Teoria dei modelli

Alessandro Berarducci

24 ott. 2016

Appunti provvisori ad uso degli studenti del corso. Ho fatto varie correzioni, ma sto ancora lavorando ad una versione nuova anche nella scelta degli argomenti. Segnalatemi eventuali imprecisioni.

Indice

1 Linguaggi e strutture

L'anello $\mathbb{R}$ dei numeri reali è un esempio di "struttura". L'anello $M_{2,2}(\mathbb{R})$ delle matrici 2×2 a coefficienti reali è un altro esempio di struttura. Entrambe le strutture posseggono un'operazione denotata con il simbolo "$+$" (addizione) e un'operazione denotata dal simbolo "$\cdot$" (moltiplicazione), che nel caso dei numeri reali denota la moltiplicazione tra numeri reali, e nel caso delle matrici denota la moltiplicazione righe per colonne di matrici. Diremo che $\mathbb{R}$ e $M_{2,2}(\mathbb{R})$ sono due strutture nel linguaggio $L = \{+, \cdot\}$. Diamo ora le definioni precise.

Definizione 1.1. Un **linguaggio** (per la logica del primo ordine) è un insieme di simboli (possibilmente anche vuoto) divisi in tre categorie: simboli di costante, simboli di funzione, simboli di relazione. Ad ogni simbolo è associato un numero naturale detto "arietà" che serve ad indicare il numero degli argomenti a cui va applicato il simbolo. L'arietà di un simbolo di costante è zero.

Definizione 1.2. Sia L un linguaggio del primo ordine. Una **L-struttura** consiste di un insieme non vuoto $dom(M)$ detto **dominio** della struttura e di una funzione interpretazione che associa:

1. ad ogni simbolo di costante c di L (se ve ne sono) un elemento $c_M \in dom(M)$, detto interpretazione del simbolo c in M,

2. ad ogni simbolo di funzione f di L di arietà n, una funzione $f_M : dom(M)^n \to dom(M)$, detta interpretazione del simbolo f in M.

3. ad ogni simbolo di relazione R di L di arietà n, una relazione $R_M \subseteq dom(M)^n$, detta interpretazione del simbolo R in M. (Identifichiamo una relazione ad n posti con l'insieme delle n-uple che la verificano.)

Esempio 1.3. Un anello ordinato $M = (\mathrm{dom}(M); 0_M, 1_M, +_M, \cdot_M, <_M)$ è un struttura nel linguaggio $L = \{0, 1, +, \cdot, <\}$, dove $0, 1$ sono simboli di costante, $+, \cdot$ sono simboli di funzioni binarie, $<$ è un simbolo di relazione binaria, e i simboli $0, 1, +, \cdot, <$ sono intepretati in modo da soddisfare gli assiomi degli anelli ordinati.

Per semplicità indicheremo talvolta con M sia la struttura stessa che il suo dominio $\mathrm{dom}(M)$ e scriveremo c, f, R invece di c_M, f_M, R_M quando si chiaro dal contesto se ci riferiamo al simbolo o alla sua intepretazione.

1.1 Morfismi

Le L-strutture formano una "categoria", ovvero è possibile definire il concetto di "morfismo" tra due L-strutture.

Definizione. Un **morfismo** (o **omomorfismo**) $\phi\colon A \to B$ tra due L-strutture A e B è dato da una funzione $\phi\colon dom(A) \to dom(B)$ tale che:

1. se c è un simbolo di costante, allora $\phi(c_A) = c_B$;
2. se f è un simbolo di funzione di arietà n e $a_1, \ldots, a_n \in dom(A)$, allora $\phi(f_A(a_1, \ldots, a_n)) = f_B(\phi(a_1), \ldots, \phi(a_n))$;
3. se R è un simbolo di relazione di arietà n e $(a_1, \ldots, a_n) \in R_A$, allora $(\phi(a_1), \ldots, \phi(a_n)) \in R_B$.

Definizione 1.4. Un **isomorfismo** $\phi\colon A \to B$ è un morfismo biunivoco la cui funzione inversa è essa stessa un morfismo. Più esplicitamente un isomorfismo è una bigezione $\phi\colon dom(A) \to dom(B)$ tale che:

1. se c è un simbolo di costante, allora $\phi(c_A) = c_B$;
2. se f è un simbolo di funzione di arietà n e $a_1, \ldots, a_n, a \in dom(A)$, allora $f_A(a_1, \ldots, a_n) = a$ se e solo se $f_B(\phi(a_1), \ldots, \phi(a_n)) = \phi(a)$. Equivalentemente: $\phi(f_A(a_1, \ldots, a_n)) = f_B(\phi(a_1), \ldots, \phi(a_n))$.
3. se R è un simbolo di relazione di arietà n e $a_1, \ldots, a_n \in dom(A)$, allora $(a_1, \ldots, a_n) \in R_A$ se e solo se $(\phi(a_1), \ldots, \phi(a_n)) \in R_B$.

Esempio 1.5. I seguenti esempi illustrano il concetto di omomorfismo e isomorfismo.

1. Sia $\mathbb{Z}$ l'anello degli interi e sia $\mathbb{Z}/(n)$ l'anello degli interi modulo n (entrambi considerati come strutture nella linguaggio $L = \{0, 1, +, -, \cdot\}$). La funzione che manda un intero x nella sua classe resto modulo n costituisce un omomorfismo da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}/(n)$.

2. Sia L un linguaggio con un simbolo di relazione binario f, sia $(\mathbb{R}; +)$ la L-struttura avente come dominio i numeri reali e in cui f è interpretato come la funzione somma, e sia $(\mathbb{R}^{>0}, \cdot)$ la L-struttura avente come dominio i numeri reali positivi e in cui f è interpretato come la funzione prodotto. La funzione esponenziale $x \mapsto e^x$ è un isomorfismo da $(\mathbb{R}, +)$ a $(\mathbb{R}^{>0}, \cdot)$.

3. Un omomorfismo tra due ordini totali $(A, <_A)$ e $(B, <_B)$ non è altro che una funzione crescente: $a_1 < a_2$ implica $f(a_1) < f(a_2)$.

Definizione 1.6. Il concetto di **immersione** si ottiene da quello di isomorfismo rinunciando alla richiesta che ϕ sia suriettiva. Una immersione è dunque un isomorfismo verso la sua immagine.

1.2 Sottostrutture

Definizione 1.7. Date due L-strutture A e B diciamo che A è una **sottostruttura** di B se $dom(A) \subseteq dom(B)$ e la funzione di inclusione $i\colon dom(A) \to dom(B)$ è una immersione. Ciò significa che i simboli di costante sono intepretati nello stesso modo in A e in B, e i simboli di funzione e relazione sono interpretati in A come la restrizione agli elementi di A delle funzioni e relazioni che intepretano gli stessi simboli in B. Ad esempio l'anello degli interi $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, 0, 1, +, -, \cdot)$ è una sottostruttura dell'anello dei reali $(\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot)$. Per indicare che A è una sottostruttura di B scriviamo $A \subseteq B$.

Osservazione 1.8. In strutture relazionali (ovvero in un linguaggio senza senza simboli di funzione e costante) ogni sottoinsieme non vuoto determina una sottostruttura (ad esempio un sottoinsieme di un ordine lineare è un ordine lineare con l'ordine indotto), mentre per strutture con funzioni o costanti questo in genere non accade. Affinché un sottoinsieme non vuoto $X \subset dom(B)$ del dominio di una struttura B determini una sottostruttura di B occorre che X contenga l'interpretazione dei simboli di costante della linguaggio (se ve ne sono) e che sia chiuso rispetto alla interpretazione dei simboli di funzione. Se questa condizione è verificata c'è un unica sottostruttura di B avente X come dominio, e possiamo quindi per abuso di linguaggio identificare il sottoinsieme con la sottostruttura.

Osservazione 1.9. Il concetto di sottostruttura, così come quello di morfismo, dipende in modo essenziale dalla scelta della linguaggio. Ad esempio $(\mathbb{N}, +, 0)$ è una sottostruttura di $(\mathbb{Z}, +, 0)$ ma non è un sottogruppo nel senso usuale dell'algebra (non è chiuso rispetto alla funzione sottrazione). Per fare in modo che le sottostrutture dei gruppi siano gruppi, dobbiamo mettere nella linguaggio anche un simbolo per l'inversa della operazione gruppale.

Consideriamo ora la linguaggio $L = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$ degli anelli. Ogni sottostruttura A di un anello B è essa stessa un anello. Tuttavia se A è un campo, non è detto che B sia un campo. Per esserlo deve essere chiuso per la funzione $1/x$. Tuttavia non possiamo mettere nel linguaggio un simbolo per la funzione $1/x$ perché tale funzione è indefinita per $x = 0$ e nella linguaggio ammettiamo solamente simboli per funzioni definite sull'intero dominio della struttura (ovviamente si potrebbe convenire che $1/0 = 0$, ma ciò sarebbe in contrasto con l'uso comune).

1.3 Termini e Formule

Fissiamo un linguaggio L e un insieme infinito V di simboli chiamati **variabili** (o **variabili individuali**).

Definizione 1.10. Definiamo induttivamente l'insieme $Ter_L(V)$ dei **L-termini** (con variabili da V) come il più piccolo insieme di espressioni tale che:

1. Ogni variabile $x \in V$ è un L-termine;
2. ogni simbolo di costante di L è un L-termine;
3. se $t_1, \ldots, t_n$ sono L-termini, e $f \in L$ è un simbolo di funzione di arietà n, allora $f(t_1, \ldots, t_n)$ è un L-termine.

Un termine in cui non occorrano variabili viene detto **termine chiuso**. Chiaramente i termini chiusi possono esserci solo se il linguaggio contiene almeno un simbolo di costante.

Esempio 1.11. Le usuali espressioni polinomiali dell'algebra, come $x^2+2xy-z$ possono essere visti come termini in un linguaggio che comprende i simboli di addizione, sottrazione e moltiplicazione e, se necessario, dei simboli per i coefficienti (se i coefficienti sono interi bastano i simboli per 0 e 1 perché gli altri si ottengono per somme e sottrazioni).

Passiamo ora a definire l'insieme delle L-formule.

Definizione 1.12. Una **L-formula atomica** è una espressione della forma $t_1 = t_2$, dove t_1, t_2 sono L-termini, oppure della forma $R(t_1, \ldots, t_n)$, dove R è un simbolo di relazione n-aria di L (se ve ne sono) e $t_1, \ldots, t_n$ sono L-termini.

Per definire l'insieme delle formule (non atomiche), oltre ai simboli fino ad ora introdotti faremo uso dei simboli $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ per i connettivi proposizionali, i simboli $\exists$ e $\forall$ per i quantificatori esistenziale e universale, il simbolo $=$ per l'uguaglianza, e le parentesi.

Definizione 1.13. L'insieme delle **L-formule** è definito induttivamente come il più piccolo insieme di espressioni tale che:

1. Ogni L-formula atomica è una L-formula.
2. Se α e β sono L-formule, allora $\neg\alpha$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$ e $(\alpha \rightarrow \beta)$ sono L-formule.
3. Se α è una L-formula e x è una variabile, allora $\forall x\alpha$ e $\exists x\alpha$ sono L-formule.

Nel dare esempi di L-formule ometteremo le parentesi ridondanti quando non sussista ambiguità di lettura.

Definizione 1.14. Le **sottoformule** di una formula ϕ sono per definizione quelle formule che intervengono nella formazione induttiva di ϕ (inclusa la ϕ stessa). Quindi ad esempio le sottoformule di $(\alpha \to \beta)$ sono la formula stessa $(\alpha \to \beta)$ e tutte le sottoformule di α e di β (incluse α e β stesse).

Un'occorrenza di una variabile x in una formula α si dice **legata** se occorre in una sottoformula β di α immediatamente preceduta da un quantificatore $\forall x$ o $\exists x$. Un'occorrenza non legata si dice **libera**. Le variabili libere di una formula sono le variabili che hanno almeno una occorrenza libera nella formula. Se le variabili libere di φ sono incluse in $\{x_1, \ldots, x_n\}$ scriveremo anche $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ invece di φ.

Una formula senza variabili libere viene detta **formula chiusa** o **enunciato**.

Esempio 1.15. Le variabili libere di $x = y \wedge \forall u \exists x (x = u)$ sono la x e la y (sebbene la x abbia anche un'occorrenza legata).

1.4 Semantica di Tarski

I termini e le formule di per sé non hanno alcun significato fino a quando si specifichi una struttura in cui interpretarle. Data una L-struttura M ed una L-formula φ vogliamo definire cosa significhi che φ è vera in M. A livello intuitivo φ è vera in M se si ottiene un enunciato vero quando si interpretino i simboli del linguaggio L come prescrive la L-struttura M, i connettivi booleani tramite le usuali tavole di verità, e si leggano $\forall x \varphi$ e $\exists x \varphi$ rispettivamente come "per ogni x appartenente ad M vale φ" ed "esiste almeno un x in M tale che vale φ". Il simbolo $=$ viene interpretato come la relazione di uguaglianza.

Esempio 1.16. Sia $L = \{0, 1, +, \cdot\}$. La formula $\forall x \exists y (x \cdot y = 1)$ è vera nella L-struttura $\mathbb{R}$ (l'anello dei reali) e falsa in $\mathbb{Z}$ (l'anello degli interi), in quanto nei reali ogni elemento ha un inverso moltiplicativo mentre in $\mathbb{Z}$ ciò non è vero.

Passiamo ora alle definizioni formali. La definizione che daremo di "φ è vera in M" sarà per induzione sulla complessità di φ. La definizione è non costruttiva in quanto non fornisce un algoritmo per stabilire se una formula è vera, ma fornisce solo le condizioni che debbono essere soddisfatte affinchè sia vera. Se però il dominio della struttura è finito, tali condizioni si possono tradurre in un algoritmo. Siccome le formule possono contenere al loro interno dei termini, dobbiamo prima dare la semantica dei termini.

Definizione 1.17. Sia $\{x_1, \ldots, x_n\}$ un insieme di variabili e sia M una L-struttura. Una **valutazione** in M delle variabili $x_1, \ldots, x_n$ è una funzione $v : \{x_1, \ldots, x_n\} \to \mathrm{dom}(M)$ che assegna a ciascuna delle variabili x_i un valore $a_i = v(a_i)$ nel dominio della L-struttura M. Scriveremo anche $v = (a_1/x_1, \ldots, a_n/x_n)$ per indicare tale valutazione.

Definizione 1.18. Data una L-struttura M e un L-termine t le cui variabili sono incluse nel dominio della valutazione v in M definiamo induttivamente $M(t(v)) \in dom(M)$ nel modo seguente:

1. Se x è una variabile e v è una valutazione che associa a x il valore $a \in M$, allora $M(x(v)) = a$;
2. Se c è un simbolo di costante di L, allora $M(c(v)) = c_M$;
3. Se t è della forma $f(t_1, \ldots, t_n)$, allora $M(t(v)) = f_M(M(t_1(v)), \ldots, M(t_n(v)))$.

Ad esempio nella struttura $(\mathbb{R}; +, \cdot, 0, 1)$ il valore del termine $x + 1$ nella valutazione $(3/x)$ è 4.

Definizione 1.19 (Semantica di Tarski)**.** Sia M una L-struttura, sia ϕ una L-formula le cui variabili libere siano incluse in $\{x_1, \ldots, x_n\}$ e sia $v = (a_1/x_1, \ldots, a_n/x_n)$ una valutazione delle variabili con $v(x_i) = a_i \in M$. Diciamo che $\phi(v)$ è vera in M, e scriviamo $M \models \phi(v)$, se ciò segue dalle seguenti clausole induttive. L'induzione viene fatta sul numero dei connettivi della formula.

1. $M \models \neg\phi(v)$ se e solo se $M \not\models \phi(v)$ (cioè non vale $M \models \phi(v)$);
2. $M \models (\phi \wedge \psi)(v)$ se e solo se $M \models \phi(v)$ e $M \models \psi(v)$;
3. $M \models (\phi \vee \psi)(v)$ se e solo se $M \models \phi(v)$ o $M \models \psi(v)$;
4. $M \models (\phi \to \psi)(v)$ se e solo se $M \not\models \phi(v)$ o $M \models \psi(v)$.

Stiamo naturalmente assumendo che il lettore conosca il significato delle congiunzioni "e", "o", "non". Alternativamente avremmo potuto richiamare le "tavole di verità" dei connettivi booleani e dire che il valore di verità (ovvero il valore "vero" o "falso") di una formula ottenuta tramite $\neg, \wedge, \vee, \to$ da altre formule si ottiene applicando le tavole di verità ai valori delle sue sottoformule.

Veniamo ora ai quantificatori:

1. $M \models (\forall x\phi)(v)$ se e solo se per ogni $a \in dom(M)$, $M \models \phi(a/x, v)$;
   dove indichiamo con $(a/x, v)$ la valutazione che coincide con v sulle variabili diverse da x ed assegna ad x il valore a.
2. $M \models (\exists x\phi)(v)$ se esiste $a \in dom(M)$ tale che $M \models \phi(a/x, v)$.

Restano da trattare le formule atomiche, che costituiscono la base dell'induzione:

1. $M \models R(t_1, \ldots, t_n)(v)$ se e solo se $(M(t_1(v)), \ldots, M(t_n(v))) \in R_M$;
2. $M \models t_1 = t_2$ se e solo se $M(t_1(v))$ e $M(t_2(v))$ sono lo stesso elemento.

Una formula φ con variabili libere incluse in $\{x_1, \dots, x_n\}$ verrà spesso indicata con la notazione $\varphi(x_1, \dots, x_n)$. In questo caso, data una valutazione $v = (a_1/x_1, \dots, a_n/x_n)$ con $a_i = v(x_i) \in \mathrm{dom}(M)$, scriveremo $M \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$ anzichè $M \models \varphi(v)$. Con simili convenzioni la clausola del $\forall$ prende la forma seguente: $M \models \forall x \varphi(x, a_1, \dots, a_n)$ se e solo se, per ogni $a \in M$, $M \models \phi(a, a_1, \dots, a_n)$. Analogamente $M \models \exists x \phi(x, a_1, \dots, a_n)$ se e solo se esiste $a \in M$ tale che $M \models \phi(a, a_1, \dots, a_n)$.

Esercizio 1.20. Il valore di verità di $\phi(v)$ in M dipende solo dalla restrizione di v allle variabili libere di ϕ. In altre parole se v e v' coincidono sulle variabili libere di ϕ, allora $M \models \phi(v)$ se e solo se $M \models \phi(v')$. In particolare se ϕ è un L-enunciato (ovvero una L-formula senza variabili libere) allora il suo valore di verità in M non dipende da v. Diciamo in tal caso che ϕ è vero in M, e scriviamo $M \models \phi$, se $M \models \phi(v)$ per ogni v (o equivalentemente per qualche v).

1.5 Insiemi definibili

Definizione 1.21. Sia M una L-struttura. Un sottoinsieme X di M^n è $\emptyset$-definibile se esiste una L-formula $\phi(x_1, \dots, x_n)$ tale che X è l'insieme delle n-uple $\vec{a}$ da M tali che $M \models \phi(\vec{a})$. Diciamo che X è **definibile** se esiste una L-formula $\phi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k)$ e dei parametri $b_1, \dots, b_k \in M$ tale che X è l'insieme delle n-uple $\vec{a}$ da M tali che $M \models \phi(\vec{a}, \vec{b})$. Diremo che X è definibile con parametri da $B \subseteq \mathrm{dom}(M)$ se i b_i possono essere presi in B.

Esempio 1.22. La circonverenza di raggio r nel piano cartesiano, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$ è definibile nella struttura $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ con parametro $r \in \mathbb{R}$. Tuttavia se r è razionale, o più in generale reale algebrico, la stessa circonferenza è definibile senza parametri. Infatti in entrambi i casi è possibile trovare una formula senza parametri $\varphi(z)$ che equivale a $z = r$, dimodoché, al posto di $x^2 + y^2 = r^2$, possiamo scrivere la formula equivalente $\exists z(\varphi(z) \wedge x^2 + y^2 = z^2)$.

2 Teorie e modelli

Definizione 2.1. Una **teoria** T è una coppia consistente di un linguaggio L e di un insieme di L-enunciati chiamati assiomi di T. Quando L sia sottointeso identifichiamo T con l'insieme dei suoi assiomi, e penseremo quindi a T come ad un insieme di L-enunciati.

Esempio 2.2. La teoria dei gruppi può essere formulata in un linguaggio con un simbolo di costante 1 per l'elemento neutro, un simbolo un simbolo di funzione binaria $\cdot$ per l'operazione di gruppo, e un simbolo di funzione unaria per l'inverso moltiplicativo x^{-1}. Gli assiomi sono:

1. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
2. $x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$

3. $x \cdot x^{-1} = 1 = x^{-1} \cdot x$

implicitamente preceduti da $\forall xyz$.

Definizione 2.3. Un **modello** di una L-teoria T è una L-struttura in cui risultano veri tutti gli assiomi di T. Ad esempio un gruppo è, per definizione, un modello della teoria dei gruppi. Se M è un modello di T scriviamo $M \models T$. Quindi $M \models T$ se per ogni assioma ϕ di T, si ha $M \models \phi$. Indichiamo con $Mod_L(T)$ la classe di tutti i modelli di T.

Una L-teoria T si dice **soddisfacibile**, o **coerente** (semanticamente), se ha almeno un modello, e si dice **insoddisfacibile** o **incoerente** (semanticamente) se non ha modelli.

2.1 Conseguenza logica

Definizione 2.4 (Conseguenza logica)**.** Sia ϕ una L-formula chiusa e T una L-teoria. Diciamo che ϕ **segue logicamente** da T, e scriviamo $T \models \phi$, se ϕ è vera in tutti i modelli di T, ovvero non esiste alcuna L-struttura che renda veri tutti gli assiomi di T e non renda vera ϕ. In altre parole: $T \models \phi$ se e solo se $Mod_L(T) \subseteq Mod_L(\phi)$. In particolare se T è insoddisfacibile, cioè se $Mod_L(T) = \emptyset$, allora vale sempre $T \models \phi$ (in quanto l'insieme vuoto è contenuto in ogni altro insieme).

Definizione 2.5 (Formule logicamente valide)**.** Sia L una data linguaggio e sia ϕ una L-formula chiusa. Diciamo che ϕ è **logicamente valida**, e scriviamo $\models \phi$, se ϕ è vera in ogni L-struttura. Osserviamo che se T è la L-teoria con un insieme vuoto di assiomi, allora ogni L-struttura è modello di T, e pertanto si ha $\models \phi$ se e solo se $T \models \phi$.

2.2 Teorie deduttivamente chiuse

Definizione 2.6. Una L-teoria T si dice **deduttivamente chiusa** (da un punto di vista semantico) se l'insieme $\{\phi \mid T \models \phi\}$ delle sue conseguenze, coincide con l'insieme dei suoi assiomi.

Definizione 2.7. Due teorie nello stesso linguaggio si dicono **equivalenti** se hanno hanno le stesse conseguenze logiche, o equivalentemente gli stessi modelli.

Osservazione 2.8. Ogni teoria T equivale ad una teoria deduttivamente chiusa: basta considerare la teoria che ha come assiomi le conseguenze logiche di T.

2.3 Teorie complete

Definizione 2.9. Una L-teoria T è **completa** se è coerente e per ogni L-formula chiusa ϕ, si ha $T \models \phi$ o $T \models \neg\phi$.

Esempio 2.10. La teoria T dei gruppi non è completa. Sia infatti ϕ l'enunciato $\forall x, y(x \cdot y = y \cdot x)$, che esprime la legge commutativa. Poiché esistono sia gruppi commutativi che non commutativi, non si ha né $T \models \phi$ né $T \models \neg\phi$.

Definizione 2.11. Data una L-struttura M sia $Th(M)$ la teoria che ha come assiomi tutti gli L-enunciati veri in M. Allora $Th(M)$ è una L-teoria completa chiamata **teoria completa della struttura** M. Tutte le teorie complete sono di questa forma.

2.4 Elementare equivalenza

Esercizio 2.12. Sia T una L-teoria soddisfacibile e deduttivamente chiusa. Allora T è completa se e solo se è massimale tra le teorie soddisfacibili, cioè non è possibile ampliare l'insieme dei suoi assiomi in modo da ottenere una L-teoria che continua ad essere soddisfacibile.

Definizione 2.13. Due L-strutture $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ si dicono **elementarmente equivalenti**, $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ se e solo se hanno la stessa teoria completa: $Th(\mathcal{A}) = Th(\mathcal{B})$.

Esercizio 2.14. Una L-teoria T è completa sse comunque si prendano due modelli di T essi sono elementarmente equivalenti.

2.5 Espansioni e restrizioni del linguaggio

Definizione 2.15. Dati due linguaggi L ed $L' \supset L$, diciamo che la L'-struttura A è una **espansione** della L-struttura B (o che B è una **restrizione** di A), se A e B hanno lo stesso dominio e interpretano nello stesso modo i simboli di L.

Ad esempio il gruppo $(\mathbb{R}, +, 0)$ è una restrizione del campo $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$. Dato un insieme T di L-enunciati e $L' \supseteq L$, possiamo pensare T come ad una L-teoria o ad una L'-teoria. Il prossimo esercizio mostra che ciò non influenza la definizione di $T \models \varphi$.

Esercizio 2.16. Sia T un insieme di L-enunciati, sia ϕ un L-enunciato, e sia $L' \supset L$. Allora $Mod_L(T) \subseteq Mod_L(\phi)$ se e solo se $Mod_{L'}(T) \subseteq Mod_{L'}(\phi)$.

Lemma 2.17. *Sia T un insieme di L-enunciati, sia $\phi(x)$ una L-formula e sia c un simbolo di costante non in L. Sono equivalenti:*

1. *$T \models \phi(c)$ (nel linguaggio $L \cup \{c\}$).*
2. *$T \models \forall x \phi(x)$ (nel linguaggio L).*

Dimostrazione. Se $T \not\models \forall x \phi(x)$, allora esiste un modello A di T ed un elemento $a \in A$ con $A \models \neg\phi(a)$. La struttura (A, a) che espande A interpretando c con a è allora un modello di $T \cup \{\neg\phi(c)\}$ e dunque $T \not\models \phi(c)$. Viceversa se $T \models \forall x \phi(x)$ allora ovviamente $T \models \phi(c)$ (tenendo conto di Lemma 2.16). $\square$

3 Compattezza

Nel seguito assumeremo, per semplificare le dimostrazioni, che nelle regole per la formazione delle formule non sia presente il quantificatore universale. Ciò non comporta perdita di generalità in quanto $\forall x \phi$ può essere definito come $\neg\exists x \neg\phi$ (essendo le due formule logicamente equivalenti).

3.1 Insiemi di Hintikka

Definizione 3.1. (Insiemi di Hintikka) Sia T un insieme di L-formule chiuse. Diciamo che T è un insieme di Hintikka (per L) se per ogni scelta di L-formule chiuse ϕ, ψ si ha:

1. se $\phi \in T$, allora $\neg\phi \notin T$,
2. se $\neg\neg\phi \in T$, allora $\phi \in T$,
3. se $\phi \wedge \psi \in T$, allora $\phi \in T$ e $\psi \in T$,
4. se $\neg(\phi \wedge \psi) \in T$, allora $\neg\phi \in T$ o $\neg\psi \in T$,
5. se $\phi \vee \psi \in T$, allora $\phi \in T$ o $\psi \in T$,
6. se $\neg(\phi \vee \psi) \in T$, allora $\neg\phi \in T$ e $\neg\psi \in T$,
7. se $\phi \to \psi \in T$, allora $\neg\phi \in T$ o $\psi \in T$,
8. se $\neg(\phi \to \psi) \in T$, allora $\phi \in T$ e $\neg\psi \in T$,
9. se $\exists x\phi(x) \in T$, allora esiste un L-termine chiuso t, tale che $\phi(t) \in T$,
10. se $\neg\exists x\phi(x) \in T$, allora per ogni L-termine chiuso t, $\neg\phi(t) \in T$.

Per linguaggi senza simbolo di uguaglianza $=$ possiamo fermarci qui. Altrimenti dobbiamo aggiungere le seguenti proprietà dell'uguaglianza:

1. (riflessività) per ogni L-termine chiuso t, $t = t \in T$,
2. (sostituibilità) per ogni L-formula $\phi(x)$ e termini chiusi t e t', se $t = t' \in T$, allora $\phi(t) \in T$ se e solo se $\phi(t') \in T$. (Nella ultima clausola possiamo anche limitarci a formule atomiche $\phi(x)$.)

Definizione 3.2. Dato un linguaggio L indichiamo con $|L|$ il massimo tra $\aleph_0$ e la cardinalità dell'insieme dei simboli di L. Si noti che $|L|$ coincide con la cardinalità dell'insieme delle L-formule.

Teorema 3.3. *Ogni insieme di Hintikka T ha un modello M. Inoltre possiamo prendere M in modo tale che ogni elemento del dominio di M è l'interpretazione di un termine chiuso del linguaggio L di T. Quindi in particolare $|M| \leq |L|$.*

Dimostrazione. Per semplicità consideriamo prima il caso di linguaggi senza il simbolo di uguaglianza né simboli di funzione. In questo caso gli unici termini chiusi di L sono le costanti. Prendiamo come $dom(M)$ l'insieme delle costanti di L. Dato un simbolo di relazione R di arietà n, definiamo la sua interpretazione $R^M \subseteq dom(M)^n$ come l'insieme di tutte le n-uple $(c_1, \ldots, c_k)$ tali che $R(c_1, \ldots, c_n) \in T$. In questo modo abbiamo definito una L-struttura che rende veri tutti gli enunciati atomici in T, e falsi gli enunciati atomici non in T. Sia ora ϕ un arbitrario L-enunciato. Usando le proprietà di Hintikka segue per induzione sul numero dei connettivi di ϕ che se $\phi \in T$, allora $M \models \phi$ (se T è un insieme di Hintikka completo sarà anche vero che se $\phi \notin T$, allora $M \models \neg\phi$).

Consideriamo ad esempio il caso $\neg\phi \in T$. Dalle proprietà di Hintikka segue che $\phi \notin T$. Se ϕ è atomica, concludiamo che $M \models \neg\phi$ per definizione di M. Se invece ϕ non è atomica, allora deve cominciare con un connettivo. Supponiamo ad esempio che tale connettivo sia $\vee$, cioè $\neg\phi = \neg(\alpha \vee \beta)$. Usando le proprietà di Hintikka abbiamo $\neg\alpha \in T$ e $\neg\beta \in T$. Per induzione possiamo concludere $M \models \neg\alpha$ e $M \models \neg\beta$, da cui poi segue $M \models \neg(\alpha \vee \beta)$.

Lasciamo al lettore la verifica degli altri casi. Questo conclude la dimostrazione nel caso il linguaggio non abbia simboli di funzione e il simbolo di uguaglianza.

Consideriamo ora il caso generale. Ricordiamo che il simbolo di uguaglianza deve essere interpretato come la relazione di uguaglianza, quindi se $t = t' \in T$ dobbiamo fare in modo che t e t' siano interpretati con lo stesso elemento del modello M che vogliamo costruire.

A tal fine prendiamo come $dom(M)$ l'insieme degli L-termini chiusi quozientato rispetto alla relazione di equivalenza $\sim$ definita da $t \sim t'$ sse $t = t' \in T$. Segue dalle proprietà degli insiemi di Hintikka che $\sim$ è in effetti una relazione di equivalenza. Indichiamo con $t/\!\sim$ la classe di equivalenza di t rispetto a $\sim$.

Dato un simbolo di funzione f di L di arietà n definiamo la sua interpretazione $f^M : dom(M)^n \to dom(M)$ ponendo: $f^M(t_1/\!\sim, \dots, t_n/\!\sim) = f(t_1, \dots, t_n)/\!\sim$. Questa definizione è ben posta perchè dalla clausola di sostituibilità nella definizione degli insiemi di Hintikka (applicata ripetute volte) segue che se $t_1 \sim t'_1, \dots, t_n \sim t'_n$ allora $f(t_1, \dots, t_n) \sim f(t'_1, \dots, t'_n)$.

Resta solo da definire l'interpretazione R^M dei simboli di relazione di L (se ve ne sono). Se R ha arietà n e $t_1, \dots, t_n$ sono termini chiusi, poniamo $(t_1/\sim, \dots, t_n/\sim) \in R^M$ sse $R(t_1, \dots, t_n) \in T$. Questo è ben posto per la clausola di sostituibilità. Abbiamo così definito una L-struttura M.

Per induzione sulla lunghezza dei termini chiusi t, segue che $t^M = t/\sim$. Quindi se $t = t' \in T$, allora $t^M = t/\!\sim\, = t'/\!\sim\, = t'^M$, e quindi $M \models t = t'$ (si noti che per abuso di linguaggio abbiamo usato "=" sia come simbolo che come la vera relazione di uguaglianza). Viceversa se $t = t' \notin T$, allora $t/\!\sim\, \neq t'/\!\sim$ e $M \models t \neq t'$. Quindi M rende veri gli enunciati di T della forma $t = t'$, e falsi gli enunciati della forma $t = t'$ che non sono in T. Similmente si verifica che $R(t_1, \dots, t_n) \in T$ sse $M \models R(t_1, \dots, t_n)$. Quindi tra gli enunciati atomici (senza connettivi) M rende veri tutti e soli quelli che sono in T. Ragionando per induzione sulla complessità della formula, usando le proprietà di Hintitkka per i passi induttivi, vediamo che ogni $\phi \in T$ (non necessariamente atomica) è vera M. Consideriamo nel dettaglio il caso in cui ϕ è della forma $\exists x \theta(x)$. Se $\phi \in T$, allora essendo T di Hintikka deve esistere un termine chiuso t tale che $\theta(t) \in T$. Per induzione $\theta(t)$ è vero nel modello M. Ma allora deve essere vero anche $\exists x \theta(x)$. $\square$

3.2 Teorema di compattezza

Definizione 3.4. Un insieme di L-enunciati si dice **finitamente soddisfacibile** se ogni suo sottoinsieme finito è soddisfacibile.

Lemma 3.5. *Sia Σ un insieme soddisfacibile di L-enunciati. Allora per ogni L-enunciato σ, almeno uno dei due insiemi $\Sigma \cup \{\sigma\}$ o $\Sigma \cup \{\neg\sigma\}$ è soddisfacibile. Similmente se rimpiazziamo "soddisfacibile" con "finitamente soddisfacibile".*

Dimostrazione. Sia M un modello di Σ. In M almeno uno degli enunciati σ o $\neg\sigma$ è vero. Quindi almeno uno dei due insiemi $\Sigma \cup \{\sigma\}$ o $\Sigma \cup \{\neg\sigma\}$ è soddisfacibile (avendo come modello lo stesso M). La prima parte è cosí dimostrata.

Il caso della finita soddisfacibilità si dimostra come segue: supponiamo che nè $\Sigma \cup \{\sigma\}$ nè $\Sigma \cup \{\neg\sigma\}$ sia finitamente soddisfacibile. Esiste allora un sottoinsieme finito Σ' di Σ tale che nè $\Sigma' \cup \{\sigma\}$ nè $\Sigma' \cup \{\neg\sigma\}$ sia soddisfacibile (verificare!). Ma allora neppure Σ' è soddisfacibile. Pertanto Σ non è finitamente soddisfacibile. $\square$

Lemma 3.6. *Sia Σ un insieme di L-enunciati, sia $\phi(x)$ una L-formula nella variabile x e sia c sia un simbolo di costante non occorrente nè in Σ. Allora $\Sigma \cup \{\phi(c)\}$ è soddisfacibile se e solo se $\Sigma \cup \{\exists x \phi(x)\}$ è soddisfacibile. Similmente se rimpiazziamo "soddisfacibile" con "finitamente soddisfacibile".*

Dimostrazione. Poiché $\phi(c) \to \exists x \phi(x)$ è logicamente valida, ogni modello di $\phi(c)$ è modello di $\exists x \phi(x)$. L'implicazione inversa $\exists x \phi(x) \to \phi(c)$ non è logicamente valida (verificare!), tuttavia ogni modello M di $\exists x \phi(x)$ può essere espanso ad un modello M' di $\phi(c)$ interpretando c come un qualsiasi elemento $a \in M$ tale che $M \models \phi(a)$ (l'esistenza di tale a essendo garantita dalla verità di $\exists x \phi(x)$ in M). $\square$

Lemma 3.7. *Sia Σ un insieme di L-enunciati finitamente soddisfacibile. Allora esiste un linguaggio $L' \supset L$ e un insieme di L'-enunciati $\Sigma' \supset \Sigma$ con le seguenti proprietà:*

1. *Σ' è finitamente soddisfacibile.*
2. *Per ogni enunciato σ di L', esattamente uno degli enunciati σ o $\neg\sigma$ appartiene a Σ'. (Quindi Σ' è un insieme finitamente soddisfacibile massimale di L'-enunciati.)*
3. *Σ' ha la proprietà di Henkin, ovvero per ogni enunciato della forma $\exists x \phi(x)$ in Σ', esiste almeno una costante c di L' tale che $\phi(c) \in \Sigma'$.*
4. *$|L'| + \omega = |L| + \omega$.*

Dimostrazione. Per semplicità assumiamo dapprima che il linguaggio sia numerabile. Sia $\{c_i \mid i < \omega\}$ un insieme numerabile di nuovi simboli di costante. Sia L' l'espansione di L tramite questi nuovi simboli. Sia $(\sigma_i \mid i < \omega)$ una enumerazione di tutti gli L'-enunciati. A partire da $\Sigma_0 = \Sigma$ costruiamo, in base ai lemmi 3.5 e 3.6, una successione crescente $\Sigma_0 \subset \Sigma_1 \subset \Sigma_2 \ldots$ di insiemi finitamente soddifacibili di L'-enunciati, ognuno dei quali è ottenuto dal precedente con l'aggiunta di uno o due enunciati nel modo seguente:

1. Se $\Sigma_i \cup \{\sigma_i\}$ è finitamente soddisfacibile allora $\sigma_i \in \Sigma_{i+1}$. Se inoltre σ_i ha la forma $\exists x \phi(x)$ allora $\phi(c_j) \in \Sigma_{i+1}$ per qualche c_j che non occorre nelle formule di $\Sigma_i \cup \{\phi(x)\}$.

2. Se $\Sigma_i \cup \{\sigma_i\}$ non è finitamente soddisfacibile allora $\neg\sigma_i \in \Sigma_{i+1}$.

Sia Σ' l'unione dei Σ_i. Per costruzione Σ' verifica le proprietà richieste.

Il caso in cui L sia di cardinalità $\kappa > \omega$ è analogo. Si aggiunge una successione $(c_i \mid i < \kappa)$ di simboli di costante per formare L'. Si fissa una enumerazione $(\sigma_i \mid i < \kappa)$ delle L' formule, e si definisce una successione crescente $(T_i \mid i < \kappa)$ di teorie come sopra con l'unica differenza che se i è un ordinale limite T_i è definito come l'unione dei precedenti T_j. $\square$

Lemma 3.8. *Sia Σ' e L' come nel Lemma 3.7. Allora Σ' è di Hintikka.*

Dimostrazione. Verifichiamo ad esempio la clausola del $\vee$ nella definizione di insieme di Hintikka. Supponiamo che $\alpha \vee \beta \in \Sigma'$ ma che per assurdo $\alpha \notin \Sigma'$ e $\beta \notin \Sigma'$. Le negazioni delle due formule appartengono allora Σ' e pertanto l'insieme $\{\neg\alpha, \neg\beta, \alpha \vee \beta\}$ è incluso in Σ' contraddicendone la finita soddisfacibilità. Le altre clausole si dimostrano analogamente. $\square$

Teorema 3.9. *Sia Σ un insieme di L-enunciati. Σ è soddisfacibile se e solo se Σ è finitamente soddisfacibile.*

Dimostrazione. Per i risultati precedenti Σ è contenuto in un insieme di Hintikka e pertanto ha un modello. $\square$

Teorema 3.10. *Sia T una L-teoria. Se T è soddisfacibile allora T ha un modello di cardinalità $\leq |L| + \omega$.*

Dimostrazione. Se T è soddisfacibile allora in particolare T è finitamente soddisfacibile. Esiste dunque un insieme di Hintikka $T' \supset T$ in un linguaggio $L' \supset L$ con $|L'| + \omega = |L| + \omega$. Per il Teorema 3.3 T' ha un modello della cardinalità richiesta, e quindi anche T lo ha. $\square$

Esercizio 3.11. Usare il teorema di compattezza per dimostrare che se un grafo infinito non è 3-colorabile (ovvero non esiste una funzione dai vertici ad un insieme di 3 colori in modo che nodi adiacenti ricevano colore diverso), allora anche un suo sottografo finito non è 3-colorabile. Suggerimento: si trovi una teoria i cui modelli corrispondono alle colorazioni del grafo.

4 Teoremi di Lowenheim-Skolem

4.1 Lowenheim-Skolem verso l'alto: forma debole

Teorema 4.1. *Sia T una L-teoria.*

1. *Supponiamo che per ogni intero positivo n esiste un modello M_n di T di cardinalità maggiore di n. Allora T ha un modello infinito.*
2. *Supponiamo che T abbia un modello infinito. Allora per ogni cardinale $\kappa \geq |L| + \omega$, T ha un modello di cardinalità κ.*

Dimostrazione. Assumiamo che per ogni intero positivo n esista un modello M_n di T di cardinalità maggiore di n. (Questa ipotesi è verificata in particolare se T ha un modello infinito.) Sia $\kappa \geq |L| + \omega$. Mostriamo che T ha un modello di cardinalità κ (ciò dimostra sia il primo che il secondo punto). Sia L' il linguaggio ottenuto da L con l'aggiunta di un insieme C di cardinalità κ di nuovi simboli di costante. Sia T' la L'-teoria i cui assiomi sono quelli di T più tutti gli assiomi della forma $c \neq c'$, dove c, c' sono costanti distinte di C. Dimostriamo innanzitutto che ogni sottoteoria finita S di T' ha un modello. A tal fine osserviamo che S può menzionare solo un insieme finito - diciamo n - delle costanti di C. Scegliamo un modello $\mathcal{A}$ di T di cardinalità $\geq n$. Sia A' la L'-struttura che espande $\mathcal{A}$ interpretando le n costanti di C menzionate in S con n elementi distinti di $\mathcal{A}$. Tale A' è un modello di S. Per il teorema di compattezza possiamo concludere che T' ha un modello $\mathcal{B}$, che per il teorema 3.10 può essere scelto di cardinalità $\leq \kappa$, ma che d'altra parte deve essere di cardinalità $\geq \kappa$ in quanto dovendo verificare tutti i nuovi assiomi $c \neq c'$ deve interpretare le costanti di C con elementi distinti del dominio. La restrizione di $\mathcal{B}$ al linguaggio originale L è una L-struttura di cardinalità κ modello di T. $\square$

4.2 Immersioni elementari

Definizione 4.2. Un morfismo $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ tra due L-strutture si dice una **immersione elementare** se per ogni n e per ogni L-formula $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ con variabili libere incluse in $\{x_1, \ldots, x_n\}$ e per ogni $a_1, \ldots, a_n \in A$, si ha:

$\mathcal{A} \models \phi(a_1, \ldots, a_n)$, se e solo se $\mathcal{B} \models \phi(f(a_1), \ldots, f(a_n))$

Una sottostruttura $\mathcal{B}$ di $\mathcal{A}$ si dice **sottostruttura elementare**, e scriviamo $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$, se e solo se la inclusione di $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ è una immersione elementare. Scriviamo $\mathcal{A} \precsim \mathcal{B}$ se esiste una immersione elementare da $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$.

Esempio 4.3. Sia $L = (<)$ e consideriamo la L-struttura costituita dall'insieme ordinato dei numeri interi $\mathbb{Z}$, e la sua sottostruttura $2\mathbb{Z}$ costituita dai numeri pari. Allora $2\mathbb{Z}$ è elementarmente equivalente a $\mathbb{Z}$ (in quanto è isomorfa), ma non è una sua sottostruttura elementare perchè la formula $\exists x(2 < x \wedge x < 4)$ è vera in $\mathbb{Z}$ ma non in $2\mathbb{Z}$.

Definizione 4.4. Sia M una L-struttura e sia A un sottoinsieme del dominio di M. Sia L_A il linguaggio ottenuto da L con l'aggiunta di nuovi simboli di costante c_a corrispondenti agli elementi a di A. Espandiamo M ad una L_A struttura interpretando c_a con a, e denotiamo $(M,a)_{a\in A}$ la struttura espansa. Osserviamo che per ogni L-formula $\phi(x_1,\dots,x_n)$ e per ogni $a_1,\dots,a_n \in A$ si ha

$M \models \phi(a_1,\dots,a_n)$ se e solo se $(M,a)_{a\in A} \models \phi(c_{a_1},\dots,c_{a_n})$.

Indichiamo con $Th((M,a)_{a\in A})$ la teoria completa della struttura $(M,a)_{a\in A}$. In particolare possiamo prendere $A = M$. Il **diagramma elementare** di M è per definizione la L_M-teoria completa

$$ED(M) = Th((M,m)_{m\in M}).$$

Lemma 4.5. *Siano M,N L-strutture. Allora M può essere immersa elementarmente in N se e solo se N può essere espansa ad un modello di $ED(M)$. In altre parole $M \lesssim N_{|L}$ se e solo se $N \models ED(M)$.*

Dimostrazione. Supponiamo che $f\colon M \to N$ sia una immersione elementare. Espandiamo N ad una L_M-struttura $N' = (N, f(m))_{m\in M}$ interpretando c_m con $f(m)$. È immediato verificare che $N' \models ED(M)$.

Viceversa se N ammette una espansione N' modello di $ED(M)$, allora la funzione $f\colon M \to N$ che manda m nell'interpretazione di c_m in N' è una immersione elementare di M in N. □

Corollario 4.6. *Sia M una L-struttura e sia T una L_M-teoria. Una condizione necessaria e sufficiente affinché esista $N \succ M$ tale che $N \models T$ è che $ED(M)\cup T$ sia soddisfacibile.*

4.3 Löweinheim - Skolem verso l'alto: forma forte

Teorema 4.7. *(Löweinheim - Skolem verso l'alto) Sia M una L-struttura infinita. Sia κ un cardinale $\geq |L_M| = |M| + |L| + \omega$. Allora M ha una estensione elementare di cardinalità κ.*

Dimostrazione. Per il Teorema 4.1 $ED(M)$ ha un modello N di cardinalità κ. Per il Lemma 4.5 M si immerge elementarmente in $N_{|L}$. Rimpiazzando N con una copia isomorfa possiamo assumere $M \prec N_{|L}$. □

4.4 Lowenheim-Skolem verso il basso

Lemma 4.8. *(Criterio di Tarski - Vaught) Consideriamo due L-strutture $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Supponiamo che per ogni L-formula della forma $\exists y\phi(y,x_1,\dots,x_n)$ e parametri $a_1,\dots,a_n \in A$, si abbia che se $\mathcal{B} \models \exists y\phi(y,a_1,\dots,a_n)$, allora esiste $a \in A$ tale che $\mathcal{B} \models \phi(a,a_1,\dots,a_n)$. Ne segue che $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$.*

Dimostrazione. Per induzione sul numero dei connettivi della formula $\theta(x_1,\dots,x_k)$ mostriamo che per ogni $a_1,\dots,a_k \in A$, $\mathcal{B} \models \theta(a_1,\dots,a_k)$ se e solo se $\mathcal{A} \models \theta(a_1,\dots,a_k)$.

Se θ è atomica, allora l'equivalenza da dimostrare segue dal fatto che $\mathcal{A}$ è una sottostruttura di $\mathcal{B}$.

Se l'equivalenza da dimostrare vale per una classe di formule, essa vale anche per tutte le formule che si ottengono da esse usando i connettivi booleani.

L'unico caso interessante è quello di formule della forma $\exists y \phi(y, x_1, \dots, x_n)$ per le quali ragioniamo come seque. Supponiamo che $\mathcal{B} \models \exists y \phi(y, \vec{a})$. Allora per le ipotesi esiste $c \in A$ tale che $\mathcal{B} \models \phi(c, \vec{a})$. Per ipotesi induttiva $\mathcal{A} \models \phi(c, \vec{a})$. Dunque $\mathcal{A} \models \exists y \phi(y, \vec{a})$. L'implicazione inversa è facile. □

Teorema 4.9. *(Teorema di Lowenheim-Skolem verso il basso) Sia M una L-struttura di cardinalità κ, sia A un sottoinsieme del dominio di M e sia λ un cardinale tale che $|L| + |A| \leq \lambda \leq \kappa$. Allora esiste una sottostruttura elementare $N \prec M$ di cardinalità λ il cui dominio include A.*

Dimostrazione. Sostituendo A con un insieme più grande se necessario possiamo assumere $|A| = \lambda$. La cardinalità dell'insieme delle L_A formule è λ. Per ogni L_A formula $\phi(x)$ tale che $M \models \exists x \phi(x)$ scegliamo un $b_\phi \in M$ tale che $M \models \phi(b_\phi)$ e sia A_1 l'unione di A e dell'insieme dei b_ϕ al variare di $\phi = \phi(x)$ tra la L_A formule nella variabile x. Costruiamo una successione di insiemi $A \subset A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$ dove ogni A_{i+1} è ottenuto da A_i nello stesso modo in cui A_1 è stato definito a partire da A. Sia $B = \bigcup_{i \in \omega} A_i$ la loro unione. Allora B è un sottoinsieme di M di cardinalità λ e per ogni L_B-formula $\phi(x)$ tale che $M \models \exists x \phi(x)$ esiste $b \in B$ tale che $M \models \phi(b)$ (in quanto i parametri di $\phi(x)$, essendo in numero finito, appartengono a qualche A_i e b può essere scelto in A_{i+1}). È facile vedere che B è il dominio di una sottostruttura di M, e per il Lemma 4.8 B è il dominio di una sottostruttura elementare di M. □

4.5 Completezza delle teorie κ-categoriche

Definizione 4.10. Sia κ un numero cardinale. Una L-teoria T è κ-categorica se T ha un modello di cardinalità κ e tutti i modelli di T di cardinalità κ sono isomorfi.

Teorema 4.11. *Sia T una L-teoria senza modelli finiti. Se $\kappa \geq |L| + \omega$ e T è κ-categorica allora T è completa.*

Dimostrazione. Siano M, N modelli di T e siano T_1, T_2 le teorie complete di M, N rispettivamente. Tali teorie sono estensioni complete di T. Per il teorema 4.1 (usando il fatto che M, N sono infiniti) T_1 ha un modello M_1 di cardinalità κ e T_2 ha un modello M_2 di cardinalità κ. In particolare M_1, M_2 sono modelli di T di cardinalità κ quindi sono isomorfi per le ipotesi. Ne segue che $T_1 = T_2$ e $M \equiv N$. Quindi T è completa. □

5 Teoria del primo ordine dei campi algebricamente chiusi

In questa sezione dimostriamo che la teoria dei campi algebricamente chiusi ammette eliminazione dei quantificatori (Tarski). Ne deduciamo la completezza della teoria dei campi algebricamente chiusi di caratteristica fissata. Infine otteniamo alcune conseguenze di carattere algebrico tra cui il teorema degli zeri di Hilbert (Nullstellensatz) e un teorema di Ax.

Definizione 5.1. La teoria del primo ordine dei campi algebricamente chiusi, ACF, è formulata nel linguaggio $L = \{0, 1, +, -, \cdot\}$. Gli assiomi sono quelli dei campi più uno schema di assiomi per dire che ogni polinomio di grado $n > 0$ ha uno zero:

$$\forall a_0, \dots, a_{n-1} \exists x (x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0).$$

Volendo rimanere nell'ambito della logica del primo ordine servono infiniti assiomi, uno per ogni grado $n \in \mathbb{N}$.

Abbiamo bisogno di richiamare la nozione di "forma normale disgiuntiva". Facciamo prima un esempio:

Esempio 5.2. Sia $F = \{A, B, C\}$ un insieme di formule. Sono equivalenti:

1. $(A \to B) \wedge (\neg A \to C)$ (Se A, allora B, altrimenti C);
2. $(\neg A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (Forma normale congiuntiva);
3. $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge C)$ (Forma normale disgiuntiva).

Lemma 5.3 (Forma normale disgiuntiva)**.** *Sia $F = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ un insieme di formule e sia ψ una loro combinazione booleana. Allora ψ può essere messa in **forma normale disgiuntiva**, ovvero equivale ad una disgiunzione di congiunzioni di formule in F o negazioni di formule in F.*

Dimostrazione del 5.3. Chiamiamo "clausola" una formula della forma $\pm\phi_1 \wedge \dots \wedge \pm\phi_n$ dove $\pm\phi_i$ è ϕ_i oppure $\neg\phi_i$ [1] . Ci sono in tutto 2^n clausole. Ciascuna clausola implica ψ oppure implica $\neg\psi$ (in quanto il valore di verità di una clausola determina il valore delle combinazioni booleane delle ϕ_i). La ψ equivale alla disgiunzione della clausole che la implicano. □

Definizione 5.4. Una teoria T ammette **eliminazione dei quantificatori** (EQ) se e solo se ogni formula $\varphi(\overline{x})$ equivale, in T, ad una formula senza quantificatori.

Definizione 5.5. Una **formula primitiva** è una formula della forma $\exists x \phi$ dove ϕ è una congiunzione di formule atomiche e di negazioni di formule atomiche.

Lemma 5.6. *Una teoria T ammette EQ se e solo se ogni formula primitiva equivale ad una formula senza quantificatori.*

Dimostrazione. Per avere EQ è sufficiente che ogni formula della forma $\exists x \phi$, con ϕ senza quantificatori, equivalga ad una formula senza quantificatori (in quanto poi possiamo induttivamente eliminare tutti i quantificatori procedendo da quelli più interni a quelli più esterni). Mettendo ϕ in forma normale disgiuntiva ed

[1] Esiste anche una nozione duale di clausola ottenuta scambiando i ruoli di $\wedge$ e $\vee$.

osservando che $\exists x(\alpha \vee \beta)$ equivale a $\exists x\alpha \vee \exists x\beta$, possiamo ulteriormente supporre che ϕ sia una congiunzione di formule atomiche o negazioni di formule atomiche, e ci riduciamo così alle formule primitive. $\square$

Teorema 5.7. *ACF ammette EQ.*

Dimostrazione. Nel linguaggio di ACF le formule primitive sono della forma

$$\exists x(\bigwedge_{i<m} t_i = 0 \wedge \bigwedge_{j<n} u_j \neq 0)$$

dove i t_i e gli u_j sono termini polinomiali. Osserviamo che $u_j \neq 0$ equivale a $\exists y(u_j y = 1)$. Facendo questa sostituzione e spostando il quantificatore $\exists y$ all'esterno della formula primitiva, ci riduciamo al problema di eliminare il quantificatore in una formula della forma

$$\varphi(x) := \exists x(\bigwedge_{i<m} t_i = 0)$$

Possiamo assumere che ciascun t_i sia un polinomio di grado > 0 in x altrimenti portiamo t_i =0 fuori dal quantificatore.

Caso 1. Supponiamo $m = 0$. Dobbiamo eliminare il quantificatore da $\varphi(x) := \exists x(t_0 = 0)$. Possiamo assumere che $t_0 = a_0 x^{n_0} + r_0$ dove $n_0 > 0$, il termine a_0 non contiene la x ed r_0 è un polinomio in x di grado minore di n_0. Poiché in un campo algebricamente chiuso ogni polinomio non nullo ha uno zero, la $\varphi(x)$ equivale in questo caso alla formula $a_0 \neq 0 \vee (a_0 = 0 \wedge \exists x(r_0 = 0))$ (ricordiamo che il termine a_0 può contenere variabili diverse da x, ad esempio a_0 stesso può essere una variabile). Possiamo ora procedere per induzione per eliminare il quantificatore da $\exists x(r_0 = 0)$.

Caso 2. Supponiamo $m > 0$. Scriviamo, con le stesse convenzioni di prima, $t_0 = a_0 x^n + r_0$ e analogamente $t_1 = a_1 x^{n_1} + r_1$. Possiamo assumere $n_0 \geq n_1 > 0$. Distinguiamo due casi a seconda dell'annullarsi di a_1 (il quale può dipendere da variabili diverse da x). Nel caso $a_1 \neq 0$ consideriamo la divisione euclidea di t_0 per t_1. Più precisamente notiamo che $t_0 = 0 \wedge t_1 = 0$ equivale a

$$(a_1 = 0 \wedge t_0 = 0 \wedge r_1 = 0) \bigvee (a_1 \neq 0 \wedge t_0' = 0 \wedge t_1 = 0)$$

dove $t_0' := a_1 t_0 - a_0 x^{n_0 - n_1} t_1$. Poiché a_1 non dipende da x la $\varphi(x)$ equivale dunque a

$$\big(a_1 = 0 \wedge \exists x(t_0 = 0 \wedge r_1 = 0 \wedge \bigwedge_{2 \leq i < m} t_i = 0)\big) \bigvee \big(a_1 \neq 0 \wedge \exists x(t_0' = 0 \wedge t_1 = 0 \wedge \bigwedge_{2 \leq i < m} t_i = 0)\big).$$

Siccome i gradi dei polinomi sono diminuiti possiamo procedere per induzione per eliminare i due rimanenti quantificatori esistenziali dalle rispettive sottoformule (quando i gradi in x arrivano a zero portiamo le corrispondenti formule fuori dal quantificatore $\exists x$). $\square$

Osservazione 5.8. In termini geometrici il teorema dice che ogni insieme definibile in un campo algebricamente chiuso è **costruibile**, ovvero è una combinazione booleana di insiemi Zariski-chiusi (zeri di polinomi).

Ricordiamo che un'immersione $f : M \to N$ di L-strutture è per definizione un morfismo che è un isomorfismo verso la propria immagine.

Esercizio. Una funzione $f : M \to N$ è un'immersione se e solo se per ogni L-formula atomica $\varphi(\overline{x})$ (o equivalentemente per ogni formula senza quantificatori) e per ogni n-tupla $\overline{a}$ di elementi di M, si ha $M \models \varphi(\overline{a})$ se e solo se $N \models \varphi(f\overline{a})$.

Definizione. Diremo che $f : M \to N$ è una **immersione elementare**, se l'equivalenza $M \models \varphi(\overline{a}) \iff N \models \varphi(f\overline{a})$ vale per ogni formula $\varphi(\overline{x})$, non necessariamente senza quantificatori. Se M è una sottostruttura di N, diremo che M è una **sottostruttura elementare** di N se l'inclusione è una immersione elementare.

Esempio 5.9. Consideriamo l'ordine totale $(\mathbb{Z}, <)$ dei numeri interi. Come ordine totale, i numeri pari $2\mathbb{Z}$ sono una sottostruttura di $\mathbb{Z}$, e c'è inoltre un isomorfismo d'ordine $2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$ tra le due strutture. Tuttavia $2\mathbb{Z}$ non è una sottostruttura elementare di $\mathbb{Z}$ in quanto ad esempio la formula $\exists x(0 < x \land x < 2)$, a parametri in $2\mathbb{Z}$, è vera in $\mathbb{Z}$ ma non in $2\mathbb{Z}$.

Definizione 5.10. Una teoria T si dice **model-completa** se ogni immersione di modelli di T è una immersione elementare.

Proposizione 5.11. *Se T ammette eliminazione dei quantificatori allora è model completa.*

Dimostrazione. Segue dal fatto che le formule senza quantificatori sono vere in una struttura se e solo se lo sono in una soprastruttura. □

Definizione 5.12. La teoria ACF_0 dei campi algebricamente chiusi di caratteristica zero si ottiene da ACF con l'aggiunta dello schema infinito di assiomi $1 \neq 0,\ 1+1 \neq 0,\ 1+1+1 \neq 0$, ecc. Per p primo, la teoria ACF_p dei campi algebricamente chiusi di caratteristica p is ottiene aggiungendo a ACF l'assioma $p = 0$, dove $p := 1 + 1 + \ldots + 1$.

Teorema 5.13. *ACF_0 e ACF_p sono complete.*

Dimostrazione. Dato un enunciato φ dobbiamo mostrare che esso è vero in un modello di ACF_0 se e solo se è vero in tutti i modelli. Per il Teorema 5.7 basta dimostrare questo fatto per le formule senza quantificatori. Ma questo è ovvio in quanto una formula senza quantificatori vale in un modello K di T se e solo se vale nel suo sottocampo primo $\mathbb{Q} \subseteq K$. Lo stesso ragionamento vale in caratteristica p osservando che ogni campo di caratteristica p contiene un sottocampo isomorfo a $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. □

Più in generale abbiamo:

Proposizione 5.14. *Sia T una L-teoria.*

1. *Se T ha EQ ed esiste una struttura P (non necessariamente modello di T) che si immerge in ogni modello, allora T è completa.*

2. *Se T è model completa e possiede un modello P che si immerge in qualunque altro modello, allora è completa.*

Dimostrazione. In entrambi i casi un enunciato φ è vero in un qualsiasi modello di T se e solo se è vero in P. Ne segue che tutti i modelli di T verificano gli stessi enunciati e quindi T è completa. $\square$

Osservazione 5.15. Un'altra dimostrazione della completezza di ACF_0 e ACF_p si ottiene dal fatto che entrambe sono teorie $\aleph_1$-categoriche: ogni modello di cardinalità più che numerabile è determinato a meno di isomorfismo dalla cardinalità di una base di trascendenza sul campo primo. Ad esempio ogni modello di ACF_0 di cardinalità $\aleph_1$ è isomorfo alla chiusura algebrica di $\mathbb{Q}(x_i : i < \aleph_1)$ dove le x_i sono "variabili" (ovvero una base di trascendenza).

Corollario 5.16 (Principio di Lefschetz)**.** *Sia σ una formula nel linguaggio dei campi. Sono equivalenti:*

1. *σ è vera nel campo dei complessi $\mathbb{C}$.*

2. *σ è vera in tutti i campi algebricamente chiusi di caratteristica zero.*

3. *Per infiniti numeri primi p, σ è vera in tutti in tutti i campi algebricamente chiusi di caratteristica p.*

Dimostrazione. Se σ è vera in $\mathbb{C}$, allora per completezza $ACF_0 \models \sigma$, e per compattezza basta un sottoinsieme finito degli assiomi di ACF_0 a dedurre σ. Ne segue che σ vale in tutti i campi algebricamente chiusi di caratteristica abbastanza grande. Analogamente se σ è falsa in $\mathbb{C}$ allora $ACF_0 \models \neg\sigma$ e σ è falsa in tutti i campi algebricamente chiusi di caratteristica abbastanza grande. $\square$

Corollario 5.17 (Ax)**.** *Sia $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ una mappa polinomiale iniettiva. Allora f è surgettiva.*

Dimostrazione. Sia $f(\overline{x}) = (f_1(\overline{x}), \dots, f_n(\overline{x}))$ e supponiamo che, per ogni i, $f_i \in \mathbb{C}[\overline{x}]$ sia di grado totale $\leq d$. Quantificando sui coefficienti possiamo trovare una formula del primo ordine $\Theta_{n,d}$ che afferma che ogni mappa polinomiale iniettiva f in n variabili e di grado totale $\leq d$ è surgettiva. Chiaramente $\Theta_{n,d}$ è vera nei campi finiti. Ne segue che essa vale anche nell'unione crescente $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_n$ di una famiglia di campi finiti: infatti se i coefficienti di f appartengono a K_n la restrizione di f ad ogni K_m con $m \geq n$ è surgettiva verso K_m. In particolare $\Theta_{n,d}$ vale nella chiusura algebrica di ogni campo finito e dunque, per la completezza di ACF_p, in tutti i modelli di ACF_p per ogni p. Per il principio di Lefschetz $\Theta_{n,d}$ vale in $\mathbb{C}$. $\square$

Corollario 5.18 (Hilbert's Nullstellensatz, prima forma)**.** *Sia K un campo algebricamente chiuso. Sia $P(x_1, \dots, x_n) = 0$ un sistema finito di equazioni polinomiali in $x_1, \dots, x_n$ a coefficienti in K. Se P ha una soluzione in qualche campo L che estende K, allora ha soluzione in K.*

Dimostrazione. Ogni campo ha una chiusura algebrica. Quindi possiamo assumere L algebricamente chiuso. La formula $\exists \overline{x} P(\overline{x}) = 0$ è vera in L. Per la model completezza essa è vera anche nella sottostruttura K. $\square$

La seguente forma del Nullstellensatz si deduce usando il "trucco di Rabinowitsch".

Corollario 5.19 (Hilbert's Nullstellensatz, seconda forma)**.** *Sia K un campo algebricamente chiuso. Se un polinomio $f \in K[\overline{x}]$ si annulla ogniqualvolta si annullano i polinomi $f_1, \dots, f_m$, allora qualche potenza di f è nell'ideale generato da $f_1, \dots, f_m$.*

Dimostrazione. Per le ipotesi i polinomi $f_1, \dots, f_m$, $1 - yf$ non hanno zeri comuni (dove y è una nuova variabile) nel campo K o equivalentemente, per la model completezza, in qualsiasi estensione L di K (se avessero zeri comuni in $L \supseteq K$ li avrebbero anche nella chiusura algebrica di L e per la model completezza di ACF anche in K). Per la prima forma del Nullstellensatz l'ideale I generato da questi polinomi è l'ideale unitario di $K[\overline{x}, y]$ (altrimenti, prendendo un ideale massimale $\mathfrak{m}$ che estende I, i suddetti polinomi avrebbero uno zero comune nell'estensione $K[\bar{x}, y]/\mathfrak{m}$ di K). Sostituendo $y = 1/f$ e liberandosi dai denominatori così introdotti si ottiene il risultato. $\square$

Fatto 5.20. *Una teoria completa e ricorsivamente assiomatizzata è decidibile: esiste un algoritmo per stabilire se un enunciato è conseguenza della teoria.*

Dimostrazione. Si vedano gli appunti del mio corso di logica `http://www.dm.unipi.it/~berardu/Didattica/2013-14LM/Appunti-revised-v4.pdf`. In particolare il Corollario 16.9. $\square$

Corollario 5.21. *Le teorie ACF_0 e ACF_p sono decidibili.*

Dimostrazione. Segue dal Fatto 5.20 oppure direttamente dalla dimostrazione costruttiva del teorema di eliminazione dei quantificatori, osservando che è banale verificare se una formula chiusa senza quantificatori valga nel sottocampo primo ($\mathbb{Q}$ o $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$). $\square$

Esiste dunque un algoritmo per stabilire se un enunciato del primo ordine nel linguaggio degli anelli è vero in $\mathbb{C}$, o nella chiusura algebrica di un campo finito. La dimostrazione che passa per il Fatto 5.20 non fornisce stime sulla complessità dell'algoritmo, quella che passa per la dimostrazione costruttiva di EQ fornisce stime primitive ricorsive.

Esercizio 5.22. Dimostrare la decidibilità di ACF.

Esercizio 5.23. Dimostrare EQ per la teoria DLO degli ordini densi senza estremi. Il linguaggio è $L = \{<\}$. Un modello di DLO è un ordine totale denso (tra due elementi ce ne è sempre un terzo) senza un massimo o un minimo.

6 Isomorfismi parziali

Gli isomorfismi parziali sono uno strumento fondamentale della teoria dei modelli. Possono essere usati per dimostrare teoremi di eliminazione dei quantificatori, la ω-categoricità, o la completezza di alcune teorie. Esemplificheremo la tecnica dimostrando l'eliminazione dei quantificatori, la ω-categoricità e la completezza della teoria degli ordini densi senza estremi. Simili risultati valgono per la teoria del grafo random.

6.1 Teorema di isomorfismo di Scott

Definizione 6.1. Siano M ed N due L-strutture e siano $A \subseteq \mathrm{dom}(M)$ e $B \subseteq \mathrm{dom}(N)$ sottoinsiemi. Diciamo che una funzione $f : A \to B$ è un **isomorfismo parziale** da M ad N se per ogni formula atomica (o equivalentemente per ogni formula senza quantificatori) $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in L$ e per ogni $a_1, \ldots, a_n \in A$ vale $M \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ se e solo se $N \models \varphi(fa_1, \ldots, fa_n)$. Si noti in particolare che f deve essere iniettiva (si prenda come φ la formula $x_1 = x_2$). Se la stessa condizione vale per tutte le formule di L (non solo quelle senza quantificatori) diciamo che f è una **mappa elementare**. Se A coincide con il dominio di M ritroviamo il concetto precedentemente visto di immersione elementare.

Osservazione 6.2. Siano M ed N due L-strutture. Dati due sottoinsiemi *non vuoti* $A \subseteq \mathrm{dom}(M)$ e $B \subseteq \mathrm{dom}(N)$, una funzione $f : A \to B$ è un isomorfismo parziale da M ad N se e solo se si può estendere ad un isomorfismo $f : \langle A \rangle \to \langle B \rangle$ tra la sottostruttura di M generata da A la sottostruttura di N generata da B.

Se A e B sono vuoti, f è la funzione vuota, e in base alle definizioni essa è un isomorfismo parziale da M ad N se e solo se M ed N verificano le stesse formule chiuse senza quantificatori. Se in L vi è almeno un simbolo di costante ciò equivale a dire che esiste un isomorfismo tra la sottostruttura di M generata dalle costanti e la sottostruttura di N generata dalle costanti.

Definizione 6.3. Data una famiglia I di isomorfismi parziali da M ad N diciamo che I verifica la **proprietà del va e vieni**, se valgono le seguenti condizioni:

1. per ogni $f \in I$ e per ogni $a \in M$ esiste $g \in I$ che estende f e contiene a nel suo dominio;
2. per ogni $f \in I$ e per ogni $b \in N$ esiste $g \in I$ che estende f e contiene b nella sua immagine.

Diciamo che M è **parzialmente isomorfa** ad N, $M \cong_p N$, se esiste una famiglia non vuota di isomorfismi parziali finiti I da M ad N con la proprietà del va e e vieni.

Esempio 6.4. $(\mathbb{R}, <) \cong_p (\mathbb{Q}, <)$.

Teorema 6.5 (Teorema dell'isomorfismo di Scott)**.** *Se $M \cong_p N$ ed M e N sono numerabili, allora $M \cong N$.*

Dimostrazione. Sia I una famiglia di isomorfismi parziali finiti da M ad N con la proprietà del va e vieni. Enumeriamo M ed N ponendo $M = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $N = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$. Costruiamo un isomorfismo $f : M \to N$ come unione $\bigcup_n f_n$ di isomorfismi parziali finiti $f_n \in I$. Sia f_0 un qualsiasi elemento di I. Induttivamente per definire $f_{n+1} \supseteq f_n$ distinguiamo due casi a seconda che n sia pari o dispari. Se n è pari consideriamo il minimo $i \in \mathbb{N}$ tale che $a_i \notin \mathrm{dom}(f_n)$ e scegliamo $f_{n+1} \in I$ in modo che $f_{n+1} \supseteq f_n$ e $a_i \in \mathrm{dom}(f_{n+1})$. Se n è dispari consideriamo il minimo $i \in \mathbb{N}$ tale che $b_i \notin \mathrm{Im}(f_n)$ e e scegliamo $f_{n+1} \in I$ in modo che $f_{n+1} \supseteq f_n$ e $b_i \in \mathrm{Im}(f_{n+1})$. Lasciamo al lettore la verifica che $\bigcup_n f_n$ è un isomorfismo da M ad N. $\square$

Definizione 6.6. Una teoria T si dice **ω-categorica**, se possiede un unico modello numerabile a meno di isomorfismi.

La teoria degli ordini densi senza estremi è ω-categorica:

Corollario 6.7 (Teorema di Cantor sugli ordini densi)**.** *Se M ed N sono due ordini densi numerabili e senza estremi allora $M \cong N$.*

Dimostrazione. Basta applicare il teorema di isomorfismo di Scott osservando che la famiglia di *tutti* gli isomorfismi parziali finiti da M ad N gode della proprietà del va e vieni. $\square$

Abbiamo fatto discendere il teorema di Cantor dal teorema di Scott, ma quest'ultimo è posteriore e nasce come generalizzazione del teorema di Cantor.

Esempio 6.8. I razionali il cui denominatore è una potenza di 2 sono isomorfi, come ordine, a tutti i razionali.

6.2 Eliminazione dei quantificatori

Diamo un criterio semantico per l'eliminazione dei quantificatori in una singola formula.

Lemma 6.9. *Sia T una L-teoria, sia $\varphi(\overline{y})$ una L-formula e supponiamo che per ogni coppia di modelli M ed N di T e per ogni isomorfismo parziale finito f da M ad N sia abbia $M \models \varphi(\overline{a})$ se e solo se $N \models \varphi(f\overline{a})$ per ogni scelta di parametri $\overline{a}$ da $\mathrm{dom}(f)$. Allora $\varphi(\overline{y})$ equivale in T ad una formula senza quantificatori.*

Dimostrazione. Sia $\Gamma(\overline{y})$ l'insieme delle formule senza quantificatori dimostrabili in $T \cup \varphi(\overline{y})$.

Asseriamo che $T \cup \Gamma(\overline{y}) \vdash \varphi(\overline{y})$. Una volta effettuata questa verifica, per compattezza una congiunzione finita di formule di $\Gamma(\overline{y})$ (possibilmente consistente nella congiunzione vuota $\perp$) equivale a $\varphi(\overline{y})$ e abbiamo concluso.

Per assurdo sia $(A, \overline{a})$ un modello di $T \cup \Gamma(\overline{y}) \cup \neg\varphi(\overline{y})$. Ciò significa che A è un modello di T ed $\overline{a}$ è una tupla di elementi di A tale che $A \models \Gamma(\overline{a})$ e $A \models \neg\varphi(\overline{a})$.

Sia $D(\overline{y})$ l'insieme delle formule senza quantificatori $\psi(\overline{y})$ tali che $A \models \psi(\overline{a})$.

Affermo che $T \cup D(\overline{y}) \cup \varphi(\overline{y})$ è coerente (come teoria nel linguaggio $L \cup \{\overline{y}\}$). Se così non fosse per compattezza esisterebbe una formula $\psi(\overline{y}) \in D(\overline{y})$ tale che $T \cup \psi(\overline{y}) \vdash \neg\varphi(\overline{y})$, o equivalentemente $T \cup \varphi(\overline{y}) \vdash \neg\psi(\overline{y})$. Ciò significa che $\neg\psi(\overline{y}) \in \Gamma(\overline{y})$ e raggiungiamo l'assurdo $A \models \neg\psi(\overline{a})$ e $A \models \psi(\overline{a})$.

Sia ora $(B, \overline{b})$ un modello di $\mathrm{T} \cup \mathrm{D}(\overline{\mathrm{y}}) \cup \varphi(\overline{\mathrm{y}})$. Osserviamo che $D(\overline{y})$ è al tempo stesso sia l'insieme delle formule senza quantificatori verificate da $\overline{a}$ in A sia l'insieme delle formule senza quantificatori verificate da $\overline{b}$ in B. Ciò significa che la funzione f che manda $\overline{a}$ in $\overline{b}$ (ciascuna componente a_i nel corrispondente b_i) è un isomorfismo parziale da A ad B [2].

Per ipotesi $A \models \varphi(\overline{a})$ se e solo se $B \models \varphi(\overline{b})$, contro le ipotesi. □

Corollario 6.10. *Se tutti gli isomorfismi parziali finiti tra modelli di T sono elementari, allora T elimina i quantificatori.*

Dimostrazione. Se f è elementare soddisfa le ipotesi di 6.9. □

Proposizione 6.11. *Se I è una famiglia di isomorfismi parziali da M ad N con la proprietà del va e vieni, allora ogni $f \in I$ è una mappa elementare, ovvero preserva non solo le formule atomiche, ma tutte le formule.*

Dimostrazione. Mostriamo che f preserva $\theta(\bar{x})$ per induzione sulla complessità di $\theta(\bar{x})$. L'unico caso non banale è quello di una formula $\theta(\overline{x})$ della forma $\exists y \varphi(x, \overline{y})$. Supponiamo che $M \models \exists x \varphi(x, \overline{a})$ con $\overline{a} \subset \mathrm{dom}(f)$. Dobbiamo mostrare che $N \models \exists x \varphi(x, f\overline{a})$. Sia $c \in M$ tale che $M \models \varphi(c, \overline{a})$. Per la proprietà del va e vieni f ha un'estensione $g \in I$ con $c \in \mathrm{dom}(g)$ e sia $d = gc$. Per ipotesi induttiva $N \models \varphi(d, f\overline{a})$ e quindi $N \models \exists x \varphi(x, f(\overline{a}))$. Il viceversa è analogo. □

Teorema 6.12. *Sia T una L-teoria e supponiamo che l'insieme di tutti gli isomorfismi parziali finiti tra modelli di T abbia la proprietà del va e vieni. Allora T ammette EQ.*

Dimostrazione. Per la Proposizione 6.11 e il Corollario 6.10. □

Corollario 6.13. *Se $M \cong_p N$ (ovvero esiste una famiglia non vuota di isomorfismi parziali tra M ed N con la proprietà del va e vieni), allora $M \equiv N$. Se ciò accade per ogni coppia di modelli di una teoria T, allora T è completa.*

Dimostrazione. Consideriamo un isomorfismo parziale f tra M ed N appartenenente ad una famiglia con la proprietà del va e vieni. Tale f è una mappa elementare e deve quindi in particolare preservare la verità delle L-formule chiuse. Dunque $M \equiv N$ e ciò basta a concludere. □

Teorema 6.14. *La teoria degli ordini densi senza estremi ammette EQ ed è completa.*

Dimostrazione. L'insieme di tutti gli isomorfismi parziali finiti tra due ordini densi senza estremi è non vuoto e gode della proprietà del va e vieni. Possiamo quindi applicare 6.12 e 6.13. □

[2] Si noti che se $\overline{y}$ è la lista vuota, f potrebbe essere la funzione vuota, ma ciò non è un problema: la definizione di isomorfismo parziale che abbiamo dato tiene conto di questo caso.

6.3 Teoria dei grafi random

Definizione 6.15 (Grafo random)**.** *Consideriamo un grafo aleatorio con insieme dei vertici $\mathbb{N}$ generato dal seguente processo probabilistico. Dati due vertici distinti $a, b \in \mathbb{N}$ tiriamo una moneta. Se esce testa mettiamo la coppia (a, b) nell'insieme E dei lati del grafo, se esce croce non la mettiamo (supponiamo che il grafo sia simmetrico: se $(a, b) \in E$ anche $(b, a) \in E$). Supponendo che la moneta sia onesta (probabilità $1/2$) e che gli esisti dei lanci siano tra loro indipendenti, considerazioni probabilistiche dimostrano che il grafo così ottenuto, con probabilità 1, verifica i seguenti assiomi, formulati nel linguaggio con un simbolo di relazione binaria E.*

1. $E(x, y) \to E(y, x)$
2. $\neg E(x, x)$
3. Per ogni coppia di insiemi finiti di vertici $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ e $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, con A disgiunto da B, esiste un vertice c connesso a tutti i vertici di A (in simboli $\bigwedge_{i \leq m} E(c, a_i)$), e sconnesso da tutti quelli di B (in formule $\bigwedge_{i \leq n} \neg E(b_i, c)$.

Il terzo gruppo di assiomi è formulabile con uno schema di assiomi del primo ordine. Più precisamente, per ogni $m, n \in \mathbb{N}$ abbiamo un assioma $\Psi_{m,n}$ che esprime la proprietà (3) per tutte le possibili scelte di A, B di cardinalità m, n rispettivamente. Chiamiamo **grafo random** un qualunque modello di questi assiomi.

Il seguente risultato mostra che esiste un unico grafo random numerabile a meno di isomorfismi.

Teorema 6.16. *Abbiamo:*

1. *Due qualsiasi modelli M ed N della teoria dei grafi random sono parzialmente isomorfi.*
2. *La teoria dei grafi random è ω-categorica: esiste un unico grafo random numerabile a meno di isomorfismi.*
3. *La teoria dei grafi random è completa*

Dimostrazione. Basta mostrare che la famiglia di tutti gli isomorfismi parziali finiti tra modelli M ed N della teoria dei grafi random gode della proprietà del va e vieni (ed è ovviamente non vuota: basta mandare un vertice di M in un vertice comunque scelto di N). Dato un isomorfismo parziale finito $f : S \to S'$ con $S \subseteq \mathrm{dom}(M)$ e $S' \subseteq \mathrm{dom}(N)$ ed un nuovo elemento $c \in \mathrm{dom}(M)$, partizioniamo S nel sottoinsieme A degli elementi connessi a c e il sottoinsieme B di quelli sconnessi da c. La f induce una partizione di S' nei due insiemi $A' := f(A)$ e $B' := f(B)$. Per le proprietà dei grafi random esiste $c' \in \mathrm{dom}(N)$ connesso a tutti i vertici di A' e sconnesso da quelli di B' e possiamo estendere f mandando c in c'. □

Esercizio 6.17. La teoria delle algebre di Boole senza atomi è completa.

7 Teoria del primo ordine dei numeri reali

In questa sezione diamo un'assiomatizzazione della teoria completa $Th(\mathbb{R})$ del campo ordinato $(\mathbb{R}, <, 0, 1, +, \cdot)$ e mostriamo che essa ammette eliminazione dei quantificatori. A partire da questo risultato dimostriamo che ogni polinomio definito positivo $f(\overline{x}) \in \mathbb{R}[\overline{x}]$ è somma di quadrati di funzioni razionali (teorema di Artin).

L'assiomatizzazione cercata per la teoria dei reali è la seguente:

Definizione 7.1. Sia $RCOF$ la teoria nel linguaggio $L = \{+, \cdot, 0, 1, \leq\}$ assiomatizzata da:

1. Gli assiomi dei campi ordinati;
2. Uno schema infinito di assiomi, uno per ogni grado $d \in \mathbb{N}$, per dire che ogni polinomio di grado d a coefficienti nel campo che assume valori positivi e negativi ha uno zero.

Un campo ordinato si dice **reale chiuso** se verifica gli assiomi $RCOF$.

Dimostreremo che $RCOF$ è un'assiomatizzazione completa di $Th(\mathbb{R})$.

Fatto 7.2. *In un campo ordinato reale chiuso ogni polinomio si fattorizza in fattori lineari e quadratici.*

Definizione 7.3. Sia T una L-teoria e sia A una L-struttura, non necessariamente modello di T. Diciamo che un modello B di T è una T**-chiusura** di A se esiste un'immersione $f : A \to B$ e se, per ogni altra immersione $g : A \to C$ in un modello C di T, esiste un'immersione $j : B \to C$ tale che $g = j \circ f$.

Fatto 7.4 (Artin–Schreier)**.** *Ogni sottostruttura F di un modello M di $RCFO$ ha una $RCFO$-chiusura K, chiamata chiusura reale, che è unica a meno di isomorfismi che fissano F. Possiamo inoltre prendere come K la sottostruttura di M costituita dall'insieme degli elementi di M algebrici su F (o equivalentemente algebrici sul sottocampo generato da F).*

Prima di dimostare il teorema di eliminazione dei quantificatori diamo un esempio.

Esempio 7.5. La formula $\exists x(x^2 + bx + c = 0)$ equivale in $\mathbb{R}$ alla formula senza quantificatori $4c < b^2$. Un altro esempio è dato dalla formula $\exists xy((x \neq 0 \vee y \neq 0) \wedge ax + by = 0 \wedge cx + dy = 0)$, la quale asserisce l'esistenza di una soluzione non nulla (x, y) del sistema lineare

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tale formula equivale in $\mathbb{R}$ alla formula senza quantificatori $ad = bc$, ovvero al fatto che il determinante della matrice è nullo. La presenza del simbolo $<$ nella segnatura è necessario per avere l'eliminazione dei quantificatori. La formula $\exists x(x^2 = y)$ equivale alla formula senza quantificatori $0 < y \vee 0 = y$ ma non equivale a nessuna formula senza quantificatori che non usi il $<$.

Teorema 7.6. *La teoria RCOF dei campi ordinati reali chiusi ammette EQ nel linguaggio $L = \{0, 1, +, \cdot, <\}$. In particolare RCOF è model completa.*

Dimostrazione. Siano M_1 ed M_2 due modelli di $RCOF$ e sia $f : \mathrm{dom}(f) \to \mathrm{Im}(f)$ un isomorfismo parziale finito da M_1 ad M_2. Sia $\exists x\varphi(x, \overline{y})$ una L-formula primitiva e sia $\overline{b}$ una tupla da $\mathrm{dom}(f)$. Supponiamo che $M_1 \models \exists x\varphi(x, \overline{b})$. Il nostro obiettivo è dimostrare che $M_2 \models \exists x\varphi(x, f\overline{b})$. Fatto ciò, in base al criterio 6.9, possiamo concludere che $\exists x\varphi(x, \overline{y})$ equivale ad una formula senza quantificatori. Essendo $\exists x\varphi(x, \overline{y})$ una generica formula primitiva e ne segue che $RCOF$ ha EQ.

Per raggiungere il nostro scopo, sia $R_1 \subseteq M_1$ l'insieme degli elementi di M_1 algebrici su $\mathrm{dom}(f)$ (o equivalentemente sul sottocampo generato da $\mathrm{dom}(f)$) e sia $R_2 \subseteq M_2$ l'insieme degli elementi di M_2 algebrici su $\mathrm{Im}(f)$. Per l'unicità della chiusura reale f si estende ad un isomorfismo $f : R_1 \to R_2$. Per semplificare la notazione possiamo assumere che $R = R_1 = R_2$ e che f sia la funzione identità su R. Poiché $x \neq y$ equivale a $x < y \vee y < x$, possiamo assumere (distribuendo $\exists$ su $\vee$) che $\varphi(x, \overline{y})$ sia della forma

$$\bigwedge_i f_i(x, \overline{y}) = 0 \wedge \bigwedge_j g_j(x, \overline{y}) > 0$$

per certi polinomi $f_i, g_j \in R[x, \overline{y}]$.

Sia $a \in M_1$ tale che $M_1 \models \varphi(a, \overline{b})$. Se qualche $f_i(x, \overline{b})$ è diverso dal polinomio nullo, allora a è algebrico su R e dunque appartiene ad R stesso. Essendo R incluso in M_2 possiamo concludere che $M_2 \models \exists x\varphi(x, \overline{b})$ come desiderato (se non avessimo assunto che f è l'identità avremmo qui dovuto sostituire $\overline{b}$ con $f\overline{b}$ e i coefficienti dei vari polinomi con le loro immagini tramite f). Nel caso contrario $\varphi(x, \overline{b})$ equivale a

$$\bigwedge_j g_j(x, \overline{b}) > 0$$

Fattorizzando $g_j(x, \overline{b})$ in fattori lineari o quadratici in $R[x]$, e osservando che i fattori quadratici non cambiano segno, si verifica che la condizione $g_j(x) > 0$ equivale ad un sistema di disuguaglianze della forma $c_i < x$ oppure $x < d_i$ dove gli elementi $c_i, d_i \in R$ sono le radici dei fattori lineari di g_j. Dunque in questo caso la $\varphi(x, \overline{b})$ equivale ad una formula della forma

$$\bigwedge_k (c_k < x) \wedge \bigwedge_i (x < d_i)$$

per certi $c_k, d_i \in R$. Poiché tali condizioni sono soddisfatte in M_1 dall'elemento $x = a$, ogni c_k deve essere minore di ciascun d_i. Prendendo come c il massimo dei c_k (o ponendo $c = -\infty$ se non vi sono c_k) e come d il minimo dei d_i (o ponendo $d = +\infty$ in loro assenza) abbiamo che $\varphi(x, \overline{b})$ equivale a

$$c < x < d.$$

Essendo $c < d$ esiste allora sicuramente un $a' \in M_2$ tale che $M_2 \models \varphi(a', \overline{b})$ e abbiamo la tesi desiderata. $\square$

Corollario 7.7. *Si ha:*

1. *$RCOF$ è model completa.*
2. *$RCOF$ è completa ed equivale alla teoria completa del campo ordinato $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Basta usare EQ e il fatto che tutti i modelli di $RCOF$ hanno $\mathbb{Q}$ come sottostruttura comune a meno di isomorfismi. □

Il seguente teorema fornisce una soluzione al diciassettesimo problema di Hilbert. La dimostrazione che passa per la model completezza è di A. Robinson.

Teorema 7.8 (Artin)**.** *Ogni polinomio $f(\overline{x}) \in \mathbb{R}[\overline{x}]$ definito positivo è somma di quadrati di funzioni razionali, ovvero possiamo scrivere*

$$f(\overline{x}) = \Sigma_{i=1}^{k} \frac{p_i(\overline{x})^2}{q_i(\overline{x})^2},$$

dove p_i, q_i sono polinomi. (Non è in generale possibile scrivere $f(\overline{x})$ come somma di quadrati di polinomi.)

Dimostrazione. Nel caso contrario si verifica (vedi Cor A7 in `http://homepages.math.uic.edu/~marker/orsay/real_algebra.pdf`) che possiamo estendere l'ordine di $\mathbb{R}$ ad un ordine sul campo $\mathbb{R}(\overline{x})$ in cui l'elemento $f(\overline{x}) \in \mathbb{R}[\overline{x}]$ è negativo. Sia K una chiusura reale di $\mathbb{R}(\overline{x})$. In K vale la formula $\exists \overline{y} f(\overline{y}) < 0$ (prendendo come $\overline{y}$ proprio $\overline{x}$). Per la model completezza di $RCOF$ tale formula vale anche in $\mathbb{R}$, contro le ipotesi. □

8 Diagrammi

Definizione 8.1. Data una L-struttura M ed un sottoinsieme A del suo dominio, indichiamo con L_A il linguaggio ottenuto aggiungendo ad L un nuovo simbolo di costante c_a per ogni $a \in A$ e con $Th(M, a)_{a \in A}$ la L_A-teoria assiomatizzata da tutti gli enunciati $\varphi(c_{a_1}, \dots, c_{a_n})$ tali che $M \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$. In altre parole $Th(M, a)_{a \in A}$ è la teoria completa della L_A-struttura $(M, a)_{a \in A}$ che espande M al linguaggio L_A interpretando la costante $c_a \in L_A$ con l'elemento $a \in \mathrm{dom}(M)$. Il **diagramma elementare** $ED(M)$ di M è la teoria $Th(M, a)_{a \in A}$ con $A = \mathrm{dom}(M)$.

Lemma 8.2. *Date due L-strutture M ed N, e dato $A \subseteq \mathrm{dom}(M)$, N può essere espansa ad un modello di $Th(M, a)_{a \in A}$ se e solo se esiste una mappa elementare $f : A \to N$. La f manda a nell'intepretazione in N della costante $c_a \in L_A$ associata all'elemento a. In particolare M può essere immersa elementarmente in N se e solo se N può essere espansa ad un modello di $ED(M)$.*

Dimostrazione. Supponiamo che $f \colon A \to N$ sia una mappa elementare. Espandiamo N ad una L_A-struttura N' interpretando $c_m \in L_M$ con $f(m)$. È immediato verificare che $N' \models Th(M, a)_{a \in A}$. Viceversa se N ammette una espansione N' ad un modello di $Th(M, a)_{a \in A}$, allora la funzione $f \colon A \to N$ che manda a nell'interpretazione di c_a in N' è una mappa elementare di A in N. □

Corollario 8.3. *Dato un insieme T di L-enunciati e una L-strtuttura M, la teoria $ED(M) \cup T$ è coerente se e solo M può essere immersa elementarmente in un modello N di T.*

8.1 Amalgamazione di immersioni elementari e modello mostro

Lemma 8.4. *Siano M, N due L-strutture elementarmente equivalenti. Allora esiste una L-struttura C ed immersioni elementari $f \colon M \to C$ ed $g \colon N \to C$. (Inoltre possiamo fare in modo che una delle due immersioni sia l'inclusione.)*

Dimostrazione. Dimostriamo la prima parte. Sia $ED(M)$ il diagramma elementare di M formulato nel linguaggio $L \cup \{c_m \mid m \in \mathrm{dom}(M)\}$ dove c_m sono nuovi simboli di costante distinti tra loro, e sia $ED(N)$ il diagramma elementare di N formulato nel linguaggio $L \cup \{d_n \mid n \in \mathrm{dom}(N)\}$ dove d_n sono simboli di costante distinti tra loro e da tutti i c_m (quindi anche se M ed N avessero elementi in comune, le corripondenti costanti sarebbero diverse). È sufficiente mostrare che la teoria $T = ED(M) \cup ED(N)$ è coerente, perché poi basta prendere com C un modello di questa teoria (e come immersioni elementari le funzioni che mandano $m \in M$ nell'interpretazione di c_m in C, ed $n \in N$ nell'interpretazione di d_n in C). Se T fosse incoerente per compattezza lo sarebbe una sua sottoteoria finita. In altre parole ci sarebbero due L-formule $\varphi(\vec{x})$ e $\theta(\vec{x})$ tali che $\varphi(c_{m_1}, \dots, c_{m_k}) \in ED(M)$, $\theta(d_{n_1}, \dots, d_{n_l}) \in ED(N)$ e $\varphi(c_{m_1}, \dots, c_{m_k}) \models \neg\theta(d_{n_1}, \dots, d_{n_l})$. Siccome le costanti sono distinte, ne segue che $\varphi(c_{m_1}, \dots, c_{m_k}) \models \forall x_1, \dots, x_l \neg\theta(x_1, \dots, x_l)$. Poiché $(M, m_1, \dots, m_k)$ è modello dell'antecendente, ne segue che $M \models \forall x_1, \dots, x_l \neg\theta(x_1, \dots, x_l)$, e essendo $N \equiv M$ anche $N \models \forall x_1, \dots, x_l \neg\theta(x_1, \dots, x_l)$, contraddicendo il fatto che $N \models \theta(n_1, \dots, n_l)$. $\square$

Analogamente si dimostra:

Lemma 8.5. *Siano $i \colon P \to M$ e $j \colon P \to N$ immersioni elementari di L-strutture. Allora esiste C ed immersioni elementari $f \colon M \to C$ ed $g \colon N \to C$ tali che $f \circ i = g \circ j$.*

Dimostrazione. Basta aggiungere al comune linguaggio di M ed N costanti per ciascun elemento di P. $\square$

Corollario 8.6. *Data una teoria completa T esiste un **modello mostro** M di T il cui dominio è una classe propria e in cui tutti i modelli "piccoli" (ovvero con domini basati su insiemi) si immergono. Il modello mostro è l'unione $M = \bigcup_{i \in ON} M_i$ di una catena elementare di modelli di T indiciata da tutti i numeri ordinali.*

Dimostrazione. (Cenno) A meno di isomorfismo possiamo indicizzare tutti i modelli piccoli con degli ordinali. Sia N_α il modello con indice α. Definiamo una nuova successione di modelli M_α nel modo seguente. Se α è limite prendiamo l'unione dei modelli precedenti. Per definire $M_{\beta+1}$ osserviamo che $M_\beta \equiv N_\beta$ (in quanto modelli di una teoria completa) e per il Lemma 8.4 esiste $M_{\beta+1} \succeq M_\beta$ in cui N_β si immerge elementarmente. L'unione degli M_α è il modello mostro desiderato (vedi Teorema 9.12). □

9 Tipi e modelli saturi

9.1 Tipi

Definizione 9.1. Data una L-struttura M ed una n-upla di elementi $\overline{a}$ in M, il tipo di $\overline{a}$ in M, $\mathrm{tp}_M(\overline{a})$, è l'insieme $p(\overline{x})$ delle formule $\varphi(\overline{x})$ tali che $M \models \varphi(\overline{a})$.

Esempio 9.2. Consideriamo i seguenti esempi:

1. Il tipo di $\sqrt{2}$ nel campo $\mathbb{C}$ dei complessi, considerato come struttura nel linguaggio $L = \{0, 1, +, \cdot\}$, include la formula $x^2 = 2$ (con le ovvie definizioni $x^2 = x \cdot x$ e $2 = 1 + 1$) e tutte le sue conseguenze. Tale tipo coincide con il tipo di $-\sqrt{2}$ in $\mathbb{C}$. Non si possono distinguere i due tipi in quanto esiste un automorfismo di $\mathbb{C}$ che porta $\sqrt{2}$ in $-\sqrt{2}$.

2. Il tipo di π in $\mathbb{C}$ include tutte le formule della forma $p(x) \neq 0$ dove $p(x)$ è un polinomio non nullo a coefficienti in $\mathbb{Z}$. Esso coincide con il tipo di qualsiasi altro elemento trascendente di $\mathbb{C}$ in quanto, dati due elementi trascendenti, esiste un automorfismo di $\mathbb{C}$ che manda l'uno nell'altro. Si noti che mentre il tipo di $\sqrt{2}$ è determinato da una singola formula ($x^2 = 2$) ciò non avviene per il tipo di un elemento trascendente.

3. Il tipo di $\sqrt{2}$ nel campo ordinato $\mathbb{R}$ è diverso dal tipo di $-\sqrt{2}$, in quanto ad esempio $\mathrm{tp}_{\mathbb{R}}(\sqrt{2})$ comprende la formula $x > 0$ mentre $\mathrm{tp}_{\mathbb{R}}(-\sqrt{2})$ comprende la formula $x < 0$.

4. In $(\mathbb{Q}, +, <)$ vi sono solo tre tipi di elementi: positivi, negativi, zero. Ad esempio 2 e 3 hanno lo stesso tipo in quanto $x \mapsto \frac{3}{2}x$ è un automorfismo della struttura che porta 2 in 3.

5. In $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ tutti gli elementi hanno tipo diverso.

Abbiamo sin qui parlato di *tipi di elementi* di una struttura, ma non abbiamo ancora definito il concetto generale di tipo.

Definizione 9.3. Data una L-struttura M e una n-upla di variabili distinte $\overline{x}$, un n-tipo $p(\overline{x})$ di M è un qualsiasi insieme di L-formule $p(\overline{x}) = \{\varphi_i(\overline{x}) : i \in I\}$ che sia **finitamente realizzato** in M, dove con ciò intendiamo che per ogni sottoinsieme finito $\varphi_1(\overline{x}), \dots, \varphi_k(\overline{x})$ di $p(\overline{x})$ esiste una n-upla $\overline{a}$ in M tale che $M \models \bigwedge_{i \leq k} \varphi(\overline{a})$. Se esiste un $\overline{a}$ in M tale che $M \models \varphi(\overline{a})$ per *tutte* le formule $\varphi(\overline{x}) \in p(\overline{x})$ diremo che il tipo $p(\overline{a})$ è **realizzato** in M da $\overline{a}$, e scriveremo $M \models p(\overline{a})$. Ovviamente se partiamo da un n-upla $\overline{a}$ in M e consideriamo il suo tipo $p(\overline{x}) = \mathrm{tp}_M(\overline{a})$, esso è sempre realizzato in M (da $\overline{a}$ stesso).

Un tipo $p(\overline{x})$ è **completo**, se data una qualsiasi L-formula $\varphi(\overline{x})$, tra le conseguenze logiche di $p(\overline{x})$ vi è $\varphi(\overline{x})$ oppure $\neg\varphi(\overline{x})$.

Esempio 9.4. Prendiamo $n = 1$ e consideriamo gli 1-tipi (tipi in una singola variabile). Nella struttura $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ vi sono in tutto $2^{\aleph_0}$ tipi completi, di cui $\aleph_0$ realizzati e $2^{\aleph_0}$ non realizzati.

Dimostrazione. Ovviamente non vi possono essere più di $\aleph_0$ tipi completi realizzati in quanto $\mathbb{Q}$ ha cardinalità $\aleph_0$. Che ve ne siano esattamente $\aleph_0$ segue dal fatto che gli elementi di $\mathbb{Q}$ hanno tipi distinti. Facciamo vedere che esistono $2^{\aleph_0}$ tipi non realizzati. A tal fine consideriamo un qualunque numero reale $r \in \mathbb{R}$ non razionale e consideriamo il tipo $p_r(x)$ consistente di tutte le formule della forma $q_1 < x$ e $x < q_2$ dove q_1 varia tra i razionali $< r$ e q_2 tra quelli $> r$. Qualunque sottoinsieme finito di formule di questa forma è realizzato in $\mathbb{Q}$. Quindi $p_r(x)$ è un tipo. Al variare di r si ottengono $2^{\aleph_0}$ tipi a due a due incompatibili che si estendono ad altrettanti tipi completi.

Si osservi che, prendendo $r = \sqrt{2}$, la formula $x^2 = 2$ *non* fa parte del tipo $p_r(x)$, nè potrebbe far parte di qualsiasi tipo $p(x)$ di $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ altrimenti $p(x)$ non sarebbe finitamente realizzato in $\mathbb{Q}$. □

Abbiamo parlato di tipi di una struttura. Definiamo ora i tipi di una teoria.

Proposizione 9.5. *Un n-tipo di una L-teoria T è un insieme $p(\overline{x})$ di enunciati nel linguaggio $L \cup \{\overline{x}\}$ tale che $T \cup p(\overline{x})$ è coerente (dove le $\overline{x}$ sono considerate costanti). Ciò equivale a dire che esiste un modello M di T e una tupla $\overline{a}$ in M tale che $M \models p(\overline{a})$.*

Dunque per definizione ogni tipo di T è realizzato in qualche modello di T e i tipi completi di T sono esattamente i tipi delle tuple di qualche modello di T.

Proposizione 9.6. *Sia $p(\overline{x})$ un insieme di $L \cup \{\overline{x}\}$-enunciati, sia T una L-teoria completa e sia M un modello di T (dunque $T = Th(M)$). Sono equivalenti:*

1. *$p(\overline{x})$ è finitamente realizzabile in M;*
2. *$T \cup p(\overline{x})$ è coerente.*

Dimostrazione. Assumendo (1), ogni sottoinsieme finito $\pi(\overline{x})$ di $T \cup p(\overline{x})$ ha un modello (della forma $(M, \overline{a})$). Per il teorema di compattezza ne segue che $T \cup p(\overline{x})$ è coerente. Viceversa da (2) segue che per ogni sottoinsieme finito $\pi(\overline{x})$ di $p(\overline{x})$ si ha $T \vdash \exists \overline{x} \pi(\overline{x})$ e otteniamo (1). □

Esiste una forte analogia tra i tipi e gli ideali negli anelli di polinomi. Se K è un campo, ogni ideale I di $K[x]$, se diverso dall'ideale (1), ha uno zero in qualche estensione di K (in quanto K si immerge in $K[x]/J$, dove J è un ideale massimale che estende I). Analogamente abbiamo:

Lemma 9.7. *Ogni tipo $p(\overline{x})$ di M è realizzato in un'estensione elementare $N \succ M$.*

Dimostrazione. Per le ipotesi $Th(M) \cup p(\overline{x})$ è coerente. Basta dimostrare che anche $ED(M) \cup p(\overline{x})$ è coerente. Se non lo è esiste una congiunzione finita $\pi(\overline{x})$

di formule di $p(\overline{x})$ tale che $ED(M) \cup \pi(\overline{x})$ è incoerente, da cui $M \models \forall \overline{x} \neg \pi(\overline{x})$. Questo è assurdo perché $p(\overline{x})$, essendo un tipo di M, è finitamente soddisfacibile in M. $\square$

Il seguente fatto chiarifica ulteriormente il concetto di tipo dandone un'intepretazione in termini di automorfismi. Ciò permette di stabilire dei collegamenti con la teoria dei Galois e può essere utile per estendere il concetto di tipo ad ambiti più generali della logica del primo ordine (è sufficiente che esista una nozione astratta di "estensione elementare").

Fatto 9.8. *Due elementi a, b di una struttura M hanno lo stesso tipo se e solo se esiste $N \succ M$ e un automorfismo di N che porta a in b.*

Per la dimostrazione vedi il Corollario 11.4.

9.2 Catene elementari

Definizione 9.9. Una catena di L-strutture è una famiglia $(M_i \mid i < I)$ di L-strutture dove $I = (I, <)$ è un insieme totalmente ordinato e per ogni $i < j$ la struttura M_i è una sottostruttura di M_j.

Data una catena $(M_i \mid i \in I)$ di L-strutture, esiste un'unica L-struttura, denotata $\bigcup_i M_i$, il cui dominio è l'unione dei domini delle M_i e tale che ogni M_i è una sottostruttura di $\bigcup_i M_i$. La struttura $\bigcup_i M_i$ viene detta il limite, o l'unione, della catena.

In genere come I prenderemo un ordinale α ordinato dall'appartenenza.

Osservazione 9.10. L'unione di una catena di modelli di una teoria T non è in generale un modello di T. Ad esempio un'unione di ordini discreti può essere un ordine denso. Tuttavia in certi casi lo è: ad esempio l'unione di campi è un campo, e su ciò si basa la costruzione della chiusura algebrica di un campo. Si può dimostrare che i modelli di una teoria T sono chiusi per unioni di catene se e solo se T ammette un'assiomatizzazione di tipo $\forall\exists$, come per l'appunto nel caso dei campi, in cui l'assioma di esistenza di un inverso moltiplicativo ha questa forma (mentre gli altri assiomi sono di tipo universale).

Definizione 9.11. Sia α un ordinale e sia $(M_i \mid i < \alpha)$ una catena di L-strutture. Diciamo che tale catena è elementare se:

1. Per ogni $i < \alpha$, $M_i \prec M_{i+1}$;
2. Per ogni ordinale limite $\lambda < \alpha$ (se ne esistono) $M_\lambda = \bigcup_{i<\lambda} M_i$.

Teorema 9.12 (Tarski)**.** *Il limite $M = \bigcup_{i<\alpha} M_i$ di una catena elementare $(M_i \mid i < \alpha)$ è un'estensione elementare di ciascun membro della catena.*

Dimostrazione. Possiamo supporre che la tesi valga per tutte le catene elementari di lunghezza $< \alpha$. Il caso non banale è quando α sia limite. Dimostriamo per induzione sulla complessità della L-formula $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ che per ogni $i \in I$

e $a_1, \ldots, a_n \in M_i$, $M_i \models \phi(a_1, \ldots, a_n)$ sse $M \models \phi(a_1, \ldots, a_n)$. Se ϕ è atomica ciò segue dal fatto che M_i è una sottostruttura di M. Se ϕ si ottiene tramite un connettivo proposizionale da formule più semplici la verifica è immediata. Supponiamo che ϕ sia $\exists y \theta(\vec{x}, y)$ e $M_i \models \phi(\vec{a})$. Allora $M_i \models \theta(\vec{a}, b)$ per qualche $b \in M_i$. Per ipotesi induttiva $M \models \theta(\vec{a}, b)$ e quindi $M \models \phi(\vec{a})$. Viceversa supponiamo $M \models \phi(\vec{a})$. Quindi $M \models \theta(\vec{a}, b)$ per qualche $b \in M$. Allora $b \in M_j$ per qualche j con $\alpha > j > i$. Per le ipotesi induttive abbiamo $M_j \models \theta(\vec{a}, b)$. Quindi $M_j \models \phi(\vec{a})$. Poiché $M_i \prec M_j$ (per induzione sulla lunghezza della catena), $M_i \models \phi(\vec{a})$. □

9.3 Modelli saturi

Definizione 9.13. Data una L-struttura M e un sottoinsieme $A \subset M$ del suo dominio, un n-tipo di M con parametri da A è, per definizione, un n-tipo della teoria $Th((M, a)_{a \in A})$. Equivalentemente esso è un insieme di formule $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ con parametri da A che è finitamente realizzabile in M.

Esercizio 9.14. Se $N \succ M$ e $A \subset \mathrm{dom}(M)$, gli n-tipi di M con parametri da A, coincidono con gli n-tipi di N con parametri da A. Chiamiamo $S_n(A)$ tale insieme di tipi.

Definizione 9.15. Una L-struttura M si dice ω-satura se per ogni sottoinsieme finito A di M, M realizza tutti gli 1-tipi di M con parametri da A. Più in generale, dato un cardinale infinito κ, M è κ-satura se M realizza tutti gli 1-tipi di M con $< \kappa$ parametri. Infine diciamo che M è satura, se è κ satura per $\kappa = |M|$.

La restrizione agli 1-tipi non è necessaria e possiamo equivalentemente considerare gli n-tipi:

Proposizione 9.16. *Un modello ω-saturo M realizza tutti gli n-tipi di M con un numero finito di parametri.*

Dimostrazione. Dato $p(x, \bar{y}) \in S_{k+1}(A)$, sia $\exists x p(x, \bar{y})$ l'insieme delle formule della forma $\exists x \theta(x, \bar{y})$ con $\theta(x, \bar{y}) \in p(x, \bar{y})$. Si verifica facilmente che $\exists x p(x, \bar{y})$ è un k-tipo. Per induzione è realizzato da qualche k-upla $\bar{a}$ di elementi di M, ovvero $M \models \exists x p(x, \bar{a})$. Ne che $p(x, \bar{a})$ è un tipo con parametri da $A \cup \{\bar{a}\}$, ed essendo un 1-tipo è realizzato. □

Esempio 9.17. $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, <)$ non è ω-saturo in quanto non realizza il tipo $p(x)$ consistente di tutte le formule della forma $n < x$ al variare di n in $\mathbb{N}$. Osserviamo che tale tipo non usa parametri in quanto n può essere definito senza parametri ponendo $n := 1 + 1 + \ldots + 1$ (n volte).

Esercizio 9.18. $(\mathbb{R}, <)$ è ω-saturo.

Teorema 9.19. *Ogni L-struttura ha un'estensione elementare ω-satura.*

Dimostrazione. Sia $\{p_i(x_i) \mid i \in I\}$ l'insieme di tutti gli 1-tipi di $\mathcal{M}$ con un numero finito di parametri, dove abbiamo scelto una variabile diversa x_i per ogni tipo. La teoria $ED(\mathcal{M}) \cup \{p_i(x_i) \mid i \in I\}$ è coerente per compattezza, in quanto i vari p_i sono finitamente soddisfacibili in $\mathcal{M}$. Quindi esiste un modello $\mathcal{M}_1$ di questa teoria che estende elementarmente $\mathcal{M}$ (in quando ogni modello di $ED(\mathcal{M})$ è identificabile con un'estensione elementare di $\mathcal{M}$). Tale modello $\mathcal{M}_1$ realizza tutti i tipi $p_i(x)$, ma non è detto che sia ω-saturo perchè ora dobbiamo considerare anche i tipi con un numero finito di parametri da $\mathcal{M}_1$, non solo da $\mathcal{M}$. Iteriamo perciò il procedimento ottenendo una catena elementare $\mathcal{M} \prec \mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_2 \prec \ldots$ dove ogni $\mathcal{M}_{n+1}$ realizza tutti i tipi di $\mathcal{M}_n$ con un numero finito di parametri. Il limite $\mathcal{M}_\omega$ di questa catena è un'estensione elementare di tutti gli $\mathcal{M}_i$ e realizza tutti i tipi di $\mathcal{M}_\omega$ con un numero finito di parametri. Per verificare ciò basta osservare che, dato un tale tipo $p(x)$, i suoi parametri, essendo in numero finito, saranno contenuti in qualche $\mathcal{M}_n$ e $p(x)$ sarà realizzato in $\mathcal{M}_{n+1}$, e quindi in $\mathcal{M}_\omega$ (essendo $\mathcal{M}_\omega$ un'estensione elementare di $\mathcal{M}_n$ e di $\mathcal{M}_{n+1}$). $\square$

Similmente dato un cardinale κ si dimostra:

Teorema 9.20. *Ogni L-struttura M ha un'estensione elementare κ^+-satura $N \succ M$. Inoltre, assumendo $\kappa \geq |L|$ e $2^\kappa \geq |M|$, possiamo scegliere N di cardinalità $\leq 2^\kappa$.*

Dimostrazione. Si costruisca una catena elementare $(M_\alpha \mid \alpha \leq \kappa^+)$ tale che $M_0 = M$, $M_{\alpha+1} \succ M_\alpha$ realizza tutti gli 1-tipi con $\leq \kappa$ parametri da M_α, e per ciascun ordinale limite $\lambda \leq \kappa^+$ $M_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} M_\alpha$. Per far vedere che M_{κ^+} è κ^+ saturo si usi il fatto che ogni suo sottoinsieme A di cardinalità κ è contenuto in qualche M_α con $\alpha < \kappa^+$. I tipi di M_{κ^+} con parametri da A coincidono con i tipi di M_α con parametri da A. Per costruzione essi sono realizzati in $M_{\alpha+1}$ e quindi anche in M_{κ^+}.

Per la stima sulle cardinalità osserviamo che data una L-struttura N di cardinalità $\leq 2^\kappa$, l'insieme degli 1-tipi di N con $\leq \kappa$ parametri ha cardinalità $\leq 2^\kappa$ (ci sono al più $|N|^\kappa \leq 2^\kappa$ modi di scegliere i parametri, e per ogni scelta dei parametri ci sono $\leq 2^\kappa$ tipi). Induttivamente, usando Lowenheim-Skolem, possiamo fare in modo che ciascun elemento della catena abbia cardinalità $\leq 2^\kappa$. $\square$

Il teorema fornisce estensioni κ^+ sature di cardinalità 2^κ. Se vale l'ipotesi generalizzata del continuo $\kappa^+ = 2^\kappa$ e l'estensione ottenuta è satura. In molti casi interessanti (ad esempio per modelli di teorie "stabili") si possono ottenere estensioni sature senza l'ipotesi del continuo.

Teorema 9.21. *Siano M, N L-strutture, sia $n < \omega$ e assumiamo che $(M, a_i)_{i<n} \equiv (N, b_i)_{i<n}$. Sia $b \in N$. Se M è ω-satura, allora esiste $a \in M$ tale che $(M, a_i, a)_{i<n} \equiv (N, b_i, b)_{i<n}$.*

Dimostrazione. Sia $\Sigma(x, b_i)_{i<n}$ il tipo di b su $\{b_i \mid i < n\}$, ovvero l'insieme di tutte le formule $\phi(x, b_{i_1}, \ldots, b_{i_k})$ con parametri da $\{b_i \mid i < n\}$ realizzate da b in N. Sia $\Sigma(x, a_i)_{i<n}$ l'insieme delle formule ottenute rimpiazzando

i b_i con gli a_i nelle formule di $\Sigma(x, b_i)$. Se $\phi(x, b_{i_1}, \dots, b_{i_k}) \in \Sigma(x, b_i)_{i<n}$, allora $N \models \exists x \phi(x, b_{i_1}, \dots, b_{i_k})$, e quindi per elementare equivalenza $M \models \exists x \phi(x, a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$. Ne che $\Sigma(x, a_i)_{i<n}$ è finitamente soddisfacibile in M (ovvero è un tipo), ed essendo M ω-saturo, esiste $a \in M$ che realizza $\Sigma(x, a_i)_{i<n}$. Per tale a vale la tesi. □

Corollario 9.22. *Se una teoria completa T ha un modello ω-saturo numerabile, ne ha uno solo a meno di isomorfismi.*

Dimostrazione. Per 9.21 nelle strutture ω-sature gli isomorfismi parziali finiti elementari hanno la proprietà del va e vieni, e possiamo concludere invocando il teorema di Scott (Teorema 6.5). □

Corollario 9.23. *Una struttura ω-satura M è ω-universale, ovvero ogni modello numerabile N della sua teoria completa si immerge elementarmente in M.*

Dimostrazione. Sia $(b_i \mid i < \omega)$ una enumerazione di N. Per il Teorema 9.21 possiamo costruire induttivamente $a_i \in M$ con $(M, a_i)_{i<n} \equiv (N, b_i)$. La funzione $a_i \mapsto b_i$ è l'immersione cercata. □

Con la stessa dimostrazione (rimpiazzando ω con κ) si ha:

Teorema 9.24. *Siano M, N L-strutture con M κ-satura. Sia $\alpha < \kappa$ e assumiamo che $(M, a_i)_{i<\alpha} \equiv (N, b_i)_{i<\alpha}$. Sia $b \in N$. Allora esiste $a \in M$ tale che $(M, a_i, a)_{i<\alpha} \equiv (N, b_i, b)_{i<\alpha}$.*

Dimostrazione. Come nel Teorema 9.21 rimpiazzando ω con κ nella dimostrazione. □

Corollario 9.25. *Una struttura κ-satura M è κ-universale, ovvero ogni modello di cardinalità κ della teoria completa di M si immerge elementarmente in M.*

Dimostriamo ora l'unicità dei modelli saturi.

Teorema 9.26. *Sia T una teoria completa. Due modelli ω-saturi M, N di T di cardinalità ω sono isomorfi.*

Dimostrazione. Fissiamo una enumerazione di M e una enumerazione di N, entrambe di tipo d'ordine ω. Per $n < \omega$ costruiamo induttivamente $(a_i)_{i<n}$ in M e $(b_i)_{i<n}$ in N tali che $(M, a_i)_{i<n} \equiv (N, b_i)_{i<n}$. Il caso $n = 0$ è dato dal fatto che $M \equiv N$, essendo T completa. Supponendo di aver definito a_i, b_i per $i < n$ definiamo a_n, b_n come segue. (i) per n pari sia a_n il minimo elemento dell'enumerazione di M diverso da ciascun a_i con $i < n$ e sia b_n il minimo elemento dell'enumerazione di N che verifica $(M, a_i)_{i<n} \equiv (N, b_i)_{i<n}$ (b_n esiste per il Teorema 9.21); (ii) per n dispari sia b_n il minimo elemento dell'enumerazione di N diverso da ciascun b_i con $i < n$ ed sia a_n il minimo elemento dell'enumerazione di M che verifica $(M, a_i)_{i<n} \equiv (N, b_i)_{i<n}$ (a_n esiste per il Teorema 9.21). □

Similmente:

Teorema 9.27. *Sia T una teoria completa. Due modelli κ-saturi M, N di T di cardinalità κ sono isomorfi.*

Dimostrazione. Fissiamo una enumerazione di M e una enumerazione di N, entrambe di tipo d'ordine κ e ragioniamo come prima rimpiazzando ω con κ. □

Esercizio 9.28. Nella dimostrazione precedente, dove si usa il fatto che l'enumerazione sia di tipo d'ordine esattamente κ, anziché di un qualsiasi tipo d'ordine della stessa cardinalità di κ?

Corollario 9.29. *Sia M una L-struttura κ-satura di cardinalità κ. Se $\alpha < \kappa$, $(a_i)_{i<\alpha}$ e $(b_i)_{i<\alpha}$ sono α-uple da M con lo stesso tipo, allora esiste un automorfismo f di M che porta ciascun a_i nel corrispondente b_i.*

Dimostrazione. Le ipotesi dicono che $(M, a_i)_{i<\alpha}$ e $(M, b_i)_{i<\alpha}$ sono elementarmente equivalenti come strutture in un linguaggio L' espanso con α nuove costanti. Ma essendo anche sature (verificare!), sono isomorfe per il Teorema 9.27. □

10 Uso dei modelli saturi per l'eliminazione dei quantificatori

10.1 Va e vieni in modelli κ-saturi

Teorema 10.1. *Sia T una L-teoria e sia $\kappa \geq |L|$.*

1. *Se per ogni coppia M, N di modelli κ-saturi di T l'insieme di tutti gli isomorfismi parziali finiti da M ad N ha la proprietà del va e vieni, allora T ammette EQ.*

2. *Se per ogni coppia M, N di modelli κ-saturi di T esiste una famiglia non vuota I di isomorfismi parziali da M ad N con la proprietà del va e vieni allora T è completa.*

Dimostrazione. 1) Siano M_0 ed N_0 due modelli di T e sia f un isomorfismo parziale finito da M_0 ad N_0. Per il 6.10 basta mostrare che f è elementare. Per il Teorema 9.20 esistono $M \succ M_0$ e $N \succ N_0$ κ-saturi. Per ipotesi f appartiene ad una famiglia di isomorfismi parziali tra M ed N con la proprietà del va e vieni e quindi è elementare (come isomorfismo parziale tra M ed N e quindi anche tra M_0 ed N_0).

2) Le ipotesi implicano che i modelli κ-saturi di T siano elementarmente equivalenti tra di loro. Ma poichè ogni modello è elementarmente equivalente ad uno κ-saturo, la stessa cosa vale per ogni coppia di modelli e T è completa. □

10.2 Teoria degli ordini discreti

Definizione 10.2. Un ordine discreto è un ordine totale $(M,<)$ in cui ogni elemento x ha un successore e un predecessore definiti come segue. Un elemento y si dice successore di x se $y > x$ e non esiste alcun elemento z tra con $y > z > x$. Se y è il successore di x diremo che x è il predecesore di y.

Teorema 10.3. *Sia $L = \{<\}$ il linguaggio dell'ordine e sia T la L-teoria degli ordini discreti senza massimo o minimo elemento.*

1. *T è completa.*
2. *T ammette eliminazione dei quantificatori in una segnatura $L' = \{<, S, P\}$ con un simbolo S per il successore definito da $S(x) = y \leftrightarrow (x < y \wedge \neg\exists z(x < z \wedge z < y))$ e un simbolo P per il predecessore definito da $P(x) = y \leftrightarrow S(y) = x$. Più precisamente la L'-teoria T' che si ottiene da T aggiungendo queste definizioni come assiomi ammette eliminazione dei quantificatori.*

Dimostrazione. Applichiamo il Teorema 6.10. Siano M, N modelli ω-saturi di T. Esiste un unico modo di espandere M, N a due L'-strutture che siano modelli di T'. Continueremo a denotare M, N le strutture espanse. Sia I l'insieme degli isomorfismi finiti parziali da M ad N considerati come L'-strutture. I è non vuoto in quanto presi comunque $a \in M$ e $b \in N$ si verifica facilmente che $a \equiv^I b$. Per finire basta mostrare che I gode della proprietà del va e vieni. Supponiamo dunque $(a_1, \dots, a_n) \equiv^I (b_1, \dots, b_n)$ e sia $c \in M$. Dobbiamo trovare $d \in N$ tale che $\overline{a}c \equiv^I \overline{b}d$ (l'altro caso è simmetrico). Per $m \in \mathbb{Z}$ sia $S^m(x)$ l'm-esimo successore di x se $m \geq 0$, mentre se $m < 0$ sia $S^m(x)$ l'm-esimo predecessore di x. Notiamo che $S^0(x) = x$, $S^1(x) = S(x)$ e $S^n S^m(x) = S^{n+m}(x)$.

Caso 1. Supponiamo che esista a_i (con $1 \leq i \leq n$) ed $m \in \mathbb{Z}$ tale che $c = S^m(a_i)$. Possiamo porre in questo caso $d = S^m(b_i)$.

Caso 2. Supponiamo di non essere nel caso 1, e assumiamo senza perdita di generalità che $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ e che $a_i < c < a_{i+1}$ (il caso in cui c sia maggiore di ogni a_i o minore di ogni a_i è analogo). Per ogni intero positivo m dobbiamo allora avere $S^m(a_i) < c$ e $S^m(c) < a_{i+1}$. Ne segue che per ogni intero positivo m dobbiamo avere $S^m(a_i) < a_{i+1}$. Poiché $\overline{a} \equiv^I \overline{b}$, per ogni intero positivo m deve valere $S^m(b_i) < b_{i+1}$. Per ω-saturazione di N esiste allora un $d \in N$ tale che per ogni intero positivo m, $S^m(b_i) < d$ e $S^m d < b_{i+1}$. Per tale d abbiamo $(\overline{a}c, \overline{b}d) \in I$. $\square$

11 Strutture omogenee

In questa sezione mostriamo che due elementi a, b di una struttura M hanno lo stesso tipo se e solo se esiste un'estensione elementare $N \succ M$ ed un automorfismo di N che porta a in b. Le estensioni che ci servono sono quelle "ω-omogenee".

Ci serve una generalizzazione del concetto di n-tipo. Dato un insieme di indici I e una I-upla $\bar{a} = (a_i)_{i \in I}$ di elementi di una struttura M, il tipo di $\bar{a}$ in M è definito come l'insieme delle formule $\varphi(\bar{x})$, con variabili libere incluse in $\{x_i : i \in I\}$, tali che $M \models \varphi(\bar{a})$, dove si intende che a_i è sostituita al posto della variabile x_i (se presente).

Definizione 11.1. Una L-struttura M è **κ-omogenea** se, date due α-tuple $\bar{a}, \bar{b}$ da M con lo stesso tipo, e un nuovo elemento $c \in M$, esiste $d \in M$ tale che $\bar{a}c$ e $\bar{b}d$ continuano ad avere lo stesso tipo. Diciamo che M è **fortemente κ-omogenea** se per ogni $\alpha < \kappa$ due α-uple da M con lo stesso tipo sono coniugate da un automorfismo di M, ovvero esiste un automorfismo di M che porta l'una nell'altra. Chiaramente ogni struttura κ-fortemente omogenea è anche κ-omogenea (come d si prenda l'immagine di c tramite l'automorfismo).

Il Corollario 9.29 dice che una struttura satura di cardinalità κ è fortemente κ-omogenea. Per la costruzione di strutture omogenee consideriamo prima il caso delle strutture numerabili.

Teorema 11.2. *Ogni L-struttura numerabile M ha un'estensione elementare $N \succ M$ numerabile ed ω-omogenea.*

Dimostrazione. Dato un insieme finito di parametri $A \subseteq M$, i tipi su A realizzati in M sono al più $\aleph_0 = |M|$ e ciascuno di essi, chiamiamolo $p(x, \overline{a}) \in S_n(A) := S_n(Th(M, a)_{a \in A})$, ha al più $\aleph_0$ immagini $p(x, f\overline{a})$, tramite mappe elementari $f : A \to M$. Inoltre ci sono al più $\aleph_0$ scelte per A. Quindi posso realizzare in un'estensione elementare numerabile $M_1 \succ M$ tutti questi tipi $p(x, f\overline{a})$. Iterando costruisco una catena elementare $(M_i : i < \omega)$ di strutture numerabili dove ciascun M_{i+1} è ottenuto da M_i allo stesso modo in cui M_1 è ottenuto da M. L'unione $N = \bigcup_i M_i$ è l'estensione omogenea desiderata. Consideriamo infatti due n-uple $\overline{a}$ e $\overline{b}$ da N con lo stesso tipo e sia c un nuovo elemento di N. Supponiamo che $c, \overline{a}$ siano in M_i. La mappa f che manda $\overline{a}$ in $\overline{b}$ (componente per componente) è elementare. Sia $p(x, \overline{a})$ il tipo di c su $\overline{a}$ e sia $p(x, \overline{b})$ la sua immagine tramite f. Per costruzione esiste $d \in M_{i+1} \subseteq N$ che realizza $p(x, \overline{b})$ e dunque N è ω-omogenea. $\square$

Proposizione 11.3. *Sia κ un cardinale infinito. Ogni L-struttura M ha un'estensione elementare N fortemente κ-omogenea e κ-satura (ma in generale potrà avere cardinalità $> \kappa$).*

Dimostrazione. Dimostriamo un risultato più forte, ovvero che esiste un'estensione N fortemente κ^+-omogenea e κ^+-satura (trarremo ausilio dal fatto che κ^+ è un cardiale regolare). Consideriamo a tal fine una catena elementare $(M_\alpha : \alpha < \kappa^+)$ tale che $M = M_0$ e $M_{\alpha+1}$ è $|M_\alpha|^+$-satura Sia N la sua unione. Osserviamo innanzitutto che N è κ^+-satura (un insieme di parametri di cardinalità $< \kappa^+$ sarà contenuto in qualche M_α, e ogni tipo su quei parametri sarà realizzato in $M_{\alpha+1}$ e quindi in N). Mostriamo che è κ-omogenea. Siano A, B sottoinsiemi di N di cardinalità $< \kappa$ e sia $f : A \to B$ una mappa elementare. Esiste allora un $\beta < \kappa^+$ tale che $A, B \subseteq M_\beta$ e senza perdita di generalià possiamo supporre che β sia un ordinale pari, ovvero un ordinale limite più un ordinale finito pari. Poiché $M_{\beta+1}$ è $|M_\beta|^+$-satura, esiste un'immersione elementare $f_\beta: M_\beta \to M_{\beta+1}$ che estende f (si usi il Corollario 9.25, insieme all'osservazione che $(M_{\beta+1}, b)_{b\in B}$ è $|M_\beta|^+$-satura e $(M_\beta, a)_{a\in A}$ è un modello della sua teoria). Analogamente esiste un'immersione elementare $g_{\beta+1}$ da $M_{\beta+1}$ a $M_{\beta+2}$ tale che la sua inversa $f_{\beta+1} : \mathrm{Im}(g_{\beta+1}) \to M_{\beta+1}$ estende f_β. Distinguendo gli ordinali pari e gli ordinali dispari possiamo continuare a procedere in questo modo prendendo l'unione ai passi limite. Per costruzione abbiamo che se β è pari M_β è incluso nel dominio di f_β, se β è dispari M_β è incluso nell'immagine di f_β, e se β è limite M_β è incluso sia nel dominio che nell'immagine e pertanto f_β è un automorfismo di M_β. Alla fine otteniamo un automorfismo $g = \bigcup_{\alpha<\kappa^+} f_\alpha$ di N che estende f. □

Corollario 11.4. *Due elementi di una struttura M hanno lo stesso tipo se e solo se esiste un automorfismo di un'estensione elementare di M che porta l'uno nell'altro.*

12 Chiusura algebrica e dimensione

12.1 Chiusura algebrica model teoretica

Diamo una generalizzazione model-teoretica della nozione di chiusura algebrica. Essa generalizza anche la nozione di dipendenza lineare negli spazi vettoriali.

Definizione 12.1. Sia M una L-struttura, e sia $A \subset \mathrm{dom}(M)$. Diciamo che $b \in M$ è algebrico su A, $b \in \mathrm{acl}(A)$, se b appartiene ad un insieme finito A-definibile. Nel caso in cui l'insieme finito abbia cardinalità 1, ovvero contenga solo b, diremo che b è A-definibile e scriveremo $b \in dcl(A)$.

Vedremo che se M è un campo algebricamente chiuso, $\mathrm{acl}(A)$ coincide con la chiusura algebrica di A nel senso della teoria dei campi. Una direzione è facile: la chiusura algebrica nel senso della teoria dei campi è contenuta nella chiusura algebrico nel senso model-teoretico. Basta osservare che il polinomio minimo di un elemento algebrico definisce un insieme finito F. L'altra direzione usa l'eliminazione dei quantificatori (si veda la Proposizione 12.7).

Esempio 12.2. Sia $\mathbb{C} = (\mathbf{C}; 0, 1, +, \cdot)$. Nella struttura $\mathbb{C}$, l'elemento $\sqrt{2}$ è algebrico sull'insieme vuoto ($\emptyset$-algebrico), in quanto appartiene all'insieme finito $\{x \in \mathbb{C} \mid x^2 = 1 + 1\}$. Tale elemento non è però $\emptyset$-definibile in quanto esistono automorfismi di $\mathbb{C}$ che mandano $\sqrt{2}$ in $-\sqrt{2}$ e quindi ogni insieme definibile contenente $\sqrt{2}$ deve contenere anche $-\sqrt{2}$.

Esempio 12.3. Sia $\mathbb{R} = (\mathbf{R}; 0, 1, +, \cdot)$. Nella struttura $\mathbb{R}$, l'elemento $\sqrt{2}$ è $\emptyset$-definibile. Infatti in $\mathbb{R}$ l'ordine è definibile ($x \geq 0 \iff \exists y(y^2 = x)$) e $\sqrt{2}$ può essere definito come l'unico elemento positivo il cui quadrato è due (nel nostro linguaggio 2 è definibile senza parametri come $1 + 1$).

Lemma 12.4. $\mathrm{acl}(\mathrm{acl}(A)) = \mathrm{acl}(A)$.

12.2 Strutture fortemente minimali

Definizione 12.5. (Vedi [1] sezione 4.5) Sia M una L-struttura. M è minimale se ogni sottoinsieme definibile di M è finito o cofinito (cioè ha complemento finito). M è fortemente minimale se ogni sua estensione elementare è minimale. Più in generale, data una L-struttura M, diremo che un insieme M-definibile $X \subset M^n$ è minimale se ogni suo sottoinsieme M-definibile Y è finito o relativamente cofinito (ovvero $X - Y$ è finito). Una formula $\varphi(\vec{x})$ con parametri da M è fortemente minimale se, in ogni estensione elementare N di M, l'insieme definito da $\varphi(\vec{x})$ in N è minimale.

Esempio 12.6. Un campo algebricamente chiuso M è fortemente minimale.

Dimostrazione. Sia $X \subset M$ un sottoinsieme definibile. Dobbiamo mostrare che X è finito o cofinito. Per l'eliminazione dei quantificatori X è combinazione booleana di sottoinsiemi di M definiti da formule atomiche. Visto che la classe degli insiemi finiti o cofiniti è stabile per unioni finite, intersezioni finite e complementi, basta trattare il caso in cui X è definito da una formula atomica. Ma ogni formula atomica (con parametri da M) equivale ad un'equazione polinomiale $p(x) = 0$ con $p(x) \in M[x]$. Per concludere basta ricordare che un polinomio non banale ha un numero finito di zeri. $\square$

Proposizione 12.7. *In un campo algebricamente chiuso M la chiusura algebrica di $A \subset \mathrm{dom}(M)$ nel senso model-teoretico coincide con la chiusura algebrica nel senso algebrico.*

Dimostrazione. Mostriamo il verso non banale. Sia $a \in \mathrm{acl}(A)$ nel senso model-teoretico. Quindi $a \in X$ per un certo X finito ed A-definibile. Come nella dimostrazione di 12.6, X è una combinazione booleana di insiemi della forma $X_p = \{x \mid p(x) = 0\}$ con $p(x) \in M[x]$. Equivalentemente $X = \bigcup_i \bigcap_j Y_{ij}$ dove i, j variano su un insieme finito di indici e ogni Y_{ij} è della forma X_p o $\neg X_p := \{x \mid p(x) \neq 0\}$. Fissiamo un i tale che $a \in \bigcap_j Y_{ij}$. Almeno uno degli Y_{ij} deve ssere finito, altrimenti X sarebbe infinito. Un tale Y_{ij} deve avere la forma X_p per qualche $p(x) \in M[x]$ non identicamente nullo. Per le nostre scelte, $p(a) = 0$, dunque a è algebrico nel senso della teoria dei campi. $\square$

Il seguente risultato generalizza il "Lemma dello scambio di Steinitz".

Lemma 12.8. *Sia M minimale. Siano $a, b \in M, A \subseteq \mathrm{dom}(M)$. Se $a \in \mathrm{acl}(b, A)$ e $a \notin \mathrm{acl}(A)$, allora $b \in \mathrm{acl}(a, A)$.*

Dimostrazione. (Vedi [**?**, Lemma 4.5.2]) $\square$

Lemma 12.9. *Sia N fortemente minimale. Due elementi $a, b \in N$ non-algebrici su $A \subset \mathrm{dom}(N)$ hanno lo stesso tipo su A.*

Dimostrazione. Sia $X \subset N$ un insieme definibile su A. Dobbiamo mostrare che $a \in X$ se e solo se $b \in X$. In caso contrario uno dei due appartiene ad X e l'altro no. Ma X o il suo complemento è finito. Quindi uno dei due è algebrico su A. $\square$

12.3 Strutture pregeometriche e dimensione

Definizione 12.10. Una struttura M è detta **pregeometrica** se, dati $a, b \in M$ e $A \subset \mathrm{dom}(M)$ vale le seguente **proprietà dello scambio**. Se $a \in \mathrm{acl}(b, A)$ e $a \notin \mathrm{acl}(A)$, allora $b \in \mathrm{acl}(a, A)$.

Abbiamo visto che una struttura fortemente minimale è pregeometrica (Lemma 12.8).

Definizione 12.11. Sia N pregeometrica e siano $a_1, \ldots, a_n \in N$. Un sottoinsieme X di $\{a_1, \ldots, a_n\}$ è detto **generante** se la sua chiusura algebrica contiene tutti gli a_i, ed è detto **algebricamente indipendente** se ciascun elemento di X non è algebrico sugli altri elementi di X. Infine X è detto una **base** se è sia generante che algebricamente indipendente.

Teorema 12.12. *Tutte le basi di $\{a_1, \ldots, a_n\}$ hanno la stessa cardinalità, chiamata $\dim(a_1, \ldots, a_n)$. Inoltre ogni insieme indipendente massimale è generante.*

Analoghe conclusioni valgono rimpiazzando in tutte le definizioni "algebrico" con "algebrico su P", dove $P \subset \mathrm{dom}(N)$ è un insieme di parametri (basta aggiungere costanti al linguaggio per gli elementi di P per ricondursi al caso $P = \emptyset$).

Dimostrazione. Sia $P \subset \mathrm{dom}(N)$ e sia $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$.

Dati $b_1, \ldots, b_k \in A$ e $c_1, \ldots, c_l \in A$, dimostriamo che se $A \subset acl_P(b_1, \ldots, b_k)$ e $c_1, \ldots, c_l$ sono algebricamente indipendenti su P, allora $l \leq k$. Consideriamo un sottoinsieme minimale B di $\{b_1, \ldots, b_k\}$ tale che $c_l \in acl_P(B)$. Chiaramente B è non-vuoto perché c_l non è algebrico (su P). Riordinando gli indici possiamo assumere che il sottoinsieme contenga b_k, e quindi sia della forma $B' \cup \{b_k\}$, con c_l non-algebrico su B'. Per la proprietà dello scambio b_k è algebrico su c_l, B'. Quindi $\mathrm{acl}(b_1, b_2, \ldots, b_k) = \mathrm{acl}(b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}, c_l)$. Ponendo $P' = P \cup \{c_l\}$ abbiamo che $A \subset acl_{P'}(b_1, \ldots, b_{k-1})$ e $c_1, \ldots, c_{l-1}$ sono algebricamente indipendenti su P'. Per induzione $l-1 \leq k-1$ e quindi $l \leq k$. (Lo stesso ragionamento mostra che possiamo espandere l'insieme $\{c_1, \ldots, c_l\}$ ad un insieme generante aggiungendogli $k - l$ elementi presi da $\{b_1, \ldots, b_k\}$.)

In particolare ne segue che tutti gli insiemi che siano al tempo stesso generanti ed indipendenti hanno la stessa cardinalità.

Per finire la dimostrazione basta mostrare che un sottoinsieme massimale X di A algebricamente indipendente (su P) è generante (su P). Se così non fosse ci sarebbe un $a_i \in A$ non contenuto in $acl_P(X)$. Ma allora $X \cup \{a_i\}$ sarebbe indipendente su P (verificare), contraddicendo la massimalità. $\square$

Definizione 12.13. Similmente definiamo $\dim(a_1, \ldots, a_n/B)$, dove $B \subset \mathrm{dom}(N)$, come la cardinalità di un qualsiasi sottoinsieme di $\{a_1, \ldots, a_n\}$ che sia massimale tra quelli algebricamente indipendenti su B. Aggiungendo al linguaggio nuove costanti per gli elementi di B ci si riconduce al caso senza parametri, quindi il teorema precedente continua a valere e la definizione è ben posta.

Esercizio 12.14. $\dim(a_1, \ldots, a_n/B)$ dipende solo dal tipo di $(a_1, \ldots, a_n)$ su B.

Dimostrazione. Innanzitutto osserviamo che $a \notin \mathrm{acl}(B)$ equivale alla congiunzione infinita di tutte le formule della forma $\neg\varphi(x, \overline{b})$ dove $\overline{b} \subseteq B$ e $\varphi(x, \overline{b})$ è una formula algebrica (ovvero con un numero finito di realizzazioni x). Questo dimostra il caso $n = 1$. Il caso $n > 1$ segue facilmente per induzione. $\square$

Lemma 12.15. *Sia M una struttura pregeometrica ω-satura e siano $A \subseteq B \subseteq$ $\mathrm{dom}(M)$ insiemi finiti di parametri. Data una n-upla $\overline{a}$ di elementi di M esiste una n-upla $\overline{b}$ che ha lo stesso tipo di $\overline{a}$ su A e tale che $dim(\overline{b}/B) = \mathrm{dim}(\overline{a}/A)$.*

Dimostrazione. Possiamo assumere che i primi $m \leq n$ elementi della n-upla $\overline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ siano algebricamente indipendenti su A e gli altri siano algebricamente dipendenti da essi su A. Per induzione si mostra che esistono $b_1, \dots, b_i$ algebricamente indipendenti su B che realizzano il tipo di $(a_1, \dots, a_i)$ su A. Queste condizioni sono esprimibili da un tipo parziale $p_i(x_1, \dots, x_i)$ (ovvero da un insieme di formule finitamente soddisfacibili) a parametri da B. Per la ω-saturazione possiamo induttivamente realizzare questi tipi in M. $\square$

Definizione 12.16. Data una struttura pregeometrica ω-satura M e un insieme A-definibile $X \subset M^n$ (con A finito) definiamo la dimensione di X, $\mathrm{dim}(X)$, come la massima dimensione su A delle n-uple prese da X.

Si osservi che se X è A-definibile è anche B-definibile per ogni $B \supseteq A$. Il Lemma 12.15 mostra che $dim(X)$ non dipende dalla scelta dell'insieme A dei parametri su cui X è definito.

13 Rango di Morley

Si veda la sezione 5.6 in [1] oppure la Definizione 2.1 in [2].

Definizione 13.1. Sia M una L-struttura e sia $X \subset M^n$ un insieme definibile in M (con parametri). Il rango di Cantor-Bendixon $\mathrm{RCantor}(X)$ è definito come il minimo ordinale (se esiste) compatibile con le seguenti disuguaglianze:

1. $\mathrm{RCantor}(X) \geq 0$ se X è non vuoto.
2. Se λ è un ordinale limite, $\mathrm{RCantor}(X) \geq \lambda$ se $\mathrm{RCantor}(X) > \alpha$ per ogni $\alpha < \lambda$.
3. $\mathrm{RCantor}(X) \geq \alpha+1$ se esistono insiemi definibili disgiunti $X_i \subset X$ $(i < \omega)$ a parametri in M tali che $\mathrm{RCantor}(X_i) \geq \alpha$ per ogni $i < \omega$. Se vale $\mathrm{RCantor}(X) > \alpha$ per ogni α diremo che $\mathrm{RCantor}(X) = \infty$.

Chiaramente $X \subset Y$ implica $\mathrm{RCantor}(X) \leq \mathrm{RCantor}(Y)$ (induzione). Inoltre si ha:

Lemma 13.2. $\mathrm{RCantor}(X \cup Y) = \max\{\mathrm{RCantor}(X), \mathrm{RCantor}(Y)\}$.

Dimostrazione. Basta mostrare per induzione su α che se $\mathrm{RCantor}(X \cup Y) \geq \alpha$, allora $\mathrm{RCantor}(X) \geq \alpha$ o $\mathrm{RCantor}(Y) \geq \alpha$. Il caso α limite è banale. Consideriamo il caso $\alpha = \beta + 1$. Per definizione $X \cup Y$ contiene infiniti sottoinsiemi definibili disgiunti Z_i $(i < \omega)$ con $\mathrm{RCantor}(Z_i) \geq \beta$. Per l'ipotesi induttiva, abbiamo che $\mathrm{RCantor}(Z_i \cap X) \geq \beta$ o $\mathrm{RCantor}(Z_i \cap Y) \geq \beta$. Rimpiazzando Z_i con $Z_i \cap X$ o con $Z_i \cap Y$ possiamo assumere che ciascun Z_i sia contenuto in X o in Y. Ma allora uno tra X e Y contiene infiniti Z_i, da cui la tesi. □

Proposizione 13.3. *Ogni insieme X di* $\mathrm{RCantor}(X) = \alpha$ *è l'unione disgiunta di un numero finito di insiemi "minimali" di* $\mathrm{RCantor} = \alpha$, *dove un insieme è detto minimale di rango α se non è l'unione di due insiemi disgiunti di rango α.*

Dimostrazione. Altrimenti produco un albero binario di sottoinsiemi di X di rango α da cui posso facilmente estrarre una sottofamiglia numerabile di insiemi disgiunti di rango α. Ciò è assurdo in quanto X avrebbe allora rango $\geq \alpha+1$. □

Corollario 13.4. *La terza clausola nella definizione di* RCantor *equivale a:* $\mathrm{RCantor}(X) \geq \alpha + 1$ *se per ogni $n < \omega$ esistono n insiemi definibili disgiunti $X_i \subset X$ $(i < n)$ tali che* $\mathrm{RCantor}(X_i) \geq \alpha$ *per ogni $i < n$.*

Definizione 13.5. Se $\phi(x, a)$ è una formula con parametri a da M, e $N \succ M$, definiamo $\mathrm{RCantor}_N(\phi(x, a))$ come il rango di Cantor-Bendixon dell'insieme definito da $\phi(x, a)$ in N.

Lemma 13.6. *Se $M \prec N$, allora* $\mathrm{RCantor}_M(\phi(x, a)) \leq \mathrm{RCantor}_N(\phi(x, a))$.

Dimostrazione. Nella terza clausola della definizione del rango, gli insiemi X_i sono definibili da formule con parametri, e quindi è più facile trovarli in N (avendo a disposizione più parametri) piuttosto che in M. □

Se M è ω-satura, il rango non cambia passando ad un'estensione elementare di M. Inoltre il rango dipende solo dal tipo dei parametri. Più precisamente:

Proposizione 13.7. *Consideriamo una estensione elementare $N \succ M$ con M ω-satura. Sia $\phi(x, a)$ una formula con parametri $a = (a_1, \ldots, a_k) \in M^k$ e variabili libere $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Sia $b \in N^k$ una k-upla con lo stesso tipo di a (in particolare possiamo prendere $b = a$). Allora* $\mathrm{RCantor}_M(\phi(x, a)) = \mathrm{RCantor}_N(\phi(x, b))$.

Dimostrazione. Basta mostrare per induzione su β che $\mathrm{RCantor}_N(\phi(x, b)) \geq \beta$ implica $\mathrm{RCantor}_M(\phi(x, a)) \geq \beta$ (la disuguaglianza opposta è facile). Il caso β limite è immediato. Assumiamo $\mathrm{RCantor}_N(\phi(x, b)) \geq \alpha + 1$. Dato $m \in \omega$ esistono allora m insiemi disgiunti, definiti da formule $\theta_i(x, c_i)$ con parametri $c_i \in N^{k_i}$ $(i < m)$, tali che $\mathrm{RCantor}_N(\theta_i(x, c_i)) \geq \alpha$ e $\{x \mid \theta_i(x, c_i)\} \subset \{x \mid \phi(x, b)\}$ (in N). Siccome M è ω-saturo esistono parametri d_i da M tali che $(M, a, d_i)_{i<m} \equiv (N, b, c_i)_{i<m}$. Ne segue che le formule $\theta_i(x, d_i)$ $(i < m)$ definiscono insiemi disgiunti in M inclusi in $\{x \in M \mid \phi(x, a)\}$. Per induzione $\mathrm{RCantor}_M(\theta(x, d_i)) \geq \alpha$ per ogni $i < m$. Visto che $m \in \omega$ è arbitrariamente grande, $\mathrm{RCantor}_M(\theta(x, a)) \geq \alpha + 1$. □

Definizione 13.8. Sia $\phi(x, a)$ una formula con parametri da una struttura M. Il rango di Morley $\mathrm{RM}(\phi(x, a))$ è definito come $\sup_{N \succ M} \mathrm{RCantor}_N(\phi(x, a))$.

Osservazione 13.9. Nella definizione il sup è raggiunto prendendo N ω-satura. Se M stessa è ω-satura $\mathrm{RM}(\phi(x, a)) = \mathrm{RCantor}_M(\phi(x, a))$.

Dimostrazione. Sappiamo che il rango non cresce passando da un modello ω-saturo ad una sua estensione elementare. Rimane dunque solo da dimostrare che se prendiamo due estensioni elementari di M, entrambe ω-sature, il rango calcolato in una di esse coincide con il rango calcolato nell'altra. A tal fine basta usare il lemma di amalgamazione per immergere entrambe in un'estensione elementare comune. □

Proposizione. *Data una teoria T completa esiste un cardinale α_T tale che per ogni formula $\varphi(x, a)$ con parametri in un modello di M si ha $RM(\varphi(x, a)) \geq \alpha_T \iff RM(\varphi(x, a)) = \infty$.*

Dimostrazione. I modelli di una teoria non sono un insieme, ma i possibili tipi su $\emptyset$ lo sono. Una funzione da un insieme agli ordinali è limitata, e siccome il rango dipende solo dal tipo dei parametri abbiamo la tesi. □

Corollario 13.10. *Ogni formula di $RM = \infty$ è l'unione disgiunta di due formule di $RM = \infty$.*

Definizione 13.11. Una teoria è **totalmente trascendente** se e solo se, in ogni modello, non vi sono alberi binari infiniti di insiemi definibili. Ciò equivale a dire che il rango di ogni formula con parametri in un modello di T è $< \infty$.

Definizione 13.12. Sia $\phi(x, a)$ una formula con parametri da M di rango di Morley α. Il grado di Morley di $\phi(x, a)$ è definito come il massimo intero k tale che l'insieme definito da $\phi(x, a)$ (in un'estensione ω-satura di M) ammette k sottoinsiemi definibili disgiunti di rango α.

Esercizio 13.13. Sia $X \subset N^k$ un insieme definibile in una struttura fortemente minimale N. Allora $\dim(X) \geq r + 1$ se e solo se esistono sottoinsiemi definibili $X_i \subset X$ $(i < \omega)$ disgiunti, tali che $\dim(X_i) \geq r$ per ogni $i < \omega$.

Teorema 13.14. *Sia N fortemente minimale. Sia $X \subset N^n$ un insieme definibile. Allora $RM(X) = \dim(X)$.*

Dimostrazione. Vedi Lemma 2.6 in [2]. □

14 Modelli primi

Definizione 14.1. Data una teoria completa T un modello M di T si dice **primo** se si immerge elementarmente in ogni altro modello. Se M è una struttura, diciamo che M è un modello primo se è un modello primo della sua propria teoria completa.

Osserviamo che se $f : M \to N$ è un'immersione elementare e $a \in M$ realizza un tipo $p(x)$ allora $fa \in N$ realizza lo stesso tipo. Quindi un modello primo di T realizza solamente i tipi che sono realizzati in tutti i modelli. Esempio: la chiusura algebrica dei numeri razionali è un modello primo della teoria dei campi algebricamente chiusi.

14.1 Modelli di termini

Lemma 14.2. *Sia T una L teoria e sia $C \subset L$ un insieme di simboli di costante. Supponiamo che:*

1. *T è coerente e completa.*
2. *Se $T \models \exists x \phi(x)$, allora $T \models \phi(c)$ per qualche $c \in C$.*

Allora T ha un modello M tale che ogni elemento del dominio di M è l'interpretazione di qualche termine costante $c \in C$.

Dimostrazione. Sia N un modello di T e sia $M \subset \mathrm{dom}(N)$ il sottoinsieme di N consistente delle interpretazioni delle costanti di C. Dato un termine chiuso t di L, chiaramente $T \models \exists x(x = t)$, e per ipotesi esiste una costante $c \in C$ tale che $T \models c = t$. Quindi M coincide con l'insieme delle interpretazioni dei termini chiusi, e pertanto è (il dominio di) una sottostruttura di N. Basta verificare che M è una sottostruttura elementare di N. A tal fine applichiamo il criterio di Tarski-Vaught. Supponiamo dunque che $N \models \exists x \phi(x, a_1, \dots, a_n)$ con $a_1, \dots, a_n \in M$. Dobbiamo verificare che esiste $b \in M$ con $N \models \phi(b, a_1, \dots, a_n)$. Per definizione di M, ciascun a_i è della forma ${c_i}^N$ per qualche $c_i \in C$. La L-formula chiusa $\exists x \phi(x, c_1, \dots, c_n)$ è vera in N, e siccome T è completa, essa è dimostrabile in T. Per le ipotesi su T esiste $c_0 \in C$ tale che $T \models \phi(c_0, c_1, \dots, c_n)$. Ma allora possiamo prendere come b l'interpretazione di c_0 in N. $\square$

14.2 Omissione di tipi

Definizione 14.3. Sia T una teoria, e sia $\Sigma(x)$ un n-tipo completo di T. Diciamo che $\Sigma(x)$ è principale, se esiste una formula $\theta(x)$ tale che $T, \theta(x)$ è coerente e dimostra tutte le formule di $\Sigma(x)$. (Si noti che $\theta(x)$ appartiene necessariemente a $\Sigma(x)$ altrimenti per completezza vi apparterrebbe la sua negazione e avremmo $T, \theta(x) \models \neg\theta(x)$ contraddicendo la coerenza di $T, \theta(x)$.)

Possiamo dare l'analoga definizione per teorie e tipi non completi:

Definizione 14.4. Sia T una teoria coerente, e sia $\Sigma(x)$ un n-tipo (possibilmente parziale) di T. Diciamo che $\Sigma(x)$ è finitamente supportato, se esiste una formula $\theta(x)$ tale che $T, \theta(x)$ è coerente e dimostra tutte le formule di $\Sigma(x)$. (Non richiediamo che $\theta(x)$ appartenga a $\Sigma(x)$.)

Teorema 14.5. *Sia T una teoria coerente in un linguaggio L numerabile, sia $x = (x_1, \dots, x_n)$ e sia $\Sigma(x)$ un n-tipo (parziale) di T non finitamente supportato. Allora T ha un modello che omette $\Sigma(x)$.*

Dimostrazione. Consideriamo per semplicità il caso $n = 1$. Sia $C = \{c_i \mid i < \omega\}$ un insieme numerabile di nuove costanti non in L. Sia $(\sigma_i \mid i < \omega)$ una enumerazione di tutte le $L \cup C$-formule chiuse. Definiremo una successione di $L \cup C$-teorie coerenti $T = S_0 \subset S_1 \subset S_2 \subset \ldots$ tale che ogni S_i sia un'estensione finita di T e, ponendo $S = \bigcup_n S_n$, si abbia:

1. S è completa.
2. Se $\exists x \phi(x) \in S$, allora $\phi(c) \in S$ per qualche $c \in C$.
3. Per ogni $c \in C$ esiste $\delta(x) \in \Sigma(x)$ con $\neg\delta(c) \in S$.

Le prime due proprietà implicano che S ha un modello M in cui ogni elemento è l'interpretazione di qualche costante c_i. La terza proprietà garantisce che M omette $\Sigma(x)$ (in quanto nessun $c \in C$ realizza $\Sigma(x)$).

Supponendo di aver già definito S_n definiamo delle nuove teorie $S_n \subset S_n{}' \subset S_n{}'' \subset S_{n+1}$ come segue. Consideriamo la n-esima formula σ dell'enumerazione. Se $S_n \cup \{\sigma\}$ è coerente poniamo $S_n{}' = S_n \cup \{\sigma\}$, altrimenti $S_n{}' = S_n \cup \{\neg\sigma\}$. Se inoltre σ è della forma $\exists x \phi(x)$ poniamo $S_n{}'' = S_n{}' \cup \{\exists x \varphi(x) \to \phi(c)\}$ dove $c \in C$ è una costante non ancora adoperata. Assumendo induttivamente che S_n sia coerente, anche $S_n{}'$ ed $S_n{}''$ lo sono. Inoltre se S_n è un'estensione finita di T, anche $S_n{}''$ lo è. Quindi esiste una $L \cup C$-formula $\psi(c_1, \ldots, c_k)$ (che non contiene altre costanti di C oltre quelle esplicitate) tale che $S_n{}'' \equiv T \cup \{\psi(c_1, \ldots, c_k)\}$. Consideriamo la costante $c_n \in C$. Siccome $\Sigma(x)$ non è finitamente supportato, $T, \psi(c_1, \ldots, c_k)$ non può dimostrare tutte le formule di $\Sigma(c_n)$ (supponiamo ad esempio che $k = 2$ e $T, \psi(c_1, c_2) \models \Sigma(c_2)$; allora $\Sigma(x)$ sarebbe supportato da $\exists y \psi(y, x)$). Quindi esiste una formula $\delta(x) \in \Sigma(x)$ tale che $S_{n+1} = S_n{}'' \cup \neg\delta(c_n)$ è coerente. La costruzione delle S_n è completata e per costruzione $S = \bigcup_n S_n$ ha le proprietà richieste. $\square$

Similmente si dimostra:

Teorema 14.6. *Sia T una teoria coerente in un linguaggio L numerabile, e sia $\Sigma_m(x_1, \ldots, x_{k_m})$ una famiglia numerabile di tipi (parziali) non finitamente supportati. Allora T ha un modello che omette ciascun Σ_m.*

14.3 Topologia sullo spazio dei tipi

Definizione 14.7. Sia $S_n(T)$ l'insieme degli n-tipi completi $p(x)$ di T (dove $x = (x_1, \ldots, x_n)$). Mettiamo una topologia su $S_n(T)$ come segue. Data una formula $\phi(x)$, sia $[\phi(x)]$ l'insieme dei tipi che contengono $\phi(x)$. Diciamo che $[\phi(x)]$ è aperto base. Gli aperti sono unioni di aperti base. Notiamo che $[\phi(x)]$ è clopen, in quanto il suo complemento è $[\neg\phi(x)]$.

Teorema 14.8. *$S_n(T)$ è uno spazio topologico compatto di Hausdorff con una base di clopen.*

Dimostrazione. Dati due tipi distinti $p, q \in S_n(T)$ esiste una formula $\phi(x)$ che sta in uno dei due tipi e non nell'altro. Gli aperti $[\phi(x)]$ e $[\neg\phi(x)]$ separano p da q. Quindi $S_n(T)$ è Hausdorff. Mostriamo che è compatto. Poiché ogni aperto è unione di aperti base, basta mostrare che ogni famiglia di aperti base $[\phi_i(x)]$ $(i \in I)$ che ricopre $S_n(T)$ ha un sottoricoprimento finito. Osserviamo che il complemento di $[\phi_i(x)]$ è $[\neg\phi_i(x)]$, che è ancora un aperto (e chiuso) base. Passando ai complementi basta quindi dimostrare che se l'intersezione $\bigcap_i[\neg\varphi_i(x)]$ è vuota, allora una sottointersezione finita è vuota. Poichè un tipo $p(x)$ appartiene a $\bigcap_i[\neg\varphi_i(x)]$ se e solo se contiene tutte le formule $\neg\phi_i(x)$, se tale tipo non esiste (ovvero l'intersezione è vuota) vuol dire che l'insieme $\{\neg\phi_i(x) : i \in I\}$ è incoerente (in quanto ogni insieme coerente di formule si estende ad un tipo). Per il teorema di compattezza ne segue che un suo sottoinsieme finito è incoerente, e dunque l'intersezione dei corrispondenti $[\neg\phi_i(x)]$ è vuota. $\square$

Esercizio 14.9. Un tipo $p(x) \in S_n(T)$ è principale se e solo se è isolato, ovvero se esiste $\phi(x)$ tale che $p(x)$ è l'unico tipo di $[\phi(x)]$.

Definizione 14.10. Fissata una teoria coerente T, diciamo che una formula $\phi(x)$ è completa se $T, \phi(x)$ è una $L \cup \{x\}$ teoria completa. Ciò equivale a dire che $[\phi(x)] \subset S_n(T)$ contiene un solo tipo, isolato da $\phi(x)$.

14.4 Modelli atomici

In questa sezione definiamo i modelli atomici. Mostriamo che (per T completa numerabile) i modelli atomici numerabili coincidono con i modelli primi, dimostriamo l'unicità dei modelli atomici numerabili, e caratterizziamo le teorie che hanno un modello atomico.

Definizione 14.11. Una struttura M è atomica se ogni n-upla di M realizza un tipo isolato di $T = Th(M)$. Equivalentemente M è atomica se ogni n-upla di M verifica una formula completa $\phi(x_1, \dots, x_n)$.

Osservazione 14.12. Se $\varphi(x, y)$ isola il tipo di $(a, \overline{b})$ sull'insieme vuoto di parametri, allora $\varphi(x, \overline{b})$ isola il tipo di a su $\overline{b}$. Quindi in una struttura atomica tutti i tipi di elementi su un insieme finito di parametri sono isolati.

Lemma 14.13. *Sia* $(M, a_1, \dots, a_n) \equiv (N, b_1, \dots, b_n)$ *e sia* $c \in M$. *Se il tipo di* c *su* $a_1, \dots, a_n$ *è isolato, esiste* $d \in N$ *tale che* $(M, a_1, \dots, a_n, c) \equiv (N, b_1, \dots, b_n, d)$.

Dimostrazione. Sia $\Sigma(x, a_1, \dots, a_n)$ il tipo di c su $a_1, \dots, a_n$ in M, e sia $\phi(x, a_1, \dots, a_n)$ la formula che lo isola. Allora $\Sigma(x, b_1, \dots, b_n)$ è un tipo in $(N, b_1, \dots, b_n)$ (verificate!), che è isolato da $\phi(x, b_1, \dots, b_n)$. I tipi isolati (in una teoria completa) sono sempre realizzati, quindi esiste $d \in N$ c realizza $\Sigma(x, b_1, \dots, b_n)$, da cui la tesi. $\square$

Corollario 14.14. *Due modelli atomici numerabili* M, N *di una teoria completa* T *sono isomorfi.*

Dimostrazione. Per il Lemma precedente, la famiglia delle mappe elementari finite da M a N ha la proprietà del va e vieni, e possiamo dunque applicare il Teorema 6.5. Si noti che la famiglia è non vuota in quanto contiene la funzione vuota (essendo $M \equiv N$). $\square$

Lo stesso ragionamento, facendo solo il "va" e non il "vieni", mostra:

Corollario 14.15. *Data una teoria completa, un modello atomico numerabile è primo.*

Per teorie numerabili vale anche il viceversa:

Corollario 14.16. *Sia T una teoria completa numerabile e sia M un modello primo. Allora M è sia atomico che numerabile.*

Dimostrazione. M è numerabile per Löwenheim Skolem, ed è atomico perchè ogni tipo non-principale $p(x)$ viene omesso in qualche modello N (omissione dei tipi) e quindi anche necessariamente nel modello primo M (in quanto i tipi realizzati in una struttura sono necessariamente realizzati in tutti i modelli in cui quella struttura si immerge elementarmente). $\square$

Dunque per teorie complete numerabili i modelli primi sono esattamente i modelli atomici numerabili, e questi ultimi sono tutti isomorfi.

Studiamo ora le teorie numerabili che hanno un modello primo.

Teorema 14.17. *Sia T una teoria completa numerabile. Sono equivalenti:*

1. *T ha un modello atomico;*
2. *T ha un modello atomico finito o numerabile;*
3. *per ogni n gli n-tipi isolati di T sono densi nello spazio dei tipi $S_n(T)$.*

Dimostrazione. L'equivalenza tra (1) e (2) segue dai teoremi di Lowenhiem-Skolem.

$(3 \to 1)$ Assumiamo la densità dei tipi isolati. Ciò significa che ogni formula è implicata, in T, da una formula completa. Ne segue che l'insieme $\Sigma_n(x)$ consistente delle negazioni delle formule complete in $x = (x_1, \ldots, x_n)$ non può essere implicato da una singola formula (altrimenti sarebbe anche implicato da una formula completa, ma ciò è impossibile visto che la negazione della formula appartiene a $\Sigma(x)$). Per il teorema di omissione dei tipi esiste dunque un modello che omette $\Sigma_n(x)$ per ogni n (questo vale a maggior ragione se $\Sigma_n(x)$ non è un tipo, ovvero è incoerente). Ora basta osservare che una struttura M è atomica se e se e solo se M omette, per ogni n, l'insieme $\Sigma_n(x)$. Infatti, dato $a \in M$, abbiamo che a omette $\Sigma_n(x)$ se e solo se esiste $\sigma(x) \in \Sigma_n(x)$ tale che a non realizza $\sigma(x)$, ma per definizione di $\Sigma_n(x)$ la negazione di $\sigma(x)$ è una formula completa ed essendo realizzata da a ne testimonia l'atomicità.

$(1 \to 3)$ Viceversa supponiamo che T abbia un modello atomico M. Data una formula $\phi(x)$ coerente con T vogliamo dimostrare che essa è implicata (in

T) da una formula completa. Abbiamo $T \models \exists x \phi(x)$. Quindi esiste $a \in M$ tale che $M \models \phi(a)$. Il tipo $p(x)$ di a è isolato (in quanto M è atomica) e contiene $\phi(x)$. Abbiamo così dimostrato che ogni aperto base $[\phi(x)]$ dello spazio dei tipi contiene un tipo isolato, ovvero i tipi isolati sono densi. $\square$

Una condizione sufficiente per la densità dei tipi isolati è la seguente.

Lemma 14.18. *Supponiamo che T abbia al più una quantità numerabile di n-tipi. Allora gli n-tipi isolati di T sono densi in $S_n(T)$.*

Dimostrazione. Questo è un fatto puramente topologico. In uno spazio di Hausdorff compatto e numerabile (quale assumiamo sia $S_n(T)$) i punti isolati sono densi. Diamo comunque la dimostrazione nel nostro caso particolare. Dato un aperto base $[\phi(x)]$ di $S_n(T)$, supponendo che non contenga punti isolati, possiamo ovviamente trovare due aperti non-vuoti e disgiunti $[\phi_1(x)] \subset [\phi(x)]$ e $[\phi_2(x)] \subset [\phi(x)]$. Iterando la costruzione possiamo costruire un albero binario completo di formule, ciascuna delle quali implica quelle più in alto nell'albero (cioè più vicine alla radice) ed è incompatibile con quelle al suo stesso livello nell'albero. Prendendo i rami massimali dell'albero, otteniamo $2^{\aleph_0}$ tipi distinti contro le ipotesi. $\square$

14.5 Teorie ω-categoriche

Diamo una caratterizzazione delle teorie ω-categoriche. Un esempio è la teoria degli ordini densi senza estremi.

Lemma 14.19. *Sono equivalenti:*

1. *Ogni tipo di $S_n(T)$ è isolato.*
2. *$S_n(T)$ è finito.*

Dimostrazione. 1) $\to$ 2): Se tutti i tipi sono isolati, $S_n(T) = \bigcup_{p \in S_n(T)} \{p\}$ è un ricoprimento aperto di $S_n(T)$. Per compattezza esiste un sottoricoprimento finito.

2) $\to$ 1): Poichè $S_n(T)$ è di Hausdorff i suoi punti sono chiusi. Quindi se $S_n(T)$ è finito ogni sottoinsieme di $S_n(T)$ è chiuso. Passando ai complementi, ogni sottoinsieme di $S_n(T)$ è aperto. In particolare ogni punto è aperto, e quindi isolato. $\square$

Teorema 14.20. *Sia T una teoria completa in un linguaggio numerabile. Allora T è ω-categorica se e solo se tutti i modelli sono atomici, o equivalentemente, per ogni n, ogni n-tipo è isolato.*

Dimostrazione. Supponiamo che T sia ω-categorica. Dobbiamo mostrare che ogni tipo $p(x) \in S_n(T)$ è isolato. Per assurdo sia $p(x) \in S_n(T)$ non isolato. Per il teorema di omissione di tipi esiste un modello $M \models T$ che omette $p(x)$, che possiamo prendere numerabile essendo il linguaggio di T numerabile. D'altra parte, come qualsiasi altro tipo, $p(x)$ deve essere realizzato in qualche modello numerabile $N \models T$. Chiaramente M non è isomorfo ad N e T non è ω-categorica.

Viceversa supponiamo che tutti gli n-tipi di T sono isolati. Da ciò segue che tutti i modelli sono atomici. Per l'unicità dei modelli atomici numerabili ciò implica che T è ω-categorica. $\square$

14.6 Modelli costruibili

Definizione 14.21. Sia M una struttura e A un sottoinsieme di M. Diciamo che M è costruibile su A se possiamo scrivere M nella forma $A \cup \{b_\alpha : \alpha < \gamma\}$ per qualche ordinale γ, in modo che il tipo di ciascun b_β su $B_\beta := A \cup \{b_\alpha : \alpha < \beta\}$ sia isolato. Similmente definiamo il concetto di sottoinsieme di M costruibile su A.

Teorema 14.22. *Se M è costruibile su A, allora M è primo su A.*

Dimostrazione. Sia $M = A \cup \{b_\alpha : \alpha < \gamma\}$ una costruzione di M e sia N un modello di $Th(M,a)_{a \in A}$. Dunque esiste una mappa elementare $f : A \to N$ e per mostrare che M è primo dobbiamo cercare di estenderla ad una immesione elementare da M ad N. A tal fine definiamo induttivamente una successione di mappe elementari $f_\beta : B_\beta \to N$, dove $B_\beta := A \cup \{b_\alpha : \alpha < \beta\}$, come segue. Per iniziare poniamo $f_0 = f$. Se β è limite possiamo definire f_β come l'unione delle f_i con $i < \beta$ (osservando che l'unione crescente di mappe elemantari è elementare). Per finire sia $\beta = \alpha + 1$. Per ipotesi induttiva $f_\alpha : B_\alpha \to N$ è elementare. Per definizione $B_\beta = B_\alpha \cup \{b_\alpha\}$ e per l'ipotesi di costruibilità il tipo $p(x)$ di b_α su B_α è isolato. Sia $q(x) = (f_\alpha p)(x)$ l'immagine di $p(x)$ tramite f_α, ovvero l'insieme di formule che si ottiene rimpiazzando, nelle formule di $p(x)$, ogni parametro con la sua immagine tramite f_α. Poiché f_α è elementare, è facile verificare che $q(x)$ è un tipo di N, ovvero è finitamente soddisfacibile in N. Inoltre, essendo l'immagine di un tipo isolato tramite una mappa elementare, $q(x)$ è un tipo isolato di N (a parametri da $C_\alpha := f_\alpha(B_\alpha)$). I tipi isolati sono sempre realizzati, quindi esiste un $c_\alpha \in N$ che realizza $q(x)$. Possiamo ora estendere f_α ad una mappa $f_{\alpha+1} : B_\alpha \cup \{b_\alpha\} \to N$ che manda b_α in c_α ed osservare che tale mappa continua ad essere elementare. L'unione delle f_β è l'immersione elementare cercata da M ad N. $\square$

Dimostriamo ora che i modelli costruibili sono atomici.

Definizione 14.23. Sia M una struttura e A un sottoinsieme di M. Diciamo un elemento $b \in M$ è atomico su A se il suo tipo su A è isolato. Diciamo che un insieme $B \subseteq M$ è atomico su A se ogni suo elemento è atomico su A. Se $B = M$ diremo che M è un modello atomico su A.

Lemma 14.24. *Siano $A \subseteq B \subseteq C$ sottoinsiemi di un modello di T. Se C è atomico su B e B è atomico su A, allora C è atomico su A.*

Dimostrazione. Data una n-upla c da C, sia $\varphi(x,b)$ la formula che isola il suo tipo su B (dove b è una tupla di parametri da B) e sia $\psi(y)$ la formula che isola il tipo di b su A. Allora $\exists y(\psi(y) \wedge \varphi(x,y))$ isola il tipo di c su B. Infatti, data una L-formula $\theta(x)$ realizzata da c, essa è implicata da $\varphi(x,b)$ per ipotesi, il che è come dire che la formula $\forall x(\varphi(x,y) \to \theta(x))$ appartiene al tipo di b, e pertanto è implicata da $\psi(y)$. Ne segue che $\exists y(\psi(y) \wedge \varphi(x,y))$ implica $\theta(x)$. $\square$

Lemma 14.25. *Se M è costruibile su A, allora è atomico su A.*

Dimostrazione. Sia $A_\alpha = A \cup \{b_i : i < \alpha\}$. Mostro per induzione su α che il tipo su A di ogni n-upla di elementi di A_α è isolato, ovvero l'insieme A_α è atomico su A. Questo è chiaro se α è limite. Consideriamo $A_{\alpha+1} = A_\alpha \cup \{b_\alpha\}$. Per definizione il tipo di b_α su A_α è isolato. Ne segue che $b_\alpha \cup A_\alpha$ è atomico su A_α, ovvero il tipo di ogni n-upla da $b_\alpha \cup A_\alpha$ è isolato su A_α. Per induzione possiamo assumere che A_α sia isolato su A. Per transitività di "atomico su" Lemma 14.24, concludiamo che $A_{\alpha+1}$ è isolato su A. $\square$

Teorema 14.26. *Sia T una teoria totalmente trascendente e sia M un modello di T. Allora per ogni sottoinsieme $A \subseteq M$ esiste $N \prec M$ contenente A e costruibile su A.*

Dimostrazione. Se A è il dominio di una sottostruttura elementare di M non c'è nulla da dimostrare. Altrimenti esiste una formula $\phi(x)$ con parametri da A tale che $M \models \exists x \phi(x)$ ma $M \not\models \phi(a)$ per ogni $a \in A$. Scelgo una tale $\phi(x)$ di minimo rango di Morley e, a parità di rango, di minimo grado. Dico che $\phi(x)$ isola un 1-tipo completo di $Th(M,a)_{a \in A}$. Infatti se così non fosse esisterebbe una formula $\psi(x) \in L_A$ tale che $\psi(x) \wedge \phi(x)$ e $\neg\psi(x) \wedge \phi(x)$ siano entrambe coerenti con $Th(M,a)_{a \in A}$, contraddicendo la minimalità di $\phi(x)$. Ne segue che, se b_0 verifica $\phi(x)$, il tipo di b_0 su A è isolato. Inoltre per la scelta di $\phi(x)$, b_0 non appartiene ad A. Poniamo ora $A' = A \cup \{b_0\}$ e ripetiamo la costruzione con A' al posto di A. In questo modo otteniamo una successione strettamente crescente di insiemi $A_0 = A$, $A_{\alpha+1} = {A_\alpha}'$ prendendo l'unione $A_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha$ ai passi limite. Ad un certo punto dovremo necessariamente fermarci (essendo M un insieme) ottendo una sottostruttura elementare $N = A_\alpha$ di M costruibile su A. $\square$

15 Indiscernibili

Dato un insieme X, sia $[X]^n$ l'insieme dei sottoinsiemi di X di cardinalità n. Dato $k \in \omega$, una k-colorazione di $[X]^n$ è una funzione $c\colon [X]^n \to k$. Osserviamo che un grafo su un insieme X di vertici può essere visto come una 2-colorazione di $X^{[2]}$ (assegno colore 1 agli archi del grafo).

Teorema 15.1. *(Ramsey) Sia X un insieme infinito numerabile e siano $k, n < \omega$. Data una k-colorazione $c\colon [X]^n \to k$, esiste un sottoinsieme infinito Y di X tale che $[Y]^n$ è monocromatico (ovvero c è costante su di esso).*

Dimostrazione. Il caso $n = 1$ è banale. Assumiamo $n > 1$. Per ogni $j \in \mathbb{N}$ poniamo $X_j = X \setminus \{j\}$ e definiamo $c_j : [X_j]^{n-1} \to k$ ponendo $c_j(\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}) =$

$c(\{x_1, \ldots, x_{n-1}, j\})$. Per induzione possiamo assumere che esista un sottoinsieme infinito X'_j di X_j tale che $[X'_j]^{n-1}$ sia monocromatico per c_j. Sia $k_j < k$ il corrisponente colore costante assunto. Tutti gli insiemi di n elementi costituiti da j e $n-1$ elementi di X'_j hanno lo stesso colore rispetto a c (per la precisione hanno colore k_j). Per induzione su j possiamo fare in modo che $X'_{j+1} \subset X'_j$ per ogni j. Definiamo ora induttivamente $j_0 \in \mathbb{N}$ in modo arbitrario e $j_{m+1} \in X'_{j_m}$. Per la finitezza del numero k dei colori, la successione $(k_{j_m})_{m\in\mathbb{N}}$ ha una sottosuccessione costante $(k_{j_{r_m}})_{m\in\mathbb{N}}$. L'insieme $Y = \{j_{r_n} : n \in \mathbb{N}\}$ è allora come richiesto. □

Definizione 15.2. Sia M una L-struttura e sia $(b_i : i \in I)$ una famiglia di elementi distinti di M indiciata da un insieme totalmente ordinato $(I, <)$. Diciamo che $(b_i : i \in I)$ è indiscernibile se per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $i_1 < \ldots < i_n$ in I, il tipo di $(b_{i_1}, \ldots, b_{i_n})$ non dipende dalla scelta degli indici $i_1, \ldots, i_n$ (ovvero coincide con il tipo di $(b_{j_1}, \ldots, b_{j_n})$ per ogni altra n-upla crescente $j_1 < \ldots < j_n$). Similmente definiamo la nozione di famiglia indiscernibile su un insieme $A \subset M$ di parametri, considerando i tipi su A.

Teorema 15.3. *Data una teoria completa T con modelli infiniti e un ordine totale $(I, <)$, esiste un modello di T con una famiglia $(c_i : i \in I)$ di indiscernibili indiciata da I.*

Dimostrazione. Trattiamo prima il caso $I = \omega$, con l'usuale ordine. L'indiscernibilità di $(b_i : i \in I)$ può essere espressa da una infinità di assiomi della forma $\phi(b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}) \iff \phi(b_{j_1}, \ldots, b_{j_n})$ (*) dove $i_1 < \ldots < i_n$ e $j_1 < \ldots < j_n$ variano in I, $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ varia tra le L-formule, e i b_i sono simboli di costante. Per compattezza basta dimostrare che, dato un insieme finito $\Delta(x_1, \ldots, x_n)$ di formule in $x_1, \ldots, x_n$, esiste un modello M con una famiglia "Δ-indiscernibile", ovvero una famiglia che verifica (*) per le formule ϕ in Δ. A tal fine prendiamo un modello qualsiasi M di T e fissiamo una successione $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ di elementi di M. Coloriamo le n-uple $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})$ con $2^{|\Delta|}$ colori, dove i colori sono in corrispondenza biunivoca con i sottoinsiemi di Δ e codificano quali delle formule di Δ sono soddisfatte dalla n-upla. Per il teorema di Ramsey esiste una sottosuccessione infinita degli $(a_i)_i$ tale che la colorazione è costante sulle n-uple crescenti di elementi della sottosuccessione, ovvero la sottosuccessione è Δ-indiscernibile.

Il caso in cui $(I, <)$ è un arbitrario ordine totale segue per compattezza. Dato un modello M con una famiglia di indiscernibili $(b_n : n < \omega)$, introduciamo nuove costanti c_i $(i \in I)$ con degli assiomi che esprimono la loro indiscernibilità. Questi assiomi sono coerenti con T in quanto ogni loro sottoinsieme finito ha come modello un'espansione di M in cui ciascuno dei c_i che intervengono è intepretato con un opportuno b_{n_i} (basta che $i \mapsto n_i$ preservi l'ordine e lo possiamo fare perché abbiamo un numero finito di c_i). □

Osservazione. Nella dimostrazione di cui sopra possiamo anche mettere tra gli assiomi tutte le formule della forma $\varphi(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n})$ dove $i_1 < \ldots < i_n$ e $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ appartiene al tipo di $(b_1, \ldots, b_n)$ in M. In tal modo la conclusione del teorema si rafforza, stabilendo un legame tra i tipi delle n-uple dei c_j e quelli delle n-uple dei b_i.

Il seguente lemma fornisce modelli arbitrariamente grandi che realizzano pochi tipi sugli insiemi numerabili di parametri.

Lemma 15.4 (Lachlan)**.** *Data una teoria numerabile T ed un cardinale $\kappa \geq \aleph_1$, esiste un modello $M \models T$ di cardinalità κ che realizza, per ogni sottoinsieme numerabile A di M, al più $\aleph_0$ 1-tipi su A.*

Dimostrazione. Possiamo assumere che T sia skolemizzata, ovvero per ogni formula $\phi(\overline{x}, y)$ esista una funzione definibile f_ϕ tale che T dimostri $(\forall \vec{x} y)(\phi(\vec{x}, y) \to \phi(\vec{x}, f_\phi(x)))$ (possiamo infatti ricondurci a questo caso aggiungendo simboli di costante f_ϕ e osservando che l'introduzione di assiomi della forma $\phi(\vec{x}, y) \to \phi(\vec{x}, f_\phi(x))$ preserva la coerenza). Fatta questa riduzione ne segue che T è model completa, ovvero ogni immersione tra modelli di T è un'immersione elementare. Ne segue anche (per il test di Tarski-Vaught) che dato un modello M di T e un sottoinsieme A di M, la chiusura definibile di A in M è una sottostruttura elementare.

Assumendo dunque che T sia skolemizzata procediamo come segue. Sia N un modello di T con una successione indiscernibile $(b_i : i < \kappa)$. Sia $M \prec N$ la chiusura definibile di $B = \{b_i : i < \kappa\}$. Ogni elemento c di M è della forma $c = f(b_{j_1}, \ldots, b_{j_n})$ per qualche funzione $\emptyset$-definibile f e qualche n-upla da B. Poichè il linguaggio di T è numerabile, $|M| = \kappa$. Dato un sottoinsieme numerabile A di M, dobbiamo mostrare che M realizza al più $\aleph_0$ 1-tipi su A. Osserviamo che A è incluso nella chiusura definibile di un sottonsieme numerabile $B_0 = \{b_i : i \in I\}$ di $B = \{b_i : i < \kappa\}$. Dato $c \in M$, scriviamo $c = f(b_{j_1}, \ldots, b_{j_n})$ come sopra e sia $J = \{j_1, \ldots, j_n\} \subset \kappa$. Per l'indiscernibilità, il tipo di c su A dipende solo dalla scelta di f ($\aleph_0$ possibilità) e da come gli elementi di J sono situati tra gli elementi di I, ovvero dal tipo di isomorfismo di $(J, J \cup I, <)$ (verificate!). Siccome I è numerabile e bene ordinato (essendo incluso in κ) e J è finito, ci sono solo $\aleph_0$ possibilità (basta specificare per ogni $j \in J$ il minimo elemento di I maggiore di j). $\square$

16 Teorie stabili

Proposizione 16.1. *Sia A un insieme di parametri in un modello M e sia $q(\overline{y}) \in S_n(A)$ un n-tipo su A realizzato da $\overline{b} \in M$. La mappa $p(x, \overline{y}) \mapsto p(x, \overline{b})$ è una bigezione tra gli $n+1$-tipi $p(x, \overline{y}) \in S_{n+1}(A)$ che si proiettano su $q(\overline{y})$ e gli 1-tipi in $S_1(\overline{b}A)$.*

Definizione 16.2. Una teoria T è **κ-stabile** se per ogni insieme A di parametri in un modello di T, l'insieme degli 1-tipi $S_1(A)$ ha cardinalità $\leq \kappa$. Per la proposizione precedente ciò equivale a richiedere che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'insieme degli n-tipi in $S_n(A)$ abbia cardinalità $\leq \kappa$.

Teorema 16.3. *Sia T una teoria numerabile κ-categorica, $k \geq \aleph_1$. Allora T è ω-stabile.*

Dimostrazione. Se no sia M un modello la cui teoria ha più di $\aleph_0$ tipi su un insieme numerabile $A \subset M$ di parametri. Posso realizzare $\aleph_1$ di questi tipi in un'estensione elementare N di M, e per i teoremi di Löwenheim-Skolem posso prendere M di cardinalità $\leq \kappa$ ed N di cardinalità κ. D'altra parte per il Lemma 15.4 esiste anche un modello N' di cardinalità κ che realizza solo $\aleph_0$ tipi su A. Chiaramente N non è isomorfo ad N', contraddicendo la κ-categoricità. □

Lemma 16.4. *Se T è ω-stabile allora è totalmente trascendente.*

Dimostrazione. Se T non è totalmente trascendente esiste un modello M con un albero binario infinito di insiemi definibili non vuoti. I parametri che intervengono nelle formule corrispondenti formano un insieme numerabile $A \subseteq M$ e ogni ramo nell'albero fornisce un tipo su A. Vi sono dunque almeno $2^{\aleph_0}$ tipi sull'insieme numerabile A, contraddicendo la ω-stabilità. □

Lemma 16.5. *Se T è totalmente trascendente e il linguaggio è numerabile allora T è λ-stabile per ogni $\lambda \geq \aleph_0$.*

Dimostrazione. Se T è totalmente trascendente, ogni tipo $p(x)$ con parametri A presi da $M \models T$ è determinato dalla formula $\phi_p(x)$ di minimo rango e grado presente nel tipo. Infatti una formula di L_A appartiene a $p(x)$ se e solo se in congiunzione con $\phi_p(x)$ non abbassa il rango o, a parità di rango, il grado. Siccome ci sono al più $|L_A|$ formule con parametri da $A \subseteq \mathrm{dom}(M)$, ci sono al più $|L_A|$ tipi su quei parametri. Essendo L numerabile, ne segue che T è λ-stabile. □

Teorema 16.6. *Sia T una teoria completa numerabile ω-stabile. Allora T ha modelli saturi di qualsiasi cardinalità regolare λ. Inoltre dato un cardinale $\kappa \geq \lambda$, T ha un modello λ-saturo di cardinalità κ.*

Dimostrazione. Sia M_0 un modello di T di cardinalità κ. Costruiamo una catena elementare di modelli $(M_i : i < \lambda)$ in modo che $M_{\alpha+1}$ realizzi tutti gli 1-tipi su M_α. Se M_α ha cardinalità κ possiamo mantenere $M_{\alpha+1}$ di cardinalità κ in quanto, per la κ-stabilità, i tipi da realizzare sono al più κ. L'unione $M = \bigcup_{i<\lambda} M_i$ della catena ha cardinalità κ. Per mostrare che M è λ-saturo consideriamo un insieme $A \subset M$ di parametri di cardinalità $< \lambda$ e sia $p(x)$ un tipo su A. Siccome λ è assunto regolare, $A \subset M_\alpha$ per qualche $\alpha < \lambda$. Poiché posso estendere $p(x)$ a un tipo su M_α, per costruzione $p(x)$ è realizzato in $M_{\alpha+1}$ e quindi in M. □

17 Teorie $\aleph_1$-categoriche

Teorema 17.1. *Sia $\kappa > \aleph_0$ e sia T una teoria completa numerabile κ-categorica. Allora l'unico modello M di cardinalità κ è saturo.*

Dimostrazione. Scriviamo κ come sup $\bigcup_{i \in I} \lambda_i$ di cardinali regolari λ_i. Essendo κ-categorica T è ω-stabile, e pertanto ha un modello λ_i-saturo di cardinalità κ, che deve coincidere con l'unico modello M di cardinalità κ. M è pertanto λ_i-saturo per ogni $i \in I$, e dunque è κ-saturo. □

Teorema 17.2 (Lachlan)**.** *Se T è totalmente trascendente ed M è un modello non numerabile di T, allora M possiede estensioni elementari arbitrariamente grandi che non realizzano alcun insieme numerabile $\Sigma(y)$ di L_M -formule che non sia già realizzato in M.*

Dimostrazione. Poiché T è totalmente trascendente, non esistono alberi binari infiniti di L_M-formule $\varphi(x)$. Chiamiamo $\varphi(x) \in L_M$ "grande" se ha una quantità non numerabile di realizzazioni in M. Per la totale trascendenza non esistono alberi binari infiniti di formule, e in particolare di formule grandi. Esiste quindi una formula grande $\theta(x)$ "minimale", ovvero una formula che non è scrivibile come disgiunzione di due formule grandi incompatibili (tali cioè che gli insiemi da esse definiti siano disgiunti). Data una formula $\varphi(x) \in L_M$ $\theta(x) \wedge \varphi(x)$ è grande se e solo se $\theta(x) \wedge \neg\varphi(x)$ non lo è. Ne segue che l'insieme delle $\varphi(x) \in L_M$ tali che $\theta(x) \wedge \varphi(x)$ è grande è un tipo completo $p(x)$ di M a parametri da M. Si noti che $p(x)$ contiene solo formule grandi.

Ogni insieme numerabile $\{\gamma_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ di formule in $p(x)$ è realizzato in M (perché l'insieme $\theta(M)$ delle realizzazioni di $\theta(x)$ in M, essendo più che numerabile, non può essere unione degli insiemi "piccoli" $\theta(M) \cap \neg\gamma_n(M)$). D'altra parte $p(x)$ stesso non è realizzato in M (perché per ogni $m \in M$ la formula $x = m$, non essendo grande, non vi appartiene) .

Sia $a \models p(x)$ una realizzazione di $p(x)$ in un'estensione elementare $N \succ M$ (necessariamente propria in quanto $p(x)$ non è realizzato in M). Passando ad una sottostruttura elementare possiamo suppore che N sia costruibile su $M \cup \{a\}$ e quindi sia atomico su tale insieme (in quanto ogni teoria totalmente trascendente ha, su ogni sottoinsieme di un suo modello, un'estensione costruibile in base al Teorema 14.26). Vogliamo mostrare che N non realizza alcun insieme numerabile di L_M-formule che non sia già realizzato in M. Una volta ottenuto questo scopo possiamo iterare la costruzione a partire da N e ottenere estensioni arbitrariamente grandi con la medesima proprietà.

Sia dunque $\Sigma(y)$ un insieme numerabile di L_M -formule non realizzato in M e supponiamo per assurdo che $b \in N$ realizzi $\Sigma(y)$. Visto che N è atomico su $M \cup \{a\}$, il fatto che $b \in N$ realizzi $\Sigma(y)$ è esprimibile come condizione su a (coinvolgente eventuali parametri da M). Infatti sia $\chi(x, y) \in L_M$ tale che $\chi(a, y)$ isoli il tipo di b su $M \cup \{a\}$. Data $\sigma(y) \in L_M$ abbiamo

$$b \models \sigma(y) \iff a \models \sigma^*(x)$$

dove $\sigma^*(x) := \forall y(\chi(x, y) \to \sigma(y))$. L'insieme $\{\sigma^*(x) : \sigma(x) \in \Sigma(x)\} \cup \{\exists y \chi(x, y)\}$ è dunque incluso nel tipo $p(x)$ di a ed essendo numerabile è realizzato da qualche $a' \in M$ (per le proprietà del tipo $p(x)$). Per ogni $\sigma(x) \in \Sigma(x)$ abbiamo dunque $M \models \sigma^*(a')$ e $M \models \exists y \chi(a', y)$. Esiste allora $b' \in M$ tale $\chi(a', b')$ e poiché $M \models \sigma^*(a')$ otteniamo $M \models \sigma(b')$. Visto che ciò vale per ogni $\sigma(x)$ abbiamo dunque $b' \models \Sigma(y)$, contro le ipotesi. □

Enunciamo il teorema di Morley "verso il basso".

Teorema 17.3. *Una teoria completa numerabile T che è κ-categorica per qualche κ non numerabile è anche $\aleph_1$-categorica.*

Dimostrazione. Supponiamo che T sia κ-categorica ma non $\aleph_1$-categorica. Allora T ha un modello M di cardinalità $\aleph_1$ che non è saturo (visto che i modelli saturi della stessa cardinalità sono isomorfi). Sia $p(x) \in S_1(A)$ un tipo non realizzato in M su un sottoinsieme numerabile A di M. Essendo κ-categorica, T è ω-stabile (16.3), e quindi totalmente trascendente. Esiste allora per il teorema di Lachlan, Teorema 17.2, un'estensione elementare N di M di cardinalità κ che non realizza $p(x)$. D'altra parte in ogni teoria κ-categorica tutti i modelli di cardinalità κ sono saturi. Assurdo. $\square$

Riferimenti bibliografici

[1] Wilfrid Hodges. *Model theory, volume 42 of Encyclopedia of Mathematics and its Applications.* Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[2] Anand Pillay. An application of model theory to real and p-adic algebraic groups. *Journal of Algebra*, 126(1):139–146, 1989.