Analisi II. Foglio di esercizi n.2
3/10/2016

`Esercizi su limiti di più variabili e funzioni continue`

1. Consideriamo $f(x,y) = \log(xy)$. Scrivere l'insieme A più grande dove f è definita ed anche continua. Tracciare un grafico qualitativo di tale insieme. Determinare $f(A)$.

2. Data $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, definita su $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Studiarne la continuità su A ed i suoi limiti in $D(A) \setminus A$.

3. Si consideri $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}$ in $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
   (a) Stabilire se f è continua su A.
   (b) Studiare il limite di f per $(x,y) \to (0,0)$, calcolandolo nel caso esista.
   (c) Stabilire se è possibile estendere f anche nell'origine ottenendo una nuova funzione continua in $\mathbb{R}^2$. In tal caso determinare tale funzione (detta *estensione continua*).

4. Studiare il limite di $f(x,y) = \dfrac{\log(1+xy^4)}{x^2+y^4}$ per $(x,y) \to (0,0)$ e calcolarlo nel caso esista.

5. Sia $f(x,y) = \dfrac{x^2-y}{x+y}$.
   (a) Determinare il più grande insieme $A \subset \mathbb{R}^2$ dove è definita f.
   (b) Determinare $D(A) \setminus A$.
   (c) Provare la non esistenza del limite di f nei punti $(\alpha, -\alpha) \in D(A)$, con $\alpha > 0$.

6. Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$, fissiamo $x \in D(A)$ e supponiamo che
$$\lim_{x \to x_0} f = l \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0} g = -\infty.$$
   Mostrare che $\lim_{x \to x_0} (f+g) = -\infty$, utilizzando le definizioni di limite.

7. Consideriamo $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y} + e^{\frac{x+y}{x-y}}$. Determinare il dominio più grande $A \subset \mathbb{R}^2$ dove f è ben definita ed ivi continua. Determinare $D(A)$ e stabilire se esiste il limite di f per $(x,y) \to z_0 = (2,2) \in D(A) \setminus A$.

8. Consideriamo $f : S \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \dfrac{x^2+y^2}{1+z^2-x^2-y^2}$ e
$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = z^2 \leq 1\right\}.$$
Tracciare un grafico qualitativo di S e stabilire l'esistenza e, nel caso, calcolare il massimo ed il minimo di f su S.

9. Consideriamo $f : B(0,2) \to \mathbb{R}$ definita come $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$.
   (a) Tracciare il grafico di f.
   (b) Stabilire se f ha massimo e minimo.
   (c) Determinare l'immagine di f, $\sup\limits_{B(0,2)} f$ e $\inf\limits_{B(0,2)} f$.

10. Consideriamo $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ e $f(x,y) = -\sin^2(x-y)$. Determinare massimo e minimo di f utilizzando solo disuguaglianze.

11. Fissiamo $r > 0$, $B(0,r) \subset \mathbb{R}^n$ ed $f : B(0,r) \to \mathbb{R}$ con $f(x) = 1 - |x|^2$. Determinare l'immagine di f, calcolando $\sup\limits_{B(0,r)} f$, $\inf\limits_{B(0,r)} f$ e stabilendo se esistono massimo e minimo di f su $B(0,r)$.

12. Si consideri $f(x,y) = e^{-\frac{1}{x^4-y}}\sqrt{x-y}$.
   (a) Determinare il più grande insieme $A \subset \mathbb{R}^2$ dove è definita f.
   (b) Determinare $D(A) \setminus A$.
   (c) Studiare l'esistenza del limite di f nei punti $(1,1)$ e $(\frac{1}{2}, \frac{1}{16})$, i quali stanno in $D(A)$.

   Sugg. Per studiare l'esistenza del limite in $(1,1)$ considerare le regioni $R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 > x > y > x^4\}$ e $R_2 \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 > x > y > 1\}$. In R_1 abbiamo la successione $z_k = (t_k, t_k^3)$ con $t_k = 1 - \frac{1}{k}$, la quale tende a $(1,1)$ per $k \to \infty$.

13. Studiare l'esistenza del limite di $f(x,y) = \dfrac{|x|^\alpha y}{x^4 + (y^2)^\beta}$ per $(x,y) \to (0,0)$ al variare di $\alpha, \beta > 0$ e calcolarlo ove esiste.

   Sugg. Considerare la fattorizzazione
$$f(x,y) = \frac{|x|^\alpha}{(x^4+(y^2)^\beta)^{\alpha/4}} \frac{y}{(x^4+(y^2)^\beta)^{1/2\beta}} (x^4+(y^2)^\beta)^{\frac{\alpha}{4}+\frac{1}{2\beta}-1}.$$

14. Studiare l'esistenza del limite di

$$f(x,y) = \frac{|x|^\alpha y}{x^2 + y^2 + x^2y^2} \qquad \text{per } (x,y) \to (0,0)$$

al variare di $\alpha > 0$ e calcolarlo ove esiste.

15. Studiare se esiste il limite di $f(x,y) = \dfrac{|\log(1+x^2y)|^\alpha}{x^2+y^4}$ per $(x,y) \to (0,0)$ al variare di $\alpha > 0$ e calcolarlo ove esiste.

16. Data $f(x,y,z) = \dfrac{e^{-1/(x^2+y^2+z^2)}}{x^8+y^8+z^8}$, studiarne il limite per $(x,y,z) \to (0,0,0)$.
Sugg. Osservare che

$$x^8 + y^8 + z^8 \geq \max\{|x|,|y|,|z|\}^8 \geq \left(\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}\right)^8 = \frac{1}{3^4}|(x,y,z)|^8.$$

17. **(Avanzato)** Data $f(x,y) = \dfrac{y^x - 1}{x^2 + |\log y|}$.

   (a) Determinarne il dominio A di f più grande.

   (b) Studiarne la continuità su A e determinare $D(A) \setminus A$.

   (c) Per ogni $(x_0,y_0) \in D(A) \setminus A$ studiare l'esistenza, e nel caso calcolare il limite di f per $(x,y) \to (x_0,y_0)$.

   Svolgimento parziale. Perchè la f sia ben definita deve essere $y > 0$ e $(x,y) \neq (0,1)$, quindi

$$A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \setminus \{(0,1)\}.$$

   La f è continua su A in quanto composizione e divisione di somma di funzioni continue. Abbiamo inoltre

$$D(A) \setminus A = \{(0,1)\} \cup \left\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\right\}.$$

   Consideriamo $(x_0,0) \in D(A) \setminus A$. Se $x_0 > 0$, poiché

$$(x,y) \to (x_0,0) \quad \text{e} \quad y > 0,$$

   possiamo assumere in particolare che $0 < y < 1$ e scegliere $\delta > 0$ tale che $x_0 - \delta > 0$. Quindi per $|(x-x_0,y)| < \delta$, abbiamo

$$0 < y^x < y^{x_0-\delta} \to 0^+ \quad \text{per} \quad (x,y) \to (x_0,0),$$

quindi

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} f(x,y) = 0.$$

Se $x_0 < 0$, poiché $y \to 0$ e $y > 0$ possiamo scegliere $\delta < 1$ e sufficientemente piccolo tale che $|(x - x_0, y)| < \delta$ dia $0 < y < 1$ e

$$x < x_0 + \delta < 0,$$

pertanto $|x| > |x_0 + \delta| > 0$ e quindi

$$y^x = \frac{1}{y^{|x|}} > \frac{1}{y^{|x_0+\delta|}} \to +\infty \quad \text{per} \quad (x,y) \to (x_0, 0).$$

Ne segue quindi che

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{y^x - 1}{x^2 + |\log y|} \geq \frac{y^{-|x_0+\delta|} - 1}{x^2 + |\log y|} = y^{-|x_0+\delta|}\frac{(1 - y^{|x_0+\delta|})}{x^2 + |\log y|} \\ &= \frac{1}{y^{|x_0+\delta|}|\log y|}\frac{(1 - y^{|x_0+\delta|})}{\left(1 + \frac{x^2}{|\log y|}\right)} \to +\infty \quad \text{per} \quad (x,y) \to (x_0, 0). \end{aligned}$$

Nel caso $x_0 = 0$, studiamo quindi il limite di f per $(x,y) \to (0,0)$. In questo caso scegliamo la successione $t_k = 1/k$, $k \geq 1$ intero, e definiamo

$$z_k = \left(-\frac{1}{\sqrt{|\log t_k|}}, t_k\right) \quad \text{e} \quad w_k = \left(\frac{1}{\log t_k}, t_k\right).$$

Osservando che $t_k^{-\frac{1}{\sqrt{|\log t_k|}}} = e^{|\log t_k|^{1/2}}$ e $t_k^{\frac{1}{\log t_k}} = e$, risulta

$$\lim_{k\to\infty} f(z_k) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{k\to\infty} f(w_k) = 0.$$

Rimane da studiare il limite di f per $(x,y) \to (0,1) \in D(A)$.

Sugg. In questo ultimo caso conviene considerare lo sviluppo di Taylor

$$y^x = e^{x\log y} = 1 + x\log y + \varphi(x\log y)$$

dove $\varphi(t)/t \to 0$ per $t \to 0$, poiché $x\log y \to 0$ per $(x,y) \to (0,1)$.