STRUTTURE MINIMALI E CHIUSURA ALGEBRICA

FRANCESCO PARENTE

Notazione. Per ogni $n < \omega$ e per ogni formula ϕ, introduciamo le abbreviazioni $\exists_{\leq n} x\phi$ e $\exists_{=n} x\phi$, che significano rispettivamente: "esistono al più n elementi x tali che ϕ" ed "esistono esattamente n elementi x tali che ϕ". Ogni espressione di questo tipo può essere trasformata in una vera formula del primo ordine.

Definizione 1. Sia $\mathcal{M}$ una L-struttura, $X \subseteq M$ e $a \in M$. Diremo che a è *algebrico* su X se esistono una L-formula $\phi(x, \boldsymbol{y})$ e dei parametri $\boldsymbol{b}$ in X tali che

$$\mathcal{M} \models (\phi(a, \boldsymbol{b}) \wedge \exists_{\leq n} x\phi(x, \boldsymbol{b}))$$

per qualche $n < \omega$. L'insieme degli elementi algebrici su X si indica con $\mathrm{acl}(X)$.

Definizione 2. Una struttura $\mathcal{M}$ è *minimale* se, per ogni $D \subseteq M$ definibile, D è finito oppure $M \setminus D$ è finito.

Teorema 3. *Sia $\mathcal{M}$ una L-struttura minimale. Per ogni $X, Y \subseteq M$ abbiamo:*

(1) $X \subseteq \mathrm{acl}(X)$.
(2) *Se* $X \subseteq \mathrm{acl}(Y)$*, allora* $\mathrm{acl}(X) \subseteq \mathrm{acl}(Y)$.
(3) *Se* $a \in \mathrm{acl}(X \cup \{b\}) \setminus \mathrm{acl}(X)$*, allora* $b \in \mathrm{acl}(X \cup \{a\})$.
(4) *Se* $a \in \mathrm{acl}(X)$*, allora esiste* $X' \subseteq X$ *finito tale che* $a \in \mathrm{acl}(X')$.

Dimostrazione. (1) Se $a \in X$, basta prendere la formula $(x = y)$ e, come parametro, lo stesso a.

(2) Supponiamo che $a \in \mathrm{acl}(X)$. Dunque, esistono una L-formula $\phi(x, \boldsymbol{y})$ e dei parametri $\boldsymbol{b} = (b_1, \dots, b_k)$ in X tali che

$$\mathcal{M} \models (\phi(a, \boldsymbol{b}) \wedge \exists_{\leq n} x\phi(x, \boldsymbol{b})).$$

Per ogni $1 \leq i \leq k$ si ha $b_i \in X \subseteq \mathrm{acl}(Y)$; quindi esistono delle L-formule $\psi_1(x, \boldsymbol{z}), \dots, \psi_k(x, \boldsymbol{z})$ e dei parametri $\boldsymbol{c}$ in Y tali che

$$\mathcal{M} \models (\psi_1(b_1, \boldsymbol{c}) \wedge \cdots \wedge \psi_k(b_k, \boldsymbol{c}))$$

e gli insiemi $\{\, d \in M \mid \mathcal{M} \models \psi_i(d, \boldsymbol{c}) \,\}$ sono finiti. Ora, basta considerare la formula

$$\exists \boldsymbol{y}(\psi_1(y_1, \boldsymbol{z}) \wedge \cdots \wedge \psi_k(y_k, \boldsymbol{z}) \wedge \phi(x, \boldsymbol{y}) \wedge \exists_{\leq n} w\phi(w, \boldsymbol{y}))$$

per ottenere che $a \in \mathrm{acl}(Y)$.

(3) Non è restrittivo supporre $X = \emptyset$: il caso generale segue da questo aggiungendo a L una costante per ogni elemento di X. Sia $a \in \mathrm{acl}(\{b\}) \setminus \mathrm{acl}(\emptyset)$ e supponiamo per assurdo che $b \notin \mathrm{acl}(\{a\})$. Poiché $a \in \mathrm{acl}(\{b\})$, esistono una L-formula $\phi(x, y)$ e un numero naturale n tali che

$$\mathcal{M} \models (\phi(a, b) \wedge \exists_{=n} x\phi(x, b)).$$

Inoltre, $b \notin \mathrm{acl}(\{a\})$ implica che l'insieme

$$\{\, b' \in M \mid \mathcal{M} \models (\phi(a, b') \wedge \exists_{=n} x\phi(x, b')) \,\}$$

Data: 19 aprile 2014.
Esercizio per il corso di *Teoria dei modelli*.

è infinito; dunque il suo complementare ha cardinalità $l < \omega$ (qui abbiamo usato il fatto che $\mathcal{M}$ è minimale). Infine, da $a \notin \operatorname{acl}(\emptyset)$ segue che l'insieme

$$\{\, a' \in M \mid \mathcal{M} \models \exists_{=l} y \neg(\phi(a', y) \wedge \exists_{=n} x \phi(x, y)) \,\}$$

è infinito. Quindi possiamo trovare al suo interno $n+1$ elementi distinti, chiamiamoli $a_1, \ldots, a_{n+1}$. Ma allora esiste un $b' \in M$ tale che

$$\mathcal{M} \models (\phi(a_1, b') \wedge \cdots \wedge \phi(a_{n+1}, b') \wedge \exists_{=n} x \phi(x, b')),$$

assurdo.

(4) Segue dal fatto che ogni formula può avere solo un numero finito di parametri. $\square$