Teoria dei modelli

Alessandro Berarducci

Dipartimento di Matematica
Pisa

3 Marzo 2014

Teoria dei campi algebricamente chiusi

Definizione 1

La teoria del primo ordine dei campi algebricamente chiusi, ACF, è formulata nel linguaggio $L = \{0, 1, +, -, \cdot\}$. Gli assiomi sono quelli dei campi più uno schema di assiomi per dire che ogni polinomio di grado $n > 0$ ha uno zero:

$$\forall a_0, \ldots, a_{n-1} \exists x (x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0).$$

Volendo rimanere nell'ambito della logica del primo ordine abbiamo bisogno di infiniti assiomi, uno per ogni grado $n \in \mathbb{N}$.

Forma normale disgiuntiva

Lemma 2 (Forma normale disgiuntiva)

*Sia $F = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ un insieme di formule e sia ψ una loro combinazione booleana. Allora ψ può essere messa in **forma normale disgiuntiva**, ovvero equivale ad una disgiunzione finita di congiunzioni finite di formule in F o negazioni di formule in F.*

Dimostrazione.

Chiamiamo "clausola" una formula della forma $\pm\phi_1 \wedge \ldots \wedge \pm\phi_n$ dove $\pm\phi_i$ è ϕ_i oppure $\neg\phi_i$. Ci sono in tutto 2^nclausole. Ciascuna clausola implica ψ oppure implica $\neg\psi$. La ψ equivale alla disgiunzione della clausole che la implicano.

$\square$

Eliminazione dei quantificatori

Teorema 3

ACF ammette eliminazione dei quantificatori: ogni formula equivale ad una formula senza quantificatori.

Osservazione 4

Una teoria T ammette EQ se e solo se ogni formula primitiva equivale ad una formula senza quantificatori. Una **formula primitiva** è una formula della forma $\exists x \phi$ dove ϕ è una congiunzione di formule atomiche e di negazioni di formule atomiche.

Dimostrazione.

Per avere EQ basta mostrare che una formula della forma $\exists x \phi$, con ϕ senza quantificatori, equivale ad una formula senza quantificatori. Mettendo ϕ in forma normale disgiuntiva ed osservando che $\exists x(\alpha \vee \beta)$ equivale a $\exists x \alpha \vee \exists x \beta$, possiamo ulteriormente supporre che ϕ sia una congiunzione di formule atomiche o negazioni di formule atomiche. $\square$

Eliminazione dei quantificatori in ACF

Le formule primitive sono della forma $\exists x(\bigwedge_{i<m} t_i = 0 \wedge \bigwedge_{j<n} u_j \neq 0)$ dove i t_i e gli u_j sono polinomi.

1. $u \neq 0$ equivale a $\exists y(uy = 1)$. Quindi basta eliminare il quantificatore da $\varphi(x) = \exists x(\bigwedge_{i<m} t_i = 0)$. Posso assumere $\deg_x(t_i) > 0$ altrimenti porto t_i =0 fuori dal quantificatore.
2. Se $m = 0$ osservo che $\exists x(a_0 x^{n_0} + r_0 = 0)$ equivale a $a_0 \neq 0 \vee (a_0 = 0 \wedge \exists x(r_0 = 0))$ e procedo per induzione.
3. Se $m > 0$ scrivo $t_0 = a_0 x^n + r_0$ e $t_1 = a_1 x^{n_1} + r_1$ e pongo $t_0' := a_1 t_0 - a_0 x^{n_0 - n_1} t_1$ (assumendo $n_0 \geq n_1 > 0$). Noto che $t_0 = 0 \wedge t_1 = 0$ equivale a $(a_1 = 0 \wedge t_0 = 0 \wedge r_1 = 0) \bigvee (a_1 \neq 0 \wedge t_0' = 0 \wedge t_1 = 0)$
4. Poiché a_1 non dipende da x la $\varphi(x)$ equivale a

$$a_1 = 0 \wedge \exists x(t_0 = 0 \wedge r_1 = 0 \wedge \bigwedge_{2 \leq i < m} t_i = 0)$$

$$\bigvee \qquad a_1 \neq 0 \wedge \exists x(t_0' = 0 \wedge t_1 = 0 \wedge \bigwedge_{2 \leq i < m} t_i = 0)$$

Finisco ragionando per induzione sui gradi.

Insiemi costruibili

In termini geometrici il teorema di eliminazione per ACF ci dice che ogni insieme definibile in un campo algebricamente chiuso è **costruibile**, ovvero è una combinazione booleana di insiemi Zariski-chiusi (zeri di polinomi).

Completezza

Definizione 5

La teoria ACF_0 dei campi algebricamente chiusi di caratteristica zero si ottiene da ACF con l'aggiunta dello schema infinito di assiomi $1 \neq 0$, $1+1 \neq 0$, $1+1+1 \neq 0$, ecc. Per p primo, la teoria ACF_p dei campi algebricamente chiusi di caratteristica p is ottiene aggiungendo a ACF l'assioma $p = 0$, dove $p := 1+1+\ldots+1$.

Teorema 6

ACF_0 e ACF_p sono teorie complete.

Dimostrazione.

Dato un enunciato φ dobbiamo mostrare che esso è vero in un modello di ACF_0 se e solo se è vero in tutti i modelli. Per il Teorema 3 basta dimostrare questo fatto per le formule senza quantificatori. Ma questo è ovvio in quanto una formula senza quantificatori vale in un modello K di T se e solo se vale nel suo sottocampo primo $\mathbb{Q} \subseteq K$. Analogo ragionamento funziona in caratteristica p osservando che ogni campo di caratteristica p contiene un sottocampo isomorfo a $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. $\square$

Criterio per la completezza

Osservazione 7

La dimostrazione sopra data mostra più in generale che se una teoria T ammette eliminazione dei quantificatori e ha un modello che si immerge in qualunque altro modello, allora è completa.

Principio di Lefschetz

Proposizione 8 (Principio di Lefschetz)

Sia σ una formula nel linguaggio dei campi. Sono equivalenti:

1. *σ è vera in qualche campo algebricamente chiuso di caratteristica zero.*
2. *σ è vera in tutti i campi algebricamente chiusi di caratteristica zero.*
3. *Per infiniti numeri primi p, σ è vera in tutti in tutti i campi algebricamente chiusi di caratteristica p.*

Dimostrazione.

Se σ è vera in $\mathbb{C}$, allora per completezza $ACF_0 \models \sigma$, e per compattezza basta un sottoinsieme finito degli assiomi diACF_0 a dedurre σ. Ne segue che σ vale in tutti i campi algebricamente chiusi di caratteristica abbastanza grande. Analogamente se σ è falsa in $\mathbb{C}$ allora $ACF_0 \models \neg\sigma$ e σ è falsa in tutti i campi algebricamente chiusi di caratteristica abbastanza grande. $\square$

Teorema di Ax

Corollario 9 (Ax)

Sia $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ una mappa polinomiale iniettiva. Allora f e' surgettiva.

Dimostrazione.

Sia $f(\overline{x}) = (f_1(\overline{x}), \dots, f_n(\overline{x}))$ e supponiamo che $f_i \in \mathbb{C}[\overline{x}]$ sia di grado totale $\leq d$. Quantificando sui coefficienti possiamo trovare una formula del primo ordine $\Theta_{n,d}$ che afferma che ogni mappa polinomiale iniettiva f in n variabili e di grado totale $\leq d$ e' surgettiva. Chiaramente $\Theta_{n,d}$ e' vera nei campi finiti. Ne segue che essa vale anche nell'unione crescente $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_n$ di una famiglia di campi finiti: infatti se i coefficienti di f appartendono a K_n la restrizione di f ad ogni K_m con $m \geq n$ è surgettiva verso K_m. In particolare $\Theta_{n,d}$ vale nella chiusura algebrica di ogni campo finito e per il principio di Lefschetz vale in $\mathbb{C}$.

$\square$

Hilbert Nullstellensatz I

Teorema 10 (Hilbert's Nullstellensatz, prima forma)

Sia K un campo algebricamente chiuso. Sia $P(x_1, \ldots, x_n) = 0$ un sistema finito di equazioni polinomiali in $x_1, \ldots, x_n$. Se P ha una soluzione in qualche campo L che estende K, allora ha soluzione in K.

Dimostrazione.

Ogni campo ha una chiusura algebrica. Quindi possiamo assuere L algebricamente chiuso. La formula $\exists \overline{x} P(\overline{x}) = 0$ è vera in L. Per eliminazione dei quantificatori essa equivale, nei modelli di ACF, ad una formula senza quantificatori, e quindi è vera anche nella sottostruttura K. $\square$

Hibert Nullstellensatz II

Corollario 11 (Hilbert's Nullstellensatz, seconda forma)

Sia K un campo algebricamente chiuso. Se un polinomio $f \in K[\overline{x}]$ si annulla ogniqualvolta si annullano i polinomi $f_1, \ldots, f_m$, allora qualche potenza di f è nell'ideale generato da $f_1, \ldots, f_m$.

Dimostrazione.

Per le ipotesi i polinomi $f_1 \cdots f_m, 1-yf$ non hanno zeri comuni (dove y è una nuova variabile). Per la prima forma del Nullstellensatz essi generano l'ideale unitario of $K[\overline{x}, y]$. Sostituendo $y = 1/f$ e liberandosi dai denominatori così introdotti si ottiene il risultato. $\square$

Decidibilità

Osservazione 12

Una teoria completa e ricorsivamente assiomatizzata è decidibile: esiste un algoritmo per stabilire se un enunciato è conseguenza della teoria.

Corollario 13

Le teorie ACF_0 e ACF_p sono decidibili.