

Corso di teoria dei modelli

Alessandro Berarducci

Gargnano, 4-9 Settembre 2006

Indice

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introduzione | 2 |
| 2 | Linguaggi del primo ordine | 2 |
| 2.1 | Linguaggi e strutture | 2 |
| 2.2 | Morfismi | 3 |
| 2.3 | Termini e loro interpretazione in una struttura | 5 |
| 2.4 | Formule e loro interpretazione in una struttura | 6 |
| 3 | Teorie e modelli | 9 |
| 3.1 | Conseguenze logiche di una teoria | 9 |
| 3.2 | Teorie deduttivamente chiuse | 10 |
| 3.3 | Teorie complete | 10 |
| 3.4 | Espansioni del linguaggio | 11 |
| 3.5 | Esercizi | 12 |
| 4 | Compattezza | 13 |
| 4.1 | Insiemi di Hintikka | 13 |
| 4.2 | Teorema di compattezza | 15 |
| 4.3 | Esercizi | 17 |
| 5 | Teoremi di Löweinheim - Skolem | 17 |
| 5.1 | Lowenheim-Skolem verso l'alto | 17 |
| 5.2 | Lowenheim-Skolem verso il basso | 19 |
| 5.3 | Completezza delle teorie κ -categoriche | 20 |
| 5.4 | Esercizi | 20 |
| 6 | Va e vieni in modelli numerabili | 20 |
| 6.1 | Isomorfismi parziali ed ω -categoricità | 20 |
| 6.2 | Esempi ed esercizi | 21 |
| 7 | Tipi | 22 |
| 7.1 | Tipi di una teoria | 22 |
| 7.2 | Esercizi | 23 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 8 | Eliminazione dei quantificatori | 23 |
| 8.1 | Tipi senza quantificatori | 24 |
| 8.2 | Applicazioni della tecnica del va e vieni | 24 |
| 8.3 | Esempi ed esercizi | 25 |
| 9 | Saturazione | 25 |
| 9.1 | Catene elementari | 25 |
| 9.2 | Modelli ω -saturi | 26 |
| 9.3 | Va e vieni in modelli ω -saturi | 27 |
| 9.4 | Esempi ed esercizi | 27 |

1 Introduzione

Scopo del corso è di fornire una introduzione ad alcune tecniche di base della teoria dei modelli (compattezza, diagrammi, tecnica del va-e-vieni, tipi, catene, modelli ω -saturi). Queste tecniche saranno applicate per dimostrare la completezza di alcune teorie, o la eliminazione dei quantificatori. Dato il pubblico eterogeneo e il tempo limitato a disposizione, ho cercato di mantenere i prerequisiti matematici al minimo, ma per far ciò ho dovuto omettere applicazioni interessanti alla teoria dei campi, a cui accenno solo negli esercizi.

Assumiamo noti i concetti insiemistici fondamentali, le tavole di verità dei connettivi booleani $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$ e il significato intuitivo dei quantificatori \forall, \exists secondo la logica classica. Un buon test per il possesso di questi prerequisiti è il seguente.

Esercizio 1.1. Stabilire se l'enunciato

$$\exists x \in M (P(x) \rightarrow \forall y \in M P(y))$$

sia sempre vero per ogni insieme M e per ogni predicato unario P su M .

2 Linguaggi del primo ordine

2.1 Linguaggi e strutture

Definizione 2.1. La *segnatura* di un linguaggio del primo ordine è un insieme L di simboli (possibilmente anche vuoto) divisi in tre categorie, simboli di costante, simboli di funzione, e simboli di relazione, dove ad ogni simbolo è associato un numero naturale detto “arietà” del simbolo (che servirà ad indicare il numero degli argomenti a cui va applicato il simbolo)¹. L’arietà di ogni simbolo di costante è zero, mentre le arietà dei simboli di funzione e di relazione sono arbitrari interi positivi. Alternativamente possiamo non distinguere tra simboli di funzione e costante e considerare i simboli di costante come simboli di funzione di arietà zero.

¹Una possibile formalizzazione in termini insiemistici è la seguente: un simbolo è una terna ordinata (a, i, n) dove a è il nome del simbolo, $i \in \{1, 2, 3\}$ indica se si tratti di un simbolo di costante, funzione o relazione, n è l’arietà.

Definizione 2.2. Sia L una segnatura. Una L -struttura M consiste di:

1. Un insieme non vuoto $dom(M)$ detto *dominio* (oppure *universo*) della struttura.
2. Una corrispondenza² $c \mapsto c_M$ che associa ad ogni simbolo di costante c di L un elemento $c_M \in dom(M)$, detto interpretazione del simbolo c in M .
3. Una corrispondenza $f \mapsto f_M$ che associa ad ogni simbolo di funzione f di L di arietà n , una funzione $f_M: dom(M)^n \rightarrow dom(M)$, detta interpretazione del simbolo f in M .
4. Una corrispondenza $R \mapsto R_M$ che associa ad ogni simbolo di relazione R di L di arietà n , una relazione $R_M \subseteq dom(M)^n$, detta interpretazione del simbolo R in M .

Esempio 2.3. Un grafo $G = (V_G, E_G)$ è dato da un insieme non vuoto V_G di *vertici* dotato di una relazione binaria E_G . Esso può essere visto come una L -struttura (con dominio V_G) nella segnatura $L = \{E\}$, dove E è un simbolo di relazione binaria.

Quando non ci sia rischio di confusione useremo la stessa notazione per indicare sia la struttura che il suo dominio (ad esempio scriveremo $G = (G, E_G)$, dove G indica sia il grafo che l'insieme dei suoi vertici).

Esempio 2.4. Un anello ordinato $M = (M, 0_M, 1_M, +_M, \cdot_M, <_M)$ è un struttura nella segnatura $L = \{0, 1, +, \cdot, <\}$, dove $0, 1$ sono simboli di costante, $+, \cdot$ sono simboli di funzioni binarie, $<$ è un simbolo di relazione binaria, e i simboli $0, 1, +, \cdot, <$ sono interpretati in modo da soddisfare gli assiomi degli anelli ordinati.

Per semplicità talvolta ometteremo i sottoindici e useremo la stessa notazione per i simboli e la loro interpretazione. Ad esempio l'anello degli interi viene in genere indicato con $(\mathbb{Z}, 0, 1, +, \cdot)$.

Esercizio 2.5. Un multigrafo è un insieme V di *vertici* dove ogni coppia di vertici $\{a, b\}$ può essere connessa da zero, uno o più *archi*. Si trovi un modo di descrivere i multigrafi come L -strutture in una opportuna segnatura L .

2.2 Morfismi

Definizione 2.6. Un *isomorfismo* $\phi: A \rightarrow B$ tra due L -strutture A e B è dato da una mappa iniettiva e suriettiva $\phi: dom(A) \rightarrow dom(B)$ che preserva le costanti le funzioni e le relazioni di L . Più precisamente:

1. se c è un simbolo di costante, allora $\phi(c_A) = c_B$;

²Usiamo la parola 'corrispondenza' come sinonimo di 'funzione'.

2. se f è un simbolo di funzione di arietà n e $a_1, \dots, a_n, a \in \text{dom}(A)$, allora $f_A(a_1, \dots, a_n) = a$ se e solo se $f_B(\phi(a_1), \dots, \phi(a_n)) = \phi(a)$. Equivalentemente: $\phi(f_A(a_1, \dots, a_n)) = f_B(\phi(a_1), \dots, \phi(a_n))$.
3. se R è un simbolo di relazione di arietà n e $a_1, \dots, a_n \in \text{dom}(A)$, allora $(a_1, \dots, a_n) \in R_A$ se e solo se $(\phi(a_1), \dots, \phi(a_n)) \in R_B$.

Esempio 2.7. Sia L una segnatura con un simbolo di relazione binario f . Sia $(\mathbb{R}; +)$ la L -struttura avente come dominio i numeri reali e in cui f è interpretato come la funzione somma, e sia $(\mathbb{R}^{>0}, \cdot)$ la L -struttura avente come dominio i numeri reali positivi e in cui f è interpretato come la funzione prodotto. Allora la funzione esponenziale $x \mapsto e^x$ è un isomorfismo da $(\mathbb{R}, +)$ a $(\mathbb{R}^{>0}, \cdot)$.

Esercizio 2.8. Trovare un isomorfismo tra il gruppo additivo $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +, 0)$ degli interi modulo 6 e il gruppo moltiplicativo $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*, \cdot, 1)$ degli interi diversi da zero modulo 7 (entrambi considerati come strutture in una segnatura con un simbolo di operazione binaria per l'operazione grupale e un simbolo di costante per l'elemento neutro).

Definizione 2.9. Il concetto di *immersione* si ottiene da quello di isomorfismo rinunciando alla richiesta che ϕ sia suriettiva. Una immersione è dunque un isomorfismo verso la sua immagine.

Definizione 2.10. Date due L -strutture A e B diciamo che A è una *sottostruttura* di B se $\text{dom}(A) \subseteq \text{dom}(B)$ e la funzione di inclusione $i: \text{dom}(A) \rightarrow \text{dom}(B)$ è una immersione. Ciò significa che i simboli di costante sono interpretati nello stesso modo in A e in B , e i simboli di funzione e relazione sono interpretati in A come la restrizione agli elementi di A delle funzioni e relazioni che interpretano gli stessi simboli in B . Ad esempio l'anello degli interi $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, 0, 1, +, -, \cdot)$ è una sottostruttura dell'anello dei reali $(\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot)$. Per indicare che A è una sottostruttura di B scriviamo $A \subseteq B$.

Il concetto di omomorfismo si ottiene indebolendo il concetto di isomorfismo come segue.

Definizione 2.11. Un *omomorfismo* $\phi: A \rightarrow B$ tra due L -strutture A e B è dato da una mappa $\phi: \text{dom}(A) \rightarrow \text{dom}(B)$ tale che:

1. se c è un simbolo di costante, allora $\phi(c_A) = c_B$;
2. se f è un simbolo di funzione di arietà n e $a_1, \dots, a_n \in \text{dom}(A)$, allora $\phi(f_A(a_1, \dots, a_n)) = f_B(\phi(a_1), \dots, \phi(a_n))$;
3. se R è un simbolo di relazione di arietà n , $a_1, \dots, a_n \in \text{dom}(A)$, e $(a_1, \dots, a_n) \in R_A$, allora $(\phi(a_1), \dots, \phi(a_n)) \in R_B$.

Si osservi che un isomorfismo è un morfismo biunivoco la cui funzione inversa è essa stessa un morfismo.

Esempio 2.12. Sia \mathbb{Z} l'anello degli interi e sia $\mathbb{Z}/(n)$ l'anello degli interi modulo n (entrambi considerati come strutture nella segnatura $L = \{0, 1, +, -, \cdot\}$). La funzione che manda un intero x nella sua classe resto modulo n costituisce un omomorfismo da \mathbb{Z} a $\mathbb{Z}/(n)$ che non è nè un isomorfismo né una immersione.

Esempio 2.13. Un morfismo tra due ordini totali $(A, <_A)$ e $(B, <_B)$ è una funzione crescente: $a_1 < a_2$ implica $f(a_1) < f(a_2)$. Per un isomorfismo vale la doppia implicazione.

Osservazione 2.14. Osserviamo che in strutture relazionali (ovvero in una segnatura senza simboli di funzione e costante) ogni sottoinsieme non vuoto determina una sottostruttura (ad esempio un sottoinsieme di un ordine lineare è un ordine lineare con l'ordine indotto), mentre per strutture con funzioni o costanti questo in genere non accade.

Affinché un sottoinsieme non vuoto $X \subset \text{dom}(B)$ del dominio di una struttura B determini una sottostruttura di B occorre (e basta) che X contenga l'interpretazione dei simboli di costante della segnatura (se ve ne sono) e che sia chiuso rispetto alla interpretazione dei simboli di funzione. Se questa condizione è verificata c'è un'unica sottostruttura di B avente X come dominio, e possiamo quindi per abuso di linguaggio identificare il sottoinsieme con la sottostruttura.

Osservazione 2.15. Il concetto di sottostruttura, così come quello di morfismo, dipende in modo essenziale dalla scelta della segnatura. Ad esempio $(\mathbb{N}, +, 0)$ è una sottostruttura di $(\mathbb{Z}, +, 0)$ ma non è un sottogruppo nel senso usuale dell'algebra (non è chiuso rispetto alla funzione sottrazione). Per fare in modo che le sottostrutture dei gruppi siano gruppi, dobbiamo mettere nella segnatura anche un simbolo per l'inversa della operazione grupale.

Consideriamo ora la segnatura $L = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$ degli anelli. Ogni sottostruttura A di un anello B è essa stessa un anello. Tuttavia se A è un campo, non è detto che B sia un campo. Per esserlo deve essere chiuso per la funzione $1/x$. Si noti che non possiamo mettere nella segnatura un simbolo per la funzione $1/x$ perché tale funzione è indefinita per $x = 0$ e nella segnatura ammettiamo solamente simboli per funzioni definite sull'intero dominio della struttura (ovviamente si potrebbe convenire che $1/0 = 0$, ma ciò sarebbe in contrasto con l'uso comune).

2.3 Termini e loro interpretazione in una struttura

Per definire l'insieme dei termini (e delle formule), oltre ai simboli della segnatura L , dobbiamo fissare un insieme infinito di simboli V chiamati *variabili*.

Definizione 2.16. Definiamo induttivamente l'insieme $\text{Ter}_L(V)$ degli *L-termini* (con variabili da V) come il più piccolo insieme di espressioni tale che:

1. Ogni variabile $x \in V$ è un *L-termine*;
2. ogni simbolo di costante di L è un *L-termine*;

3. se t_1, \dots, t_n sono L -termini, e f è un simbolo di funzione di arietà n della segnatura L , allora $f(t_1, \dots, t_n)$ è un L -termine.

Un termine in cui non occorrono variabili viene detto *termine chiuso*.

Si noti che se la segnatura L non contiene simboli di costante, allora non ci sono L -termini chiusi, e se la segnatura non contiene nè simboli di costante nè simboli di funzione allora gli unici L -termini sono le variabili. Osserviamo che i simboli di relazione della segnatura non contribuiscono alla formazione dei termini.

Esempio 2.17. Consideriamo la segnatura $L = \{0, 1, +, \cdot, \leq\}$, dove $0, 1$ sono simboli di costante, $+, \cdot$ sono simboli per funzioni binarie, \leq è un simbolo di relazione binario. Esempi di L -termini sono $0, 0 + 1, z \cdot ((x + y) + 1)$, dove x, y, z sono variabili e per semplicità abbiamo usato la notazione infissa xfy anzichè $f(x, y)$ quando f è un simbolo di funzione binaria (cioè quando f è \cdot o $+$).

Definizione 2.18. Data una L -struttura M , un *termine con parametri da M* è una coppia (t, v) , che indicheremo anche $t(v)$, costituita da un L -termine t e da una funzione v - detta valutazione - che assegna ad alcune variabili degli elementi di M . Se $\{x_1, \dots, x_n\}$ è un insieme finito di variabili distinte, e v è la valutazione che assegna alla variabile x_i il valore $a_i \in M$, scriveremo $t(a_1/x_1, \dots, a_n/x_n)$ per $t(v)$. Qualora sia chiaro dal contesto a quali variabili x_1, \dots, x_n ci si riferisca, scriveremo $t(a_1, \dots, a_n)$ invece di $t(a_1/x_1, \dots, a_n/x_n)$.

Un termine con parametri $t(a_1/x_1, \dots, a_n/x_n)$ viene detto chiuso se l'insieme delle variabili occorrenti in t è incluso in $\{x_1, \dots, x_n\}$. Per indicare che t è un L -termine le cui variabili sono incluse in $\{x_1, \dots, x_n\}$ talvolta scriveremo $t(x_1, \dots, x_n)$ invece di t .

Esempio 2.19. Sia $L = \{0, 1, +, \cdot\}$ e sia \mathbb{R} la L -struttura dei numeri reali. L'espressione $(x + y) + 1$ è un L -termine (senza parametri). La coppia costituita da t e dalla funzione che assegna alla variabile x il valore $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ è un L -termine con parametri (che per semplicità denoteremo $(\sqrt{2} + y) + 1$).

Definizione 2.20. (Interpretazione dei termini) Sia t un L -termine e sia v una valutazione il cui dominio include le variabili di t . Definiamo induttivamente $M(t(v)) \in \text{dom}(M)$ nel modo seguente:

1. Se x è una variabile e v è una valutazione che associa a x il valore $a \in M$, allora $M(x(v)) = a$;
2. Se c è un simbolo di costante di L , allora $M(c(v)) = c_M$;
3. Se t è della forma $f(t_1, \dots, t_n)$, allora $M(t(v)) = f_M(M(t_1(v)), \dots, M(t_n(v)))$.

2.4 Formule e loro interpretazione in una struttura

Passiamo ora a definire l'insieme delle L -formule. Oltre ai simboli fino ad ora introdotti faremo uso dei simboli $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ per i connettivi booleani, i simboli \exists e \forall per i quantificatori esistenziale e universale, il simbolo $=$ per l'uguaglianza, e le parentesi.

Definizione 2.21. L'insieme delle L -formule è definito induttivamente come il più piccolo insieme di espressioni tale che:

1. Se R è un simbolo di relazione di L di arietà n e t_1, \dots, t_n sono degli L -termini, allora $R(t_1, \dots, t_n)$ è una L -formula.
2. Se α e β sono L -formule, allora $(\neg\alpha)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$ sono L -formule.
3. Se α è una L -formula e x è una variabile, allora $(\forall x\alpha)$ e $(\exists x\alpha)$ sono L -formule.
4. Per ogni coppia di termini s, t , l'espressione $(s = t)$ è una L -formula.

Si una distinguere tra linguaggi con uguaglianza e senza uguaglianza. Per questi ultimi la clausola 4. viene omessa.

Osservazione 2.22. Nel dare esempi di L -formule ometteremo le parentesi ridondanti quando non sussista ambiguità di lettura, ovvero qualora esista un unico modo di aggiungere le parentesi mancanti in modo da ottenere una L -formula. Ad esempio la formula $((x = x) \wedge (x = y)) \vee (y = z)$ può essere scritta in forma abbreviata come $(x = x \wedge x = y) \vee y = z$. Per un ulteriore risparmio di parentesi stabiliamo la convenzione che in assenza di parentesi \wedge e \vee legano maggiormente di \rightarrow e \neg lega maggiormente di \wedge e \vee , quindi ad esempio $\neg\alpha \wedge \beta \rightarrow \gamma$ significa $((\neg\alpha) \wedge \beta) \rightarrow \gamma$. Conveniamo inoltre che un quantificatore seguito da più variabili stia ad indicare la ripetizione del quantificatore su ciascuna variabile. Ad esempio $\forall xy\phi$ sta per $(\forall x(\forall y\phi))$. Resta inteso che queste sono solo abbreviazioni informali e la definizione di L -formula resta quella sopra data.

Esempio 2.23. Sia $L = \{0, 1, +, \cdot, \leq\}$. La seguente espressione è una L -formula (con parentesi ridondanti omesse):

$$\forall x(\neg(x = 0) \rightarrow \exists y(y \cdot x = 1))$$

Definizione 2.24. Le *sottoformule* di una formula ϕ sono per definizione quelle formule che intervengono nella formazione induttiva di ϕ (inclusa la ϕ stessa).

Definizione 2.25. Un'occorrenza di una variabile x in una formula α si dice *legata* se occorre in una sottoformula β di α immediatamente preceduta da un quantificatore $\forall x$ o $\exists x$. Un'occorrenza non legata si dice *libera*. Le *variabili libere di una formula* sono le variabili che hanno almeno una occorrenza libera nella formula. Una formula senza variabili libere viene detta *formula chiusa* o *enunciato*.

Esempio 2.26. Ad esempio le variabili libere di $x = y \wedge \forall u \exists x(x = u)$ sono la x e la y (sebbene la x abbia anche una occorrenza legata).

Definizione 2.27. Data una L -struttura M , una *formula con parametri da M* è una coppia (ϕ, v) , che indicheremo anche $\phi(v)$, costituita da una L -formula

ϕ e da una funzione v - detta valutazione - che assegna ad alcune variabili degli elementi di M . Se $\{x_1, \dots, x_n\}$ è un insieme finito di variabili distinte, e v è la valutazione che assegna alla variabile x_i il valore $a_i \in M$, scriveremo $\phi(a_1/x_1, \dots, a_n/x_n)$ per $\phi(v)$. Qualora sia chiaro dal contesto a quali variabili x_1, \dots, x_n ci si riferisca, scriveremo $\phi(a_1, \dots, a_n)$ invece di $\phi(a_1/x_1, \dots, a_n/x_n)$.

La formula con parametri $\phi(a_1/x_1, \dots, a_n/x_n)$ viene detta *formula chiusa* o *enunciato* se le variabili libere di ϕ sono incluse in $\{x_1, \dots, x_n\}$, ovvero se ogni variabile libera è stata valutata.

Per indicare che ϕ è una formula le cui variabili libere sono incluse in $\{x_1, \dots, x_n\}$ talvolta scriveremo $\phi(x_1, \dots, x_n)$ invece di ϕ .

Esempio 2.28. Sia $L = \{<\}$ e sia $\phi(y, z)$ la L -formula $\exists x(y < x \wedge x < z)$. Allora $\phi(2/y, 4/z)$ è una L -formula con parametri da \mathbb{Z} (considerata come L -struttura). Informalmente possiamo scrivere tale formula nella forma $\exists x(2 < x \wedge x < 4)$. Ciò a rigore comporta una perdita di informazione (il fatto che ϕ contiene le variabili y e z), ma si tratta di informazioni semanticamente irrilevanti, come si può verificare dopo aver definito l'interpretazione delle formule con parametri.

Definizione 2.29. (Interpretazione delle formule chiuse con parametri) Sia M una L -struttura, e sia $\phi(v)$ una L -formula chiusa con parametri da M . Diciamo che $\phi(v)$ è vera in M , e scriviamo $M \models \phi(v)$, se ciò segue dalle seguenti clausole induttive. L'induzione viene fatta sul numero dei connettivi della formula.

1. $M \models (\forall x\phi)(v)$ se e solo se per ogni $a \in \text{dom}(M)$, $M \models \phi(a/x, v)$;
(Indichiamo con $(a/x, v)$ la valutazione che coincide con v sulle variabili diverse da x ed assegna ad x il valore a .)
2. $M \models (\exists x\phi)(v)$ se esiste $a \in \text{dom}(M)$ tale che $M \models \phi(a/x, v)$;
3. $M \models \neg\phi(v)$ se e solo se $M \not\models \phi(v)$ (cioè non vale $M \models \phi(v)$);
4. $M \models (\phi \wedge \psi)(v)$ se e solo se $M \models \phi(v)$ e $M \models \psi(v)$;
5. $M \models (\phi \vee \psi)(v)$ se e solo se $M \models \phi(v)$ o $M \models \psi(v)$;
6. $M \models (\phi \rightarrow \psi)(v)$ se e solo se $M \models \psi(v)$ o $M \not\models \phi(v)$.

Per la base dell'induzione dobbiamo considerare il caso delle *formule atomiche* (cioè senza connettivi). Aggiungiamo a tal fine le seguenti clausole, dove R è un simbolo di predicato di L di arietà n , e i vari t_i sono L -termini chiusi con parametri da M .

7. $M \models R(t_1, \dots, t_n)$ se e solo se $(M(t_1), \dots, M(t_n)) \in R_M$;
8. $M \models t_1 = t_2$ se e solo se $M(t_1)$ e $M(t_2)$ sono lo stesso elemento.

Esercizio 2.30. Se M è una L -struttura, e $\phi(v)$ è una L -formula chiusa con parametri da M , allora il valore di verità di $\phi(v)$ in M dipende solo dalla restrizione di v alle variabili libere di ϕ . In altre parole se v e v' coincidono sulle variabili libere di ϕ , allora $M \models \phi(v)$ sse $M \models \phi(v')$.

Definizione 2.31. Se ϕ è un L -enunciato diciamo che ϕ è vero in M , e scriviamo $M \models \phi$, se $M \models \phi(v)$ per ogni v (o equivalentemente per qualche v).

Definizione 2.32. Sia M una L -struttura. Un sottoinsieme A di M^n è θ -definibile se esiste una L -formula $\phi(x_1, \dots, x_n)$ tale che A è l'insieme delle n -uple \vec{a} da M tali che $M \models \phi(\vec{a})$. Diciamo che A è *definibile* se esiste una L -formula $\phi(x_1, \dots, x_n)$ con parametri da M tale che A è l'insieme delle n -uple \vec{a} da M tali che $M \models \phi(\vec{a})$.

3 Teorie e modelli

3.1 Conseguenze logiche di una teoria

Definizione 3.1. Una *teoria* T è una coppia consistente di una segnatura L e di un insieme di L -enunciati chiamati *assiomi di* T .

Definizione 3.2. La teoria dei gruppi ha come assiomi le formule $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$, $x \cdot 1 = x$, $1 \cdot x = x$, $x \cdot x^{-1} = 1$, $x^{-1} \cdot x = 1$, implicitamente precedute da $\forall xyz$, e formulate in una segnatura con un simbolo di costante 1 per l'elemento neutro, un simbolo di funzione binaria \cdot per l'operazione di gruppo, e un simbolo per la funzione $x \mapsto x^{-1}$.

Definizione 3.3. Un *modello* di una L -teoria T è una L -struttura in cui risultano veri tutti gli assiomi di T . (Ad esempio un gruppo è, per definizione, un modello della teoria dei gruppi.) Se M è un modello di T scriviamo $M \models T$. Quindi $M \models T$ se per ogni assioma ϕ di T , si ha $M \models \phi$. Indichiamo con $Mod(T)$ la classe di tutti i modelli di T . Una L -teoria T si dice *coerente*, o *soddisfacibile*, se ha almeno un modello.

Definizione 3.4. (Conseguenza logica) Sia ϕ una L -formula chiusa e T una L -teoria. Diciamo che ϕ *segue logicamente* da T , e scriviamo $T \models \phi$, se ϕ è vera in tutti i modelli di T , ovvero non esiste alcuna L -struttura che rende veri tutti gli assiomi di T e non rende vera ϕ . In altre parole:

$$T \models \phi \text{ se e solo se } Mod(T) \subseteq Mod(\phi).$$

In particolare se T è *insoddisfacibile*, cioè se $Mod(T) = \emptyset$, allora vale sempre $T \models \phi$.

Definizione 3.5. (Formule logicamente valide) Sia L una data segnatura e sia ϕ una L -formula. Diciamo che ϕ è logicamente valida, e scriviamo $\models \phi$, se ϕ è valida in ogni L -struttura. Osserviamo che se T è la L -teoria con un insieme vuoto di assiomi, allora ogni L -struttura è modello di T , e pertanto si ha $\models \phi$ se e solo se $T \models \phi$.

Esercizio 3.6. Sia L la segnatura con un simbolo di funzione binario f . La L -formula

$$\forall xyz(f(f(x, y), z) = y) \rightarrow \forall xy(x = y)$$

è logicamente valida.

Definizione 3.7. (Teorie equivalenti) Due L -teorie T_1 e T_2 si dicono equivalenti se hanno le stesse conseguenze: $\{\phi \mid T_1 \models \phi\} = \{\phi \mid T_2 \models \phi\}$. È facile vedere che due teorie sono equivalenti se e solo se hanno gli stessi modelli.

Osservazione 3.8. Sia T una L -teoria e siano α e β due L -formule chiuse. Allora $T \models \alpha \rightarrow \beta$ se e solo se $T, \alpha \models \beta$, dove con la notazione “ T, α ” abbiamo indicato la L -teoria che ha come assiomi la formula α e tutti gli assiomi di T .

Osservazione 3.9. $T \models \phi$ se e solo se $T, \neg\phi$ è insoddisfacibile.

3.2 Teorie deduttivamente chiuse

Definizione 3.10. Una L -teoria T si dice *deduttivamente chiusa* (da un punto di vista semantico) se l'insieme $\{\phi \mid T \models \phi\}$ delle sue conseguenze, coincide con l'insieme dei suoi assiomi.

Per una teoria deduttivamente chiusa abbiamo dunque $\phi \in T$ se e solo se $T \models \phi$ (dove per $\phi \in T$ intendiamo che ϕ è un assioma di T).

Esercizio 3.11. Ogni teoria T è equivalente ad una teoria T' deduttivamente chiusa: basta prendere come insieme di assiomi per T' l'insieme $\{\phi \mid T \models \phi\}$.

Da una teoria T possiamo ottenere una classe di L -strutture prendendo la classe $Mod(T)$ dei suoi modelli. Vicversa partendo da una classe di L -strutture, si può ottenere una L -teoria nel modo seguente.

Definizione 3.12. Data una classe K di L -strutture indichiamo con $Th(K)$ la L -teoria che ha come assiomi gli enunciati che sono veri in ogni struttura $\mathcal{A} \in K$.

Esercizio 3.13. La teoria $Th(K)$ sopra definita è deduttivamente chiusa. Inoltre ogni teoria deduttivamente chiusa T è della forma $Th(K)$ per una opportuna classe K di L -strutture: si prenda $K = Mod(T)$ e si osservi che $Th(Mod(T)) = \{\phi \mid T \models \phi\}$.

Definizione 3.14. Sia K una classe di L -strutture. Diciamo che K è una classe elementare se per qualche L -teoria T si ha $K = Mod(T)$. Ad esempio la classe dei gruppi è elementare.

Esercizio 3.15. L'operazione $T \mapsto Mod(T)$ porta da teorie a classi elementari di strutture, mentre $K \mapsto Th(K)$ porta da classi di strutture a teorie deduttivamente chiuse. Per una teoria deduttivamente chiusa T abbiamo $T = Th(Mod(T))$ (mentre per T arbitraria in generale vale solo l'inclusione “ \subseteq ”) e per una classe elementare di strutture K abbiamo $K = Mod(Th(K))$ (mentre per K arbitraria in generale vale solo l'inclusione “ \subseteq ”).

3.3 Teorie complete

Definizione 3.16. Una L -teoria T è *completa* se è coerente e per ogni L -formula chiusa ϕ , si ha $T \models \phi$ o $T \models \neg\phi$.

Esempio 3.17. La teoria T dei gruppi non è completa. Sia infatti ϕ l'enunciato $\forall x, y(x \cdot y = y \cdot x)$, che esprime la legge commutativa. Poiché esistono sia gruppi commutativi che non commutativi, non si ha nè $T \models \phi$ nè $T \models \neg\phi$.

Un esempio di gruppo non commutativo è il gruppo delle matrici 2×2 , dove 1 è interpretato come la funzione identità, e \cdot come la moltiplicazione riga per colonne di matrici. Un esempio di gruppo commutativo è il gruppo additivo dei numeri interi, dove il simbolo \cdot viene interpretato come la somma, e il simbolo 1 come lo zero (siamo liberi di farlo!).

Definizione 3.18. Data una L -struttura M sia $Th(M)$ la teoria che ha come assiomi tutti gli L -enunciati veri in M . Allora $Th(M)$ è una L -teoria completa chiamata *teoria completa della struttura M* .

Esercizio 3.19. Una teoria coerente T è completa se e solo se, comunque si prenda un suo modello M , si ha che $Th(M)$ equivale a T .

Esercizio 3.20. Una L -teoria T è completa se e solo se per ogni coppia di L -enunciati α e β si ha: $T \models \alpha \vee \beta$ se e solo se $T \models \alpha$ o $T \models \beta$.

Esercizio 3.21. Sia T una L -teoria soddisfacibile e deduttivamente chiusa. Allora T è completa se e solo se è massimale tra le teorie soddisfacibili, cioè non è possibile ampliare l'insieme dei suoi assiomi in modo da ottenere una L -teoria che continua ad essere soddisfacibile.

Definizione 3.22. Due L -strutture \mathcal{A} e \mathcal{B} si dicono *elementarmente equivalenti*, $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ se e solo se hanno la stessa teoria completa: $Th(\mathcal{A}) = Th(\mathcal{B})$.

In altre parole due strutture \mathcal{A} e \mathcal{B} sono elementarmente equivalenti se e solo se non esiste alcuna proprietà del primo ordine che le distingue, cioè per ogni L -enunciato ϕ , $\mathcal{A} \models \phi$ se e solo se $\mathcal{B} \models \phi$.

Esercizio 3.23. Una L -teoria T è completa sse comunque si prendano due modelli di T essi sono elementarmente equivalenti.

Scriviamo $T' \supset T$ se T e T' sono teorie nella stessa segnatura e gli assiomi di T' includono quelli di T .

Esercizio 3.24. Sia T una L -teoria T e sia ϕ un L -enunciato. Supponiamo che per ogni L -teoria completa $T' \supset T$ si ha $T' \models \phi$. Allora $T \models \phi$.

3.4 Espansioni del linguaggio

Definizione 3.25. Dati due linguaggi L ed $L' \supset L$, diciamo che la L' -struttura A è una *espansione* della L -struttura B (o che B è una *restrizione* di A), se A e B hanno lo stesso dominio e interpretano nello stesso modo i simboli di L .

Ad esempio il gruppo $(\mathbb{R}, +, 0)$ è una restrizione del campo $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$.

Osservazione 3.26. Siano L ed L' due segnature, con $L' \supset L$. Data una L' -struttura M ed un L -enunciato ϕ , possiamo considerare ϕ anche come L' -enunciato e chiederci se è vero in M . È immediato verificare che ϕ è vero in M se e solo se ϕ è vero nella restrizione $M|_L$ di M alla segnatura L .

Ora sia T un insieme di L -enunciati. Se $L' \supset L$ possiamo considerare T sia come l'insieme degli assiomi di una L -teoria che come l'insieme degli assiomi di una L' -teoria. Risulta dalla osservazione precedente che T ha un modello come L -teoria se e solo se lo ha come L' -teoria. Similmente la relazione $T \models \phi$ non cambia se consideriamo T come L -teoria o come L' -teoria (dove ϕ è una L -formula).

Non è quindi necessario essere troppo pignoli sulla segnatura quando ci si chiede se un insieme di enunciati ha un modello, o se da un insieme di enunciati segue logicamente un altro enunciato. Quando la segnatura sia sottointesa o irrilevante identificheremo una teoria con l'insieme dei suoi assiomi.

Lemma 3.27. *Sia T un insieme di L -enunciati, sia $\phi(x)$ una L -formula e sia c un simbolo di costante non in L . Sono equivalenti:*

1. $T \models \phi(c)$ (nella segnatura $L \cup \{c\}$).
2. $T \models \forall x\phi(x)$ (nella segnatura L).

Dimostrazione. Se $T \not\models \forall x\phi(x)$, allora esiste un modello A di T ed un elemento $a \in A$ con $A \models \neg\phi(a)$. La struttura (A, a) che espande A interpretando c con a è allora un modello di $T \cup \{\neg\phi(c)\}$. \square

3.5 Esercizi

Esercizio 3.28. Trovare una assiomatizzazione finita della teoria completa del gruppo delle simmetrie del triangolo.

Esercizio 3.29. Due strutture isomorfe sono elementarmente equivalenti. Se due strutture sono elementarmente equivalenti ed una delle due è finita, allora esse sono isomorfe.

Esercizio 3.30. Sia Γ il seguente insieme di assiomi:

- 1) $\forall x(x + 0 = x)$,
- 2) $\forall xy(x + s(y) = s(x + y))$,
- 3) $\forall xy(s(x) = s(y) \rightarrow x = y)$,
- 4) $\forall x\neg(s(x) = 0)$,
- 5) $\forall x(x \neq 0 \rightarrow \exists y(x = s(y)))$.

Stabilire se:

- a) $\Gamma \models \forall x(x + x = s(0) \rightarrow x \neq 0)$.
- b) $\Gamma \models \neg\exists y[y + y = s(0)]$.
- c) $\Gamma \models \forall xy(x + y = y + x)$.

Esercizio 3.31. Sia $L = (0, s, R, \min)$ dove 0 è un simbolo di costante, s è un simbolo di funzione unaria, R è un simbolo di predicato binario, \min è un simbolo di predicato ternario.

Sia Γ il seguente insieme di L -formule:

$$\forall xy(R(x, y) \rightarrow \min(x, y, x))$$

$$\forall xyz(R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z))$$

$$\forall xR(x, x)$$

$$\forall xR(x, s(x))$$

Nella interpretazione che abbiamo in mente R è la relazione di minore o uguale, ma ci potrebbero essere altre interpretazioni. Trovate l'insieme di tutti i termini chiusi t tali che:

a) $\Gamma \models \min(s0, sss0, t)$.

Trovate l'insieme di tutti i termini chiusi t tali che:

b) $\Gamma \models \min(s0, t, s0)$.

Giustificate la risposta.

4 Compattezza

Nel seguito assumeremo, per semplificare le dimostrazioni, che nelle regole per la formazione delle formule non sia presente il quantificatore universale. Ciò non comporta perdita di generalità in quanto $\forall x\phi$ può essere definito come $\neg\exists x\neg\phi$ (essendo le due formule logicamente equivalenti).

4.1 Insiemi di Hintikka

Definizione 4.1. (Insiemi di Hintikka) Sia T un insieme di L -formule chiuse. Diciamo che T è un insieme di Hintikka (per L) se per ogni scelta di L -formule chiuse ϕ, ψ si ha:

1. se $\phi \in T$, allora $\neg\phi \notin T$,
2. se $\neg\neg\phi \in T$, allora $\phi \in T$,
3. se $\phi \wedge \psi \in T$, allora $\phi \in T$ e $\psi \in T$,
4. se $\neg(\phi \wedge \psi) \in T$, allora $\neg\phi \in T$ o $\neg\psi \in T$,
5. se $\phi \vee \psi \in T$, allora $\phi \in T$ o $\psi \in T$,
6. se $\neg(\phi \vee \psi) \in T$, allora $\neg\phi \in T$ e $\neg\psi \in T$,
7. se $\phi \rightarrow \psi \in T$, allora $\neg\phi \in T$ o $\psi \in T$,
8. se $\neg(\phi \rightarrow \psi) \in T$, allora $\phi \in T$ e $\neg\psi \in T$,
9. se $\exists x\phi(x) \in T$, allora esiste un L -termine chiuso t , tale che $\phi(t) \in T$,
10. se $\neg\exists x\phi(x) \in T$, allora per ogni L -termine chiuso t , $\neg\phi(t) \in T$.

Per linguaggi senza simbolo di uguaglianza $=$ possiamo fermarci qui. Altrimenti dobbiamo aggiungere le seguenti proprietà dell'uguaglianza:

1. (riflessività) per ogni L -termine chiuso t , $t = t \in T$,
2. (sostituibilità) per ogni L -formula $\phi(x)$ e termini chiusi t e t' , se $t = t' \in T$, allora $\phi(t) \in T$ se e solo se $\phi(t') \in T$.

(Nella ultima clausola possiamo anche limitarci a formule atomiche $\phi(x)$.)

Esercizio 4.2. Si consideri un linguaggio senza simbolo di uguaglianza nella segnatura $L = \{R, c\}$, dove R è un simbolo di relazione binario e c è un simbolo di costante. Si trovi un insieme di Hintikka finito contenente la formula $\forall x \exists y (R(x, y) \vee R(y, x))$. Si dimostri che se ampliamo L con l'aggiunta di un simbolo di funzione f , qualsiasi insieme di Hintikka contenente la formula sopra data è infinito.

Osservazione 4.3. L'insieme delle L -formule ha cardinalità $|L| + \omega$ (che è uguale a $|L|$ se $|L|$ è infinito). L'insieme degli L -termini ha cardinalità $\leq |L| + \omega$.

Teorema 4.4. *Ogni insieme di Hintikka T ha un modello M . Inoltre possiamo prendere M in modo tale che ogni elemento del dominio di M è l'interpretazione di un termine chiuso della segnatura L di T . Quindi in particolare $|M| \leq |L| + \omega$.*

Dimostrazione. Per semplicità consideriamo prima il caso di linguaggi senza il simbolo di uguaglianza né simboli di funzione. In questo caso gli unici termini chiusi di L sono le costanti. Prendiamo come $dom(M)$ l'insieme delle costanti di L . Dato un simbolo di relazione R di arietà n , definiamo la sua interpretazione $R^M \subseteq dom(M)^n$ come l'insieme di tutte le n -uple (c_1, \dots, c_k) tali che $R(c_1, \dots, c_n) \in T$. In questo modo abbiamo definito una L -struttura che rende veri tutti gli enunciati atomici in T , e falsi gli enunciati atomici non in T . Sia ora ϕ un arbitrario L -enunciato. Usando le proprietà di Hintikka segue per induzione sul numero dei connettivi di ϕ che se $\phi \in T$, allora $M \models \phi$ (se T è un insieme di Hintikka completo sarà anche vero che se $\phi \notin T$, allora $M \models \neg\phi$).

Consideriamo ad esempio il caso $\neg\phi \in T$. Dalle proprietà di Hintikka segue che $\phi \notin T$. Se ϕ è atomica, concludiamo che $M \models \neg\phi$ per definizione di M . Se invece ϕ non è atomica, allora deve cominciare con un connettivo. Supponiamo ad esempio che tale connettivo sia \vee , cioè $\neg\phi = \neg(\alpha \vee \beta)$. Usando le proprietà di Hintikka abbiamo $\neg\alpha \in T$ e $\neg\beta \in T$. Per induzione possiamo concludere $M \models \neg\alpha$ e $M \models \neg\beta$, da cui poi segue $M \models \neg(\alpha \vee \beta)$.

Lasciamo al lettore la verifica degli altri casi. Questo conclude la dimostrazione nel caso il linguaggio non abbia simboli di funzione e il simbolo di uguaglianza.

Consideriamo ora il caso generale. Ricordiamo che il simbolo di uguaglianza deve essere interpretato come la relazione di uguaglianza, quindi se $t = t' \in T$ dobbiamo fare in modo che t e t' siano interpretati con lo stesso elemento del modello M che vogliamo costruire.

A tal fine prendiamo come $dom(M)$ l'insieme degli L -termini chiusi quozientato rispetto alla relazione di equivalenza \sim definita da $t \sim t'$ sse $t = t' \in T$.

Segue dalle proprietà degli insiemi di Hintikka che \sim è in effetti una relazione di equivalenza. Indichiamo con t/\sim la classe di equivalenza di t rispetto a \sim .

Dato un simbolo di funzione f di L di arietà n definiamo la sua interpretazione $f^M: \text{dom}(M)^n \rightarrow \text{dom}(M)$ ponendo: $f^M(t_1/\sim, \dots, t_n/\sim) = f(t_1, \dots, t_n)/\sim$. Questa definizione è ben posta perchè dalla clausola di sostituibilità nella definizione degli insiemi di Hintikka (applicata ripetute volte) segue che se $t_1 \sim t'_1, \dots, t_n \sim t'_n$ allora $f(t_1, \dots, t_n) \sim f(t'_1, \dots, t'_n)$.

Resta solo da definire l'interpretazione R^M dei simboli di relazione di L (se ve ne sono). Se R ha arietà n e t_1, \dots, t_n sono termini chiusi, poniamo $(t_1/\sim, \dots, t_n/\sim) \in R^M$ sse $R(t_1, \dots, t_n) \in T$. Questo è ben posto per la clausola di sostituibilità. Abbiamo così definito una L -struttura M .

Per induzione sulla lunghezza dei termini chiusi t , segue che $t^M = t/\sim$. Quindi se $t = t' \in T$, allora $t^M = t/\sim = t'/\sim = t'^M$, e quindi $M \models t = t'$ (si noti che per abuso di linguaggio abbiamo usato “=” sia come simbolo che come la vera relazione di uguaglianza). Viceversa se $t = t' \notin T$, allora $t/\sim \neq t'/\sim$ e $M \models t \neq t'$. Quindi M rende veri gli enunciati di T della forma $t = t'$, e falsi gli enunciati della forma $t = t'$ che non sono in T . Similmente si verifica che $R(t_1, \dots, t_n) \in T$ sse $M \models R(t_1, \dots, t_n)$. Quindi tra gli enunciati atomici (senza connettivi) M rende veri tutti e soli quelli che sono in T . Ragionando per induzione sulla complessità della formula, usando le proprietà di Hintikka per i passi induttivi, vediamo che ogni $\phi \in T$ (non necessariamente atomica) è vera M . Consideriamo nel dettaglio il caso in cui ϕ è della forma $\exists x\theta(x)$. Se $\phi \in T$, allora essendo T di Hintikka deve esistere un termine chiuso t tale che $\theta(t) \in T$. Per induzione $\theta(t)$ è vero nel modello M . Ma allora deve essere vero anche $\exists x\theta(x)$. \square

4.2 Teorema di compattezza

Definizione 4.5. Un insieme di L -enunciati si dice *finitamente soddisfacibile* se ogni suo sottoinsieme finito è soddisfacibile.

Lemma 4.6. Sia Σ un insieme soddisfacibile di L -enunciati. Allora per ogni L -enunciato σ , almeno uno dei due insiemi $\Sigma \cup \{\sigma\}$ o $\Sigma \cup \{\neg\sigma\}$ è soddisfacibile. Similmente se rimpiazziamo “soddisfacibile” con “finitamente soddisfacibile”.

Dimostrazione. Sia M un modello di Σ . In M almeno uno degli enunciati σ o $\neg\sigma$ è vero. Quindi almeno uno dei due insiemi $\Sigma \cup \{\sigma\}$ o $\Sigma \cup \{\neg\sigma\}$ è soddisfacibile (avendo come modello lo stesso M). La prima parte è così dimostrata.

Il caso della finita soddisfacibilità si dimostra come segue: supponiamo che nè $\Sigma \cup \{\sigma\}$ nè $\Sigma \cup \{\neg\sigma\}$ sia finitamente soddisfacibile. Esiste allora un sottoinsieme finito Σ' di Σ tale che nè $\Sigma' \cup \{\sigma\}$ nè $\Sigma' \cup \{\neg\sigma\}$ sia soddisfacibile (verificare!). Ma allora neppure Σ' è soddisfacibile. Pertanto Σ non è finitamente soddisfacibile. \square

Lemma 4.7. Sia Σ un insieme di L -enunciati, sia $\phi(x)$ una L -formula nella variabile x e sia c sia un simbolo di costante non occorrente nè in Σ . Allora

$\Sigma \cup \{\phi(c)\}$ è soddisfacibile se e solo se $\Sigma \cup \{\exists x\phi(x)\}$ è soddisfacibile. Similmente se rimpiazziamo “soddisfacibile” con “finitamente soddisfacibile”.

Dimostrazione. Poiché $\phi(c) \rightarrow \exists x\phi(x)$ è logicamente valida, ogni modello di $\phi(c)$ è modello di $\exists x\phi(x)$. L'implicazione inversa $\exists x\phi(x) \rightarrow \phi(c)$ non è logicamente valida (verificare!), tuttavia ogni modello M di $\exists x\phi(x)$ può essere espanso ad un modello M' di $\phi(c)$ interpretando c come un qualsiasi elemento $a \in M$ tale che $M \models \phi(a)$ (l'esistenza di tale a essendo garantita dalla verità di $\exists x\phi(x)$ in M). \square

Lemma 4.8. *Sia Σ un insieme di L -enunciati finitamente soddisfacibile. Allora esiste una segnatura $L' \supset L$ e un insieme di L' -enunciati $\Sigma' \supset \Sigma$ con le seguenti proprietà:*

1. Σ' è finitamente soddisfacibile.
2. Per ogni enunciato σ di L' , esattamente uno degli enunciati σ o $\neg\sigma$ appartiene a Σ' . (Quindi Σ' è un insieme finitamente soddisfacibile massimale di L' -enunciati.)
3. Σ' ha la proprietà di Henkin, ovvero per ogni enunciato della forma $\exists x\phi(x)$ in Σ' , esiste almeno una costante c di L' tale che $\phi(c) \in \Sigma'$.
4. $|L'| + \omega = |L| + \omega$.

Dimostrazione. Per semplicità assumiamo dapprima che il linguaggio sia numerabile. Sia $\{c_i \mid i < \omega\}$ un insieme numerabile di nuovi simboli di costante. Sia L' l'espansione di L tramite questi nuovi simboli. Sia $(\sigma_i \mid i < \omega)$ una enumerazione di tutti gli L' -enunciati. A partire da $\Sigma_0 = \Sigma$ costruiamo, in base ai lemmi 4.6 e 4.7, una successione crescente $\Sigma_0 \subset \Sigma_1 \subset \Sigma_2 \dots$ di insiemi finitamente soddisfacibili di L' -enunciati, ognuno dei quali è ottenuto dal precedente con l'aggiunta di uno o due enunciati nel modo seguente:

1. Se $\Sigma_i \cup \{\sigma_i\}$ è finitamente soddisfacibile allora $\sigma_i \in \Sigma_{i+1}$. Se inoltre σ_i ha la forma $\exists x\phi(x)$ allora $\phi(c_j) \in \Sigma_{i+1}$ per qualche c_j che non occorre nelle formule di $\Sigma_i \cup \{\phi(x)\}$.
2. Se $\Sigma_i \cup \{\sigma_i\}$ non è finitamente soddisfacibile allora $\neg\sigma_i \in \Sigma_{i+1}$.

Sia Σ' l'unione dei Σ_i . Per costruzione Σ' verifica le proprietà richieste.

Il caso in cui L sia di cardinalità $\kappa > \omega$ è analogo. Si aggiunge una successione $(c_i \mid i < \kappa)$ di simboli di costante per formare L' . Si fissa una enumerazione $(\sigma_i \mid i < \kappa)$ delle L' formule, e si definisce una successione crescente $(T_i \mid i < \kappa)$ di teorie come sopra con l'unica differenza che se i è un ordinale limite T_i è definito come l'unione dei precedenti T_j . \square

Lemma 4.9. *Sia Σ' e L' come nel Lemma 4.8. Allora Σ' è di Hintikka.*

Dimostrazione. Verifichiamo ad esempio la clausola del \vee nella definizione di insieme di Hintikka. Supponiamo che $\alpha \vee \beta \in \Sigma'$ ma che per assurdo $\alpha \notin \Sigma'$ e $\beta \notin \Sigma'$. Le negazioni delle due formule appartengono allora Σ' e pertanto l'insieme $\{\neg\alpha, \neg\beta, \alpha \vee \beta\}$ è incluso in Σ' contraddicendone la finita soddisfacibilità. Le altre clausole si dimostrano analogamente. \square

Teorema 4.10. *Sia Σ un insieme di L -enunciati. Σ è soddisfacibile se e solo se Σ è finitamente soddisfacibile.*

Dimostrazione. Per i risultati precedenti Σ è contenuto in un insieme di Hintikka e pertanto ha un modello. \square

Teorema 4.11. *Sia T una L -teoria. Se T è soddisfacibile allora T ha un modello di cardinalità $\leq |L| + \omega$.*

Dimostrazione. Se T è soddisfacibile allora in particolare T è finitamente soddisfacibile. Esiste dunque un insieme di Hintikka $T' \supset T$ in una segnatura $L' \supset L$ con $|L'| + \omega = |L| + \omega$. Per il Teorema 4.4 T' ha un modello della cardinalità richiesta, e quindi anche T lo ha. \square

4.3 Esercizi

Esercizio 4.12. Si mostri che non esiste una L -teoria il cui unico modello, a meno di isomorfismi, sia l'anello degli interi.

Esercizio 4.13. Usare il teorema di compattezza per mostrare che non esiste alcuna formula del primo ordine ϕ nella segnatura $\{\leq\}$ tale che $M \models \phi$ se e solo se M è un buon ordine, dove un buon ordine è un ordine lineare senza successioni decrescenti infinite. In altre parole la classe dei buoni ordini non è una classe elementare.

Esercizio 4.14. Si mostri che la classe dei grafi connessi non è una classe elementare di strutture.

Esercizio 4.15. Usare il teorema di compattezza per dimostrare che se un grafo infinito non è 3-colorabile (ovvero non esiste una funzione dai vertici ad un insieme di 3 colori in modo che nodi adiacenti ricevano colore diverso), allora anche un suo sottografo finito non è 3-colorabile. Suggerimento: si trovi una teoria i cui modelli corrispondono alle colorazioni del grafo.

5 Teoremi di Löwenheim - Skolem

5.1 Lowenheim-Skolem verso l'alto

Teorema 5.1. *Sia T una L -teoria.*

1. *Supponiamo che per ogni intero positivo n esiste un modello M_n di T di cardinalità maggiore di n . Allora T ha un modello infinito.*

2. Supponiamo che T abbia un modello infinito. Allora per ogni cardinale $\kappa \geq |L| + \omega$, T ha un modello di cardinalità κ .

Dimostrazione. Assumiamo che per ogni intero positivo n esista un modello M_n di T di cardinalità maggiore di n . (Questa ipotesi è verificata in particolare se T ha un modello infinito.) Sia $\kappa \geq |L| + \omega$. Mostriamo che T ha un modello di cardinalità κ (ciò dimostra sia il primo che il secondo punto). Sia L' il linguaggio ottenuto da L con l'aggiunta di un insieme C di cardinalità κ di nuovi simboli di costante. Sia T' la L' -teoria i cui assiomi sono quelli di T più tutti gli assiomi della forma $c \neq c'$, dove c, c' sono costanti distinte di C . Dimostriamo innanzitutto che ogni sottoteoria finita S di T' ha un modello. A tal fine osserviamo che S può menzionare solo un insieme finito - diciamo n - delle costanti di C . Scegliamo un modello A di T di cardinalità $\geq n$. Sia A' la L' -struttura che espande A interpretando le n costanti di C menzionate in S con n elementi distinti di A . Tale A' è un modello di S . Per il teorema di compattezza possiamo concludere che T' ha un modello B , che per il teorema 4.11 può essere scelto di cardinalità $\leq \kappa$, ma che d'altra parte deve essere di cardinalità $\geq \kappa$ in quanto dovendo verificare tutti i nuovi assiomi $c \neq c'$ deve interpretare le costanti di C con elementi distinti del dominio. La restrizione di B al linguaggio originale L è una L -struttura di cardinalità κ modello di T . \square

Dimostreremo nel seguito un rafforzamento del secondo punto del teorema.

Definizione 5.2. Un morfismo $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ tra due L -strutture si dice una *immersione elementare* se per ogni n e per ogni L -formula $\phi(x_1, \dots, x_n)$ con variabili libere incluse in $\{x_1, \dots, x_n\}$ e per ogni $a_1, \dots, a_n \in A$, si ha:

$$\mathcal{A} \models \phi(a_1, \dots, a_n), \text{ se e solo se } \mathcal{B} \models \phi(f(a_1), \dots, f(a_n))$$

Una sottostruttura \mathcal{B} di \mathcal{A} si dice *sottostruttura elementare*, e scriviamo $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$, se e solo se la inclusione di \mathcal{A} in \mathcal{B} è una immersione elementare.

Scriviamo $\mathcal{A} \lesssim \mathcal{B}$ se esiste una immersione elementare da \mathcal{A} a \mathcal{B} .

Esempio 5.3. Sia $L = (<)$ e consideriamo la L -struttura costituita dall'insieme ordinato dei numeri interi \mathbb{Z} , e la sua sottostruttura $2\mathbb{Z}$ costituita dai numeri pari. Allora $2\mathbb{Z}$ è elementarmente equivalente a \mathbb{Z} (in quanto è isomorfa), ma non è una sua sottostruttura elementare perchè la formula $\exists x(2 < x \wedge x < 4)$ è vera in \mathbb{Z} ma non in $2\mathbb{Z}$.

Definizione 5.4. Sia M una L -struttura e sia A un sottoinsieme del dominio di M . Sia L_A il linguaggio ottenuto da L con l'aggiunta di nuovi simboli di costante c_a corrispondenti agli elementi a di A . Espandiamo M ad una L_A struttura interpretando c_a con a , e denotiamo $(M, a)_{a \in A}$ la struttura espansa. Osserviamo che per ogni L -formula $\phi(x_1, \dots, x_n)$ e per ogni $a_1, \dots, a_n \in A$ si ha

$$M \models \phi(a_1, \dots, a_n) \text{ se e solo se } (M, a)_{a \in A} \models \phi(c_{a_1}, \dots, c_{a_n}).$$

Indichiamo con $Th((M, a)_{a \in A})$ la teoria completa della struttura $(M, a)_{a \in A}$. In particolare possiamo prendere $A = M$. Il *diagramma elementare* di M è per definizione la L_M -teoria completa

$$ED(M) = Th((M, m)_{m \in M})$$

Lemma 5.5. *Siano M, N L -strutture. Allora M può essere immersa elementarmente in N se e solo se N può essere espansa ad un modello di $ED(M)$. In altre parole $M \lesssim N|_L$ se e solo se $N \models ED(M)$.*

Dimostrazione. Supponiamo che $f: M \rightarrow N$ sia una immersione elementare. Espandiamo N ad una L_M -struttura $N' = (N, f(m))_{m \in M}$ interpretando c_m con $f(m)$. È immediato verificare che $N' \models ED(M)$.

Viceversa se N ammette una espansione N' modello di $ED(M)$, allora la funzione $f: M \rightarrow N$ che manda m nell'interpretazione di c_m in N' è una immersione elementare di M in N . \square

Corollario 5.6. *Sia M una L -struttura e sia T una L_M -teoria. Una condizione necessaria e sufficiente affinché esista $N \succ M$ tale che $N \models T$ è che $ED(M) \cup T$ sia soddisfacibile.*

Teorema 5.7. *(Löweinheim - Skolem verso l'alto) Sia M una L -struttura infinita. Sia κ un cardinale $\geq |L_M| = |M| + |L| + \omega$. Allora M ha una estensione elementare di cardinalità κ .*

Dimostrazione. Per il Teorema 5.1 $ED(M)$ ha un modello N di cardinalità κ . Per il Lemma 5.5 $M \lesssim N|_L$. Rimpiazzando N con una copia isomorfa possiamo assumere $M \prec N|_L$. \square

5.2 Lowenheim-Skolem verso il basso

Lemma 5.8. *(Criterio di Tarski - Vaught) Consideriamo due L -strutture $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Supponiamo che per ogni L -formula della forma $\exists y \phi(y, x_1, \dots, x_n)$ e parametri $a_1, \dots, a_n \in A$, si abbia che se $\mathcal{B} \models \exists y \phi(y, a_1, \dots, a_n)$, allora esiste $a \in A$ tale che $\mathcal{B} \models \phi(a, a_1, \dots, a_n)$. Ne segue che $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$.*

Dimostrazione. Per induzione sul numero dei connettivi della formula $\theta(x_1, \dots, x_k)$ mostriamo che per ogni $a_1, \dots, a_k \in A$, $\mathcal{B} \models \theta(a_1, \dots, a_k)$ se e solo se $\mathcal{A} \models \theta(a_1, \dots, a_k)$.

Se θ è atomica, allora l'equivalenza da dimostrare segue dal fatto che \mathcal{A} è una sottostruttura di \mathcal{B} .

Se l'equivalenza da dimostrare vale per una classe di formule, essa vale anche per tutte le formule che si ottengono da esse usando i connettivi booleani.

L'unico caso interessante è quello di formule della forma $\exists y \phi(y, x_1, \dots, x_n)$ per le quali ragioniamo come segue. Supponiamo che $\mathcal{B} \models \exists y \phi(y, \vec{a})$. Allora per le ipotesi esiste $c \in A$ tale che $\mathcal{B} \models \phi(c, \vec{a})$. Per ipotesi induttiva $\mathcal{A} \models \phi(c, \vec{a})$. Dunque $\mathcal{A} \models \exists y \phi(y, \vec{a})$. L'implicazione inversa è facile. \square

Teorema 5.9. (*Teorema di Lowenheim-Skolem verso il basso*) Sia M una L -struttura di cardinalità κ , sia A un sottoinsieme del dominio di M e sia λ un cardinale tale che $|L| + \omega + |A| \leq \lambda \leq \kappa$. Allora esiste una sottostruttura elementare $N \prec M$ di cardinalità λ il cui dominio include A .

Dimostrazione. Sostituendo A con un insieme più grande se necessario possiamo assumere $|A| = \lambda$. La cardinalità dell'insieme delle L_A formule è λ . Per ogni L_A formula $\phi(x)$ tale che $M \models \exists x\phi(x)$ scegliamo un $b_\phi \in M$ tale che $M \models \phi(b_\phi)$ e sia A_1 l'unione di A e dell'insieme dei b_ϕ al variare di $\phi = \phi(x)$ tra le L_A formule nella variabile x . Costruiamo una successione di insiemi $A \subset A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$ dove ogni A_{i+1} è ottenuto da A_i nello stesso modo in cui A_1 è stato definito a partire da A . Sia $B = \bigcup_{i \in \omega} A_i$ la loro unione. Allora B è un sottoinsieme di M di cardinalità λ e per ogni L_B -formula $\phi(x)$ tale che $M \models \exists x\phi(x)$ esiste $b \in B$ tale che $M \models \phi(b)$ (in quanto i parametri di $\phi(x)$, essendo in numero finito, appartengono a qualche A_i e b può essere scelto in A_{i+1}). È facile vedere che B è il dominio di una sottostruttura di M , e per il Lemma 5.8 B è il dominio di una sottostruttura elementare di M . \square

5.3 Completezza delle teorie κ -categoriche

Definizione 5.10. Sia κ un numero cardinale. Una L -teoria T è κ -categorica se T ha un modello di cardinalità κ e tutti i modelli di T di cardinalità κ sono isomorfi.

Teorema 5.11. Sia T una L -teoria senza modelli finiti. Se $\kappa \geq |L| + \omega$ e T è κ -categorica allora T è completa.

Dimostrazione. Siano M, N modelli di T e siano T_1, T_2 le teorie complete di M, N rispettivamente. Tali teorie sono estensioni complete di T . Per il teorema 5.1 (usando il fatto che M, N sono infiniti) T_1 ha un modello M_1 di cardinalità κ e T_2 ha un modello M_2 di cardinalità κ . In particolare M_1, M_2 sono modelli di T di cardinalità κ quindi sono isomorfi per le ipotesi. Ne segue che $T_1 = T_2$ e $M \equiv N$. Quindi T è completa. \square

5.4 Esercizi

Esercizio 5.12. Si mostri che date due strutture elementarmente equivalenti $A \equiv B$ esiste una struttura C con $A \lesssim C$ e $B \lesssim C$.

6 Va e vieni in modelli numerabili

6.1 Isomorfismi parziali ed ω -categoricità

Definizione 6.1. Date due L -strutture A e B , un isomorfismo parziale finito tra A e B è una coppia (\vec{a}, \vec{b}) dove, per qualche $n \in \mathbb{N}$, $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ è una n -upla di elementi di A , $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$ è una n -upla di elementi di B , e

la funzione $a_i \mapsto b_i$ induce un isomorfismo tra la sottostruttura di A generata dagli a_i e la sottostruttura di B generata dai b_i .

Esempio 6.2. Siano $(A, <_A)$ e $(B, <_B)$ due ordini lineari. Un isomorfismo parziale finito tra A e B è una coppia (\vec{a}, \vec{b}) dove, per qualche $n \in \mathbb{N}$, $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ è una n -upla di elementi di A e $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$ è una n -upla di elementi di B tale che $a_i <_A a_j$ se e solo se $b_i <_B b_j$ e $a_i = a_j$ se e solo se $b_i = b_j$.

Definizione 6.3. Sia I l'insieme degli isomorfismi parziali finiti tra A e B . Diciamo che I gode della proprietà del va e vieni se

1. Se $(\vec{a}, \vec{b}) \in I$ e $c \in A$, allora esiste $d \in B$ tale che $(\vec{a}c, \vec{b}d) \in I$.
2. Se $(\vec{a}, \vec{b}) \in I$ e $d \in B$, allora esiste $c \in A$ tale che $(\vec{a}c, \vec{b}d) \in I$.

Definizione 6.4. Un ordine lineare $(X, <)$ si dice denso se verifica l'assioma $\forall x, y (x < y \rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y))$, e si dice senza estremi se non ha nè massimo nè minimo elemento, ovvero verifica gli assiomi $\forall x \exists y (x < y)$ e $\forall x \exists y (y < x)$.

Esercizio 6.5. Se $(A, <)$ e $(B, <)$ sono ordini lineari densi e senza estremi, allora l'insieme degli isomorfismi parziali finiti tra A e B gode della proprietà del va e vieni.

Teorema 6.6. Se A e B sono due L -strutture numerabili e se l'insieme I degli isomorfismi parziali finiti tra A e B gode della proprietà del va e vieni ed è non vuoto, allora A è isomorfo a B .

Dimostrazione. A partire da un qualsiasi isomorfismo parziale finito (la cui esistenza è assicurata dalle ipotesi), useremo ripetutamente le condizioni di va e vieni per prolungare gli isomorfismi parziali finiti fino ad ottenere un isomorfismo globale tra A e B . Più precisamente fissiamo una enumerazione di A e B , diciamo $A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Definiamo una successione di isomorfismi parziali $((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) \in I$ nel modo seguente. Partiamo da $(a_0, b_0) = (u_0, v_0)$. Supponendo induttivamente di aver definito $((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n))$ procediamo come segue. Se $n = 2k$ è pari scegliamo come a_{n+1} l'elemento u_k e come b_{n+1} un elemento di B tale che $((\vec{a}, u_k), (\vec{b}, b_{n+1})) \in I$. Se $n = 2k + 1$ è dispari scegliamo come b_{n+1} l'elemento v_k e come a_{n+1} un elemento di A tale che $((\vec{a}, a_{n+1}), (\vec{b}, v_k)) \in I$. L'isomorfismo cercato tra A e B manda a_i in b_i per ogni $i \in \mathbb{N}$. \square

Corollario 6.7. Sia T la teoria degli ordini lineari densi e senza estremi. Allora T è ω -categorica (e quindi completa).

6.2 Esempi ed esercizi

Esercizio 6.8. Un atomo in un'algebra di boole è un elemento minimale tra gli elementi strettamente maggiori dello zero dell'algebra. La teoria delle algebre di Boole senza atomi è ω -categorica.

Esercizio 6.9. Un grafo casuale è un insieme V dotato di una relazione binaria simmetrica e antiriflessiva E tale che per ogni coppia (A, B) di sottoinsiemi finiti di V esiste un elemento $v \in V$ tale che $E(a, v)$ per ogni $a \in A$ e $\neg E(b, v)$ per ogni $b \in B$. La teoria dei grafi casuali è ω -categorica.

7 Tipi

7.1 Tipi di una teoria

Lemma 7.1. Sia T una L -teoria sia $n \in \mathbb{N}$ e sia (x_1, \dots, x_n) una n -upla di variabili distinte sia $\Sigma(x_1, \dots, x_n)$ un insieme di L -formule nelle variabili x_1, \dots, x_n . I seguenti enunciati sono equivalenti:

(Nel primo enunciato consideriamo le x_i come simboli di costante.)

1. $T \cup \Sigma(x_1, \dots, x_n)$ è coerente (come $L \cup \{x_1, \dots, x_n\}$ -teoria), ovvero esiste un modello M di T ed elementi a_1, \dots, a_n di M tali che $M \models \Sigma(a_1, \dots, a_n)$ (cioè $M \models \sigma(a_1, \dots, a_n)$ per ogni $\sigma \in \Sigma$).
2. Per ogni congiunzione finita $\sigma(\vec{x})$ di formule di Σ , $T \cup \{\exists \vec{x} \sigma(\vec{x})\}$ è una L -teoria coerente (se T è completa cioè equivale a $T \models \exists \vec{x} \sigma(\vec{x})$).

Dimostrazione. L'equivalenza delle prime due segue immediatamente dalle definizioni, la terza segue per compattezza e dal fatto che $T \cup \exists \vec{x} \sigma(\vec{x})$ è coerente come L -teoria se e solo se $T \cup \{\sigma(\vec{x})\}$ è coerente come $L \cup \{\vec{x}\}$ -teoria. \square

Definizione 7.2. Sia T una L -teoria, sia $n \in \mathbb{N}$ e sia (x_1, \dots, x_n) una n -upla di variabili distinte. Un n -tipo di T è un insieme $\Sigma(x_1, \dots, x_n)$ di L -formule nelle variabili x_1, \dots, x_n tali che $T \cup \Sigma(x_1, \dots, x_n)$ è coerente (ovvero valgono le condizioni equivalenti del lemma precedente).

Definizione 7.3. Un n -tipo completo di T è un n -tipo $p(x_1, \dots, x_n)$ ³ tale che per ogni L -formula $\sigma(x_1, \dots, x_n)$, o $\sigma(\vec{x})$ o la sua negazione $\neg \sigma(\vec{x})$ appartengono a $p(\vec{x})$.

Se $M \models T$ e $a_1, \dots, a_n \in M$, l'insieme delle L -formule $\sigma(x_1, \dots, x_n)$ tali che $M \models \sigma(a_1, \dots, a_n)$ è un n -tipo completo di T , detto il tipo di (a_1, \dots, a_n) in M , e denotato $tp_M(a_1, \dots, a_n)$.

Esercizio 7.4. 1. Nella struttura $(\mathbb{Q}, <)$ tutti gli elementi hanno lo stesso tipo.

2. Nella struttura $(\mathbb{Q}, <, +, \cdot)$ tutti gli elementi hanno tipo diverso. Ad esempio il tipo $p(x)$ di 0 e il tipo $q(x)$ di 1 sono differenziati dal fatto che solamente il primo contiene la formula $\forall y(x + y = y)$ e solamente il secondo contiene la formula $\forall y(x \cdot y = y)$.

³in genere i tipi completi sono indicati con le lettere p, q .

3. Nella struttura $(\mathbb{Q}, <, +)$ tutti gli elementi strettamente positivi hanno lo stesso tipo, e tutti gli elementi strettamente negativi hanno lo stesso tipo. Ci sono quindi in tutto tre tipi realizzati in $(\mathbb{Q}, <)$. (Suggerimento: la moltiplicazione per un numero positivo preserva l'ordine e la addizione).

Si noti che tutti i tipi completi di T sono della forma $tp_M(a_1, \dots, a_n)$ per qualche $M \models T$ e $a_1, \dots, a_n \in M$.

Definizione 7.5. Se $p(\vec{x})$ è un n -tipo di T e se $M \models T$, diciamo che p è realizzato in M se esistono $\vec{a} \in M$ con $M \models p(\vec{a})$ (diciamo in tale caso che \vec{a} realizza p). Diciamo che p è omesso in M nel caso contrario.

Si noti che se $T = Th(A)$ è la teoria completa della struttura A , un n -tipo di T , pur non essendo necessariamente realizzato in A , per il Lemma 7.1 è sempre finitamente realizzato in A (ovvero ogni sottoinsieme finito di p è realizzato in A).

Teorema 7.6. Sia A una L -struttura. Ogni n -tipo $p = p(x_1, \dots, x_n)$ di $Th(A)$ è realizzato in una estensione elementare di A .

Dimostrazione. Basta mostrare che $ED(A) \cup p(x_1, \dots, x_n)$ è una teoria coerente (quel che sappiamo è che $Th(A) \cup p(x_1, \dots, x_n)$ lo è). Se non lo è, per compattezza esiste una congiunzione finita $\theta(\vec{x})$ di formule di p tale che $ED(A) \cup \{\theta(\vec{x})\}$ è incoerente, da cui $A \models \forall \vec{y} \neg \theta(\vec{y})$. Questo è assurdo perchè p essendo un tipo di $Th(A)$ è finitamente soddisfacibile in A . \square

7.2 Esercizi

Esercizio 7.7. Si mostri che la teoria completa T di $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ ha 2^{\aleph_0} 1-tipi completi. Si deduca che esistono 2^{\aleph_0} modelli numerabili non isomorfi di T .

8 Eliminazione dei quantificatori

Definizione 8.1. Una L teoria T ammette eliminazione dei quantificatori se per ogni L -formula $\theta(\vec{x})$ esiste una L -formula senza quantificatori $\gamma(\vec{x})$ tale che $T \models \forall x(\theta(\vec{x}) \leftrightarrow \gamma(\vec{x}))$.

Esempio 8.2. Si può dimostrare che la teoria completa T del campo ordinato $(\mathbb{R}, <, 0, 1, +, \cdot)$ ammette eliminazione dei quantificatori. Un ben noto esempio è il seguente: in T la formula $\exists x(x^2 + bx + c = 0)$ equivale alla formula senza quantificatori $4c < b^2$. Un altro esempio è dato dalla formula $\exists xy((x \neq 0 \vee y \neq 0) \wedge ax + by = 0 \wedge cx + dy = 0)$, la quale esprime l'esistenza di una vettore non nullo (x, y) soluzione del sistema lineare

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tale formula equivale alla formula senza quantificatori $ad = bc$ che esprime il fatto che il determinante della matrice è nullo. La presenza del simbolo $<$ nella

segnatura è necessario per avere l'eliminazione dei quantificatori. La formula $\exists x(x^2 = y)$ equivale alla formula senza quantificatori $0 < y \vee 0 = y$ ma non equivale a nessuna formula senza quantificatori che non usi il $<$.

8.1 Tipi senza quantificatori

Esercizio 8.3. Data una teoria T e un intero n , le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. la funzione $p(\vec{x}) \mapsto p(\vec{x}) \cap QF$ che associa ad ogni n -tipo completo $p(\vec{x})$ di T la sua restrizione all'insieme QF delle formule senza quantificatori è iniettiva.
2. Se M, N sono due modelli di T ed \vec{a} e \vec{b} sono n -uple di elementi di M, N tali che $tp_M(\vec{a}) \cap QF = tp_N(\vec{b}) \cap QF$, allora $tp_M(\vec{a}) = tp_N(\vec{b})$.
3. se $p(\vec{x})$ è un tipo completo di T e $\phi(\vec{x})$ è una formula tale che $p(\vec{x}) \models \phi(\vec{x})$, allora $p(\vec{x}) \cap QF \models \phi(\vec{x})$.

Teorema 8.4. Sia T una L -teoria. Supponiamo che per ogni n la funzione $p(\vec{x}) \mapsto p(\vec{x}) \cap QF$ che associa ad ogni n -tipo completo $p(\vec{x})$ di T la sua restrizione all'insieme QF delle formule senza quantificatori sia iniettiva. Allora T ammette eliminazione dei quantificatori.

Dimostrazione. Sia $\phi(\vec{x})$ una L -formula e sia $\Sigma(\vec{x}) = \{\sigma(\vec{x}) \in QF \mid T \models \forall \vec{x}(\phi(\vec{x}) \rightarrow \sigma(\vec{x}))\}$ l'insieme delle conseguenze senza quantificatori di $\phi(\vec{x})$ in T . Basta mostrare che $T \cup \Sigma(\vec{x}) \models \phi(\vec{x})$, in quanto poi per compattezza (e il fatto che Σ è chiusa per congiunzioni finite) esiste una singola formula $\sigma(\vec{x}) \in \Sigma(\vec{x})$ tale che $T \models \forall \vec{x}(\sigma(\vec{x}) \leftrightarrow \phi(\vec{x}))$. Se per assurdo così non fosse esisterebbe un tipo completo $p(\vec{x})$ contenente $\Sigma(\vec{x})$ e $\neg\phi(\vec{x})$. Per le nostre ipotesi $p(\vec{x}) \cap QF \models \neg\phi(\vec{x})$. Per compattezza esiste $\sigma(\vec{x}) \in p(\vec{x}) \cap QF$ tale che $T \models \sigma(\vec{x}) \rightarrow \neg\phi(\vec{x})$. Ma allora $T \models \phi(\vec{x}) \rightarrow \neg\sigma(\vec{x})$, e quindi $\neg\sigma(\vec{x}) \in \Sigma(\vec{x})$. Poiché $p(\vec{x})$ contiene $\Sigma(\vec{x})$ raggiungiamo l'assurdo che $p(\vec{x})$ contiene sia $\neg\sigma(\vec{x})$ che $\sigma(\vec{x})$. \square

Esercizio 8.5. Siano A, B due L -strutture e siano \vec{a} e \vec{b} due n -uple di elementi di A e B rispettivamente. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. (\vec{a}, \vec{b}) è un isomorfismo parziale tra A e B .
2. $tp_A(\vec{a}) \cap QF = tp_B(\vec{b}) \cap QF$.

8.2 Applicazioni della tecnica del va e vieni

Lemma 8.6. Sia T una L -teoria e siano M, N modelli di T . Supponiamo che l'insieme $I = I(M; N)$ degli isomorfismi finiti parziali da M ad N abbia la proprietà del va e vieni. Allora per ogni $((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) \in I$ vale $(M, \vec{a}) \equiv (N, \vec{b})$ (ovvero $tp_M(\vec{a}) \cap QF = tp_N(\vec{b}) \cap QF$ implica $tp_M(\vec{a}) = tp_N(\vec{b})$).

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare che per ogni $((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) \in I$, e per ogni L -formula $\phi(x_1, \dots, x_n)$ vale $M \models \phi(\vec{a})$ sse $N \models \phi(\vec{b})$. La dimostrazione è per induzione sulla complessità (numero dei connettivi) di $\phi(\vec{x})$ (ammettendo che n vari). Il caso in cui $\phi(\vec{x})$ si ottiene da formule più semplici tramite un connettivo proposizionale segue immediatamente dall'ipotesi induttiva. L'unico caso interessante è dunque quello in cui $\phi(\vec{x})$ ha la forma $\exists y \theta(\vec{x}, y)$. Supponiamo $(\vec{a}, \vec{b}) \in I$ e $M \models \phi(\vec{a})$. Esiste dunque $c \in M$ tale che $M \models \theta(\vec{a}, c)$. Poichè I ha la proprietà del va e vieni esiste $d \in N$ tale che $(\vec{a}c, \vec{b}d) \in I$. Per ipotesi induttiva $N \models \theta(\vec{b}, d)$ e quindi $N \models \phi(\vec{b})$. L'altro caso è simmetrico. \square

Teorema 8.7. 1. Se per ogni coppia M, N di modelli di T l'insieme $I(M, N)$ degli isomorfismi finiti parziali da M ad N ha la proprietà del va e vieni, allora T ammette eliminazione dei quantificatori ⁴.

2. Se inoltre $I(M, N)$ è sempre non vuoto (e ha la proprietà del va e vieni) comunque si scelgano M, N , allora T è completa.

Dimostrazione. (1.) Supponiamo che per ogni coppia M, N di modelli di T l'insieme $I(M, N)$ abbia la proprietà del va e vieni. Per il Lemma 8.6 per ogni $(\vec{a}, \vec{b}) \in I$, vale $tp_M(\vec{a}) = tp_N(\vec{b})$. Ne consegue, in base al teorema 8.4, che T ammette eliminazione dei quantificatori.

(2.) Siano $M, N \models T$. Per ipotesi l'insieme I degli isomorfismi parziali finiti da M ad N è non vuoto. Sia $(\vec{a}, \vec{b}) \in I$. Per il punto 1, $M, \vec{a} \equiv M, \vec{b}$. In particolare $M \equiv N$ e T è completa. \square

8.3 Esempi ed esercizi

Esercizio 8.8. La teoria degli ordini densi e senza estremi ammette eliminazione dei quantificatori ed è completa.

Esercizio 8.9. La teoria delle algebre di Boole senza atomi ammette eliminazione dei quantificatori ed è completa.

Esercizio 8.10. La teoria del grafo casuale ammette eliminazione dei quantificatori ed è completa.

9 Saturazione

9.1 Catene elementari

Definizione 9.1. Una catena di L -strutture è una successione $(M_i \mid i \in I)$ di L -strutture dove $I = (I, <)$ è un insieme linearmente ordinato e $i < j$ implica che M_i è una sottostruttura di M_j . Una catena elementare di L -strutture è una catena di strutture con l'ulteriore proprietà che $i < j$ implica $M_i \prec M_j$.

⁴Notiamo che la condizione del va e vieni è verificata banalmente se $I(M, N)$ è vuoto.

Definizione 9.2. Data una catena $(M_i \mid i \in I)$ di L -strutture, esiste un'unica L -struttura, denotata $\bigcup_i M_i$, il cui dominio è l'unione dei domini delle M_i e tale che ogni M_i sia una sottostruttura di $\bigcup_i M_i$. La struttura $\bigcup_i M_i$ viene detta il limite, o l'unione, della catena.

Teorema 9.3. Sia $(M_i \mid i \in I)$ una catena elementare di L -strutture e sia $M = \bigcup_i M_i$. Allora per ogni $i \in I$, $M_i \prec M$.

Dimostrazione. Dimostriamo per induzione sulla complessità della L -formula $\phi(x_1, \dots, x_n)$ che per ogni $i \in I$ e $a_1, \dots, a_n \in M_i$, $M_i \models \phi(a_1, \dots, a_n)$ sse $M \models \phi(a_1, \dots, a_n)$. Se ϕ è atomica ciò segue dal fatto che M_i è una sottostruttura di M . Se ϕ si ottiene tramite un connettivo proposizionale da formule più semplici la verifica è immediata. Supponiamo che ϕ sia $\exists y \theta(\vec{x}, y)$ e $M_i \models \phi(\vec{a})$. Allora $M_i \models \theta(\vec{a}, b)$ per qualche $b \in M_i$. Per ipotesi induttiva $M \models \theta(\vec{a}, b)$ e quindi $M \models \phi(\vec{a})$. Viceversa supponiamo $M \models \phi(\vec{a})$. Quindi $M \models \theta(\vec{a}, b)$ per qualche $b \in M$. Allora $b \in M_j$ per qualche $j > i$. Per ipotesi induttiva $M_j \models \theta(\vec{a}, b)$. Quindi $M_j \models \phi(\vec{a})$. Poiché $M_i \prec M_j$, $M_i \models \phi(\vec{a})$. \square

9.2 Modelli ω -saturi

Definizione 9.4. Data una L -struttura M e un sottoinsieme $A \subset M$ del suo dominio, un n -tipo di M con parametri da A è, per definizione, un n -tipo della teoria $Th((\mathcal{M}, a)_{a \in A})$.

Definizione 9.5. Un modello \mathcal{M} di una teoria completa T si dice ω -saturato se per ogni sottoinsieme finito A di M , \mathcal{M} realizza tutti gli 1-tipi di M con parametri da A .

Esempio 9.6. $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, <)$ non è ω -saturato in quanto non realizza il tipo $p(x)$ consistente di tutte le formule della forma $0 < x \wedge x + x + \dots + x < 1$ (n volte x) al variare di n .

Esercizio 9.7. $(\mathbb{R}, <)$ è ω -saturato.

Teorema 9.8. Ogni L -struttura ha una estensione elementare ω -satura.

Dimostrazione. Sia $\{p_i(x_i) \mid i \in I\}$ l'insieme di tutti gli 1-tipi di \mathcal{M} con un numero finito di parametri, dove abbiamo scelto una variabile diversa x_i per ogni tipo. La teoria $ED(\mathcal{M}) \cup \{p_i(x_i) \mid i \in I\}$ è coerente per compattezza, in quanto i vari p_i sono finitamente soddisfacibili in \mathcal{M} . Quindi esiste un modello \mathcal{M}_1 di questa teoria che estende elementarmente \mathcal{M} (in quanto ogni modello di $ED(\mathcal{M})$ è identificabile con una estensione elementare di \mathcal{M}). Tale modello \mathcal{M}_1 realizza tutti i tipi $p_i(x)$, ma non è detto che sia ω -saturato perchè ora dobbiamo considerare anche i tipi con un numero finito di parametri da \mathcal{M}_1 , non solo da \mathcal{M} . Iteriamo perciò il procedimento ottenendo una catena elementare $\mathcal{M} \prec \mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_2 \prec \dots$ dove ogni \mathcal{M}_{n+1} realizza tutti i tipi di \mathcal{M}_n con un numero finito di parametri. Il limite \mathcal{M}_ω di questa catena è una estensione elementare di tutti gli \mathcal{M}_i e realizza tutti i tipi di \mathcal{M}_ω con un numero finito di parametri. Per verificare ciò basta osservare che, dato un tale tipo $p(x)$, i suoi parametri,

essendo in numero finito, saranno contenuti in qualche \mathcal{M}_n e $p(x)$ sarà realizzato in \mathcal{M}_{n+1} , e quindi in \mathcal{M}_ω (essendo \mathcal{M}_ω una estensione elementare di \mathcal{M}_n e di \mathcal{M}_{n+1}). \square

9.3 Va e vieni in modelli ω -saturi

Teorema 9.9. *Sia T una L -teoria.*

1. *Supponiamo che per ogni coppia M, N di modelli ω -saturi di T l'insieme $I(M, N)$ degli isomorfismi finiti parziali da M ad N abbia la proprietà del va e vieni. Allora T ammette eliminazione dei quantificatori.*
2. *Supponiamo inoltre che per ogni $M, N \models T$ ω -saturi $I(M, N)$ sia non vuoto (e abbia la proprietà del va e vieni). Allora T è completa.*

Dimostrazione. (1.) Siano M, N modelli di T non necessariamente ω -saturi e siano \vec{a} e \vec{b} due n -uple di elementi di M ed N tali che $tp_M(\vec{a}) \cap QF = tp_N(\vec{b}) \cap QF$. Siano $M^* \succ M$ e $N^* \succ N$ ω -saturi. Poichè le formule verificate da \vec{a} e \vec{b} non cambiano passando ad estensioni elementari, $tp_{M^*}(\vec{a}) \cap QF = tp_{N^*}(\vec{b}) \cap QF$, ovvero $(\vec{a}, \vec{b}) \in I(M^*, N^*)$. Poichè $I(M^*, N^*)$ ha la proprietà del va e vieni, per il Lemma 8.6, $tp_{M^*}(\vec{a}) = tp_{N^*}(\vec{b})$, e quindi $tp_M(\vec{a}) = tp_N(\vec{b})$. Per il Teorema 8.4, T ammette eliminazione dei quantificatori.

(2.) Siano M, N modelli di T e siano $M^* \succ M$ ed $N^* \succ N$ estensioni ω -sature. Sia $(\vec{a}, \vec{b}) \in I(M^*, N^*)$. Ragionando come sopra $tp_{M^*}(\vec{a}) = tp_{N^*}(\vec{b})$. Quindi in particolare $M^* \equiv N^*$. Ma allora anche $M \equiv N$ e ne concludiamo che T è completa. \square

9.4 Esempi ed esercizi

Teorema 9.10. *Sia $L = \{<\}$ il linguaggio dell'ordine e sia T la L -teoria degli ordini discreti senza massimo o minimo elemento.*

1. *T è completa.*
2. *T ammette eliminazione dei quantificatori in una segnatura $L' = \{<, S, P\}$ con un simbolo S per il successore definito da $S(x) = y \leftrightarrow (x < y \wedge \neg \exists z(x < z \wedge z < y))$ e un simbolo P per il predecessore definito da $P(x) = y \leftrightarrow S(y) = x$. Più precisamente la L' -teoria T' che si ottiene da T aggiungendo queste definizioni come assiomi ammette eliminazione dei quantificatori.*

Dimostrazione. Siano M, N modelli ω -saturi di T . Esiste un unico modo di espandere M, N a due L' -strutture che siano modelli di T' . Continueremo a denotare M, N le strutture espanse. Sia I l'insieme degli isomorfismi finiti parziali da M ad N considerati come L' -strutture. I è non vuoto in quanto presi comunque $a \in M$ e $b \in N$ si verifica facilmente che $(a, b) \in I$. Per finire basta mostrare che I gode della proprietà del va e vieni. Supponiamo dunque $((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) \in I$ e sia $c \in M$. Dobbiamo trovare $d \in N$ tale

che $(\vec{a}c, \vec{b}d) \in I$ (l'altro caso è simmetrico). Per $m \in \mathbb{Z}$ sia $S^m(x)$ l' m -esimo successore di x se $m \geq 0$, mentre se $m < 0$ sia $S^m(x)$ l' m -esimo predecessore di x (quindi $S^0(x) = x$, $S^1(x) = S(x)$ e $S^n S^m(x) = S^{n+m}(x)$).

Caso 1. Supponiamo che esista a_i (con $1 \leq i \leq n$) ed $m \in \mathbb{Z}$ tale che $c = S^m(a_i)$. Possiamo porre in questo caso $d = S^m(b_i)$.

Caso 2. Supponiamo di non essere nel caso 1, e assumiamo senza perdita di generalità che $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ e che $a_i < c < a_{i+1}$ (il caso in cui c sia maggiore di ogni a_i o minore di ogni a_i è analogo). Per ogni intero positivo m dobbiamo allora avere $S^m(a_i) < c$ e $S^m(c) < a_{i+1}$. Ne segue che per ogni intero positivo m dobbiamo avere $S^m(a_i) < a_{i+1}$. Poiché $(\vec{a}, \vec{b}) \in I$, per ogni intero positivo m deve valere $S^m(b_i) < b_{i+1}$. Per ω -saturazione di N esiste allora un $d \in N$ tale che per ogni intero positivo m , $S^m(b_i) < d < b_{i+1}$. Per tale d abbiamo $(\vec{a}c, \vec{b}d) \in I$. \square

Esercizio 9.11. Si dimostri che la teoria dei campi algebricamente chiusi ammette eliminazione dei quantificatori nella segnatura $L = \{0, 1, +, \cdot\}$ e che la teoria dei campi algebricamente chiusi di caratteristica zero è completa.