Foglio di Esercizi 2
Corso di Teoria Geometrica della Misura
Anno Accademico: 2012-2013

Università di Pisa
Dipartimento di Matematica
magnani@dm.unipi.it
Pisa, 8 Aprile 2013

1. Si consideri una misura boreliana μ su uno spazio metrico X e fissiamo $r > 0$. Definiamo $f, F : X \to [0, +\infty]$ come segue $f(x) = \mu(B(x,r))$ e $F(x) = \mu(\mathbb{B}(x,r))$ per ogni $x \in X$.
   (a) Mostrare che f è semicontinua inferiormente.
   (b) Mostrare che F in generale potrebbe non essere semicontinua superiormente.
   (c) Assumiamo anche che μ sia finita sugli insiemi limitati.
      i. Mostrare che F è semicontinua superiormente.
      ii. Mostrare che $\mu\big(\{y \in X : d(y,x) = r\}\big) = 0$ per ogni $r > 0$, eccetto che per un sottoinsieme di $\{t \in \mathbb{R} : t > 0\}$ al più numerabile.

2. Sia X uno spazio topologico numerabilmente chiuso e sia μ una misura boreliana regolare rispetto la σ-algebra dei boreliani. Provare che se X ha un ricoprimento numerabile di aperti, ciascuno dei quali ha μ-misura finita, allora ogni μ-misurabile E ha la propietà che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un aperto W contenente E tale che $\mu(W \setminus E) < \varepsilon$.

3. Sia μ una misura boreliana su uno spazio topologico X tale che per ogni compatto K si abbia $\mu(K) < +\infty$ e per ogni $S \subset X$ si abbia
$$\mu(S) = \inf\{\mu(V) : V \text{ is open, } S \subset V\}$$
Si supponga inoltre che per ogni aperto $V \subset X$ valga
$$\mu(V) = \sup\{\mu(K) : K \text{ is compact}, K \subset V\}.$$
Mostrare che per ogni μ-misurabile $E \subset X$ con $\mu(E) < +\infty$ abbiamo
$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \text{ is compact}, K \subset E\}\,.$$

4. Mostrare che la misura di Hausdorff $\mathcal{H}^\alpha$ su uno spazio metric X non cambia se la sua gauge $\zeta_\alpha = c_\alpha \mathrm{diam}^\alpha$ si restringe ai soli insiemi chiusi, oppure ai soli insiemi aperti. Mostrare inoltre che se X è uno spazio vettoriale metrizzato da una distanza $d(x,y) = \|x - y\|$ data dalla norma $\|\cdot\|$, allora la $\mathcal{H}^\alpha$ può essere ottenuta anche restringendosi agli insiemi convessi.