritmetica di Peano del primo ordine) e modelli numerabili della teoria completa del campo dei reali.

20. Sia M un modello non standard di PA. Si dica qualcosa sull'ordine di M (definito a partire dal $+$). Ad esempio: può/deve essere un buon ordine?

21. Si dimostri che esiste un modello numerabile della teoria completa dei numeri naturali $(\mathbb{N}, 0, s, +, \cdot)$ che non è isomorfo a $(\mathbb{N}, 0, s, +, \cdot)$.

22. Data una classe K di L-strutture, sia $Th(K)$ la teoria di K (gli enunciati veriin tutte le strutture di K). Data una L-teoria T, sia $Mod(T)$ l'insieme dei modelli di T. Si mostri che $Th(Mod(Th(K)) = Th(K)$ e $Mod(Th(Mod(T))) = Mod(T)$. Si discutano casi in cui $Mod(Th(K)) \neq K$.

23. Si applichi il teorema di compattezza per dimostrare che ogni relazione di ordine parziale su un insieme si può estendere ad una relazione di ordine totale sullo stesso insieme.

24. Si dimostri che se ZF è coerente esiste un suo modello con numeri naturali non standard.

25. Si dimostri che se ZF è coerente esiste un suo modello M e una successione infinita di elementi $a_n \in M$ tali che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $M \models a_{n+1} \in a_n$. Come mai ciò non contraddice l'assioma di fondazione?

26. Si dimostri che non esiste alcuna teoria (del primo ordine) T, nel linguaggio con un simbolo di relazione binaria, i cui modelli siano esattamente i grafi connessi. Si discuta cosa succede al secondo ordine.

27. Si dimostri che non esiste alcuna teoria T nel linguaggio $L = \{\leq\}$ i cui modelli siano esattamente i buoni ordini.

28. Si applichi il teorema di compattezza per dimostrare che se un grafo infinito non è 5-colorabile allora esiste un suo sottografo finito che non è 5-colorabile.

29. Si dimostri che esiste una estensione completa di PA (l'aritmetica di Peano del primo ordine) che non ha $(\mathbb{N}, 0, s, +, \cdot)$ come modello.

30. Si trovi un'estensione coerente di PA che sia ω-incoerente.

31. Si dimostri che ogni formula Σ_1^0 vera in $\mathbb{N}$ è dimostrabile in Q.

32. Si dimostri la binumerabilità (funzionale) delle funzioni ricorsive totali in Q.

33. Si cerchi di dimostrare che x^y è definibile in modo "naturale" nei modelli di PA, dove per modo naturale intendiamo che le equazioni $x^0 = 1$ ed $x^{y+1} = x^y \cdot x$ valgano per ogni x, y nel modello, anche per gli elementi non-standard (la binumerabilità ci dà informazioni solo sugli elementi standard, ma le stesse formule che abbiamo usato per dimostrare la binumerabilità funzionano).

34. Si generalizzi l'esercizio precedente al caso di funzioni definite per ricursione primitiva.

35. Sia $\mathbb{N} = (\mathbb{N}, 0, s, +, \cdot)$ il modello standard dell'aritmetica. Si trovi una formula $\varphi(x, y)$ tale che per ogni $n, m \in \mathbb{N}$ si ha che $\mathbb{N} \models \varphi(n, m)$ se e solo se $m = n^n$. Suggerimento: si consideri la funzione ausiliaria $m = n^k$.

36. Si dimostri il primo teorema di incompletezza di Gödel e le sue varianti.

37. Si discutano le ipotesi circa le codifiche delle formule che sono implicitamente usate nella dimostrazione del primo teorema di Gödel.

38. Si dimostri il secondo teorema di incompletezza di Gödel, cercando di porre attenzione alle ipotesi, più o meno implicite, circa la naturalezza della formalizzazione dei concetti metateorici all'interno della teoria.

39. Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ definibile da una formula $\varphi(x)$ di complessità Σ_0^1. Si dimostri che A è semidecidibile, ovvero esiste un algoritmo che dato in input un numero naturale n si ferma in un numero finito di passi se e solo se $n \in A$.

40. Si dimostri che se un enunciato Σ_0^1 è vero nel modello standard $\mathbb{N}$ allora è vero in tutti i modelli di PA (o anche di Q).

41. Si dimostri che il modello standard $\mathbb{N}$ è un segmento iniziale di ogni altro modello di PA (o dell'aritmetica di Robinson Q).

42. Si dimostri che esistono sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ non semidecidibili.

43. Si dimostri che esistono sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ semidecidibili ma non decidibili.

44. Si dimostri che se $\mathbb{N}$ è scritto come unione di un numero finito di insiemi semidecidibili disgiunti, allora ciascuno di essi è decidibile.

45. Si dia una definizione della gerarchia aritmetica e si dimostri che gli insiemi Σ^0_n sono rappresentabili con formule Σ^0_n.

46. Si dimostri che la classe dei predicati Σ^0_n è chiusa per congiunzioni, disgiunzioni, e applicazione di quantificatori limitati.

47. Si dimostri che la teoria degli anelli è indecidibile. Suggerimento: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un anello e la sua teoria intepreta la teoria di $(\mathbb{N}, +, \cdot)$.

48. Si dimostri che la teoria completa $Th(M)$ di una L-struttura finita è decidibile (assumendo L finito).

49. Sia L un linguaggio del primo ordine abbastanza ricco (basta che ci sia un simbolo di relazione binaria). Si dimostri che l'insieme delle L-formule valide è semidecidibile ma non è decidibile.

50. Si cerchi di dimostrare che la funzione di Ackermann è μ-ricorsiva.

51. Si dimostri che esistono insiemi semidecidibili non decidibili.

52. Si dimostri che esistono insiemi definibili in $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ che non sono semidecidibili.

53. Si dimostri che l'insieme dei numeri di Gödel degli enunciati aritmetici veri nel modello standard $\mathbb{N}$ non è semidecidibile e neppure il suo complemento lo è.

54. Sia $f : A \to B$ un omomorfismo tra L-strutture (ad esempio un omomorfismo di gruppi). Sia φ un L-enunciato i cui connettivi siano inclusi in $\{\exists, \wedge, \vee\}$. Si dimostri che se φ è vero in A allora è vero in B. Si dimostri che se f è surgettivo possiamo estendere il risultato alle formule con connettivi in $\{\exists, \forall, \wedge, \vee\}$ Infine se f è un isomorfismo il risultato vale per tutte le formule.

55. Si dimostri che due L-strutture isomorfe sono elementarmente equivalenti (ovvero verificano gli stessi L-enunciati).

56. Si mostri che $\mathbb{Z}$ non è elementarmente equivalente a $\mathbb{Z}[x]$.

57. Si dimostrino i teoremi di Löwenheim - Skolem verso l'alto e verso il basso.

58. Siano M un modello di una teoria T e sia N una sottostruttura di M. Possiamo concludere che N è un modello di T? Fare degli esempi.

59. Si discuta la completezza delle teorie κ-categoriche.

60. Discutere i rapporti tra completezza, decidibilità, e ricorsiva assiomatizzabilità di una teoria del primo ordine T. Si diano esempi.

61. Si dimostrino i vari risultati (inclusi gli esercizi) menzionati nella sezione degli appunti relativi alle intepretazioni di teorie e di strutture.

62. Si dimostri il teorema di Church sulla indecidibilità del calcolo dei predicati (sia nel linguaggio di Q sia in quello di ZF).

63. Si dimostri la indecidibilità di ZF.

64. Si dimostri l'incompletezza di ZF.

65. Si dimostri che ZF non ha estensioni complete decidibili.

Altre domande relative ad argomenti che quest'anno non abbiamo trattato, ma a cui si potrebbe rispondere leggendo gli appunti (non ve le chiederò all'esame, a meno che non me lo chiediate voi stessi).

1. Si definisca il concetto di sottostruttura elementare e si discutano alcuni esempi.

2. Si mostri che esistono esempi di sottostrutture elementarmente equivalenti ma che non sono sottostrutture elementari.

3. Si dimostri che $(V_{\omega+\omega}, \in)$ ha una sottostruttura elementare $M \subseteq V_{\omega+\omega}$ numerabile. Tale sottostruttura è necessariamente transitiva? È isomorfa ad una sottostruttura transitiva?

4. Si dimostri che la teoria degli ordini densi senza estremi è completa.

5. Si dimostri che la teoria degli ordini densi (senza alcuna ipotesi sull'esistenza o meno del massimo o del minimo) ha esattamente 4 estensioni complete.

6. Si dimostri che la teoria del grafo random è completa.

7. Si dimostri che l'insieme degli indici delle funzioni calcolabili totali non è semidecidibile.

8. Si dimostri il secondo teorema del punto fisso.