**Esercizi impegnativi: una stella** Università di Pisa
**Foglio di Esercizi 4** Dipartimento di Matematica
**Corso di Teoria Geometrica della Misura** magnani@dm.unipi.it
**Anno Accademico: 2012-2013**

Pisa, 26 Maggio 2013

1. Denotiamo con $\mathcal{L}^1$ la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$ e consideriamo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ con $-\infty < a < b < +\infty$.

   (a) Dall'Esercizio 9, Foglio di Esercizi 1, dedurre che ogni insieme di $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ che sia $\mathcal{L}^1$-misurabile è anche $(\mathcal{L}^1 \llcorner [a, b])$-misurabile. Provare che d'altra parte il viceversa non è vero.

   (b) Provare che i boreliani di $[a, b]$ sono contenuti nei boreliani di $\mathbb{R}$.

   (c) Considerare due possibili definizioni di assoluta continuità per $f$.
   A) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $n \in \mathbb{N}^+$ e $a \le t_1 < t_2 < \cdots < t_{2n} \le b$ con $\sum_{i=1}^n [t_{2i} - t_{2i-1}] \le \delta$, allora abbiamo $\sum_{i=1}^n |f(t_{2i}) - f(t_{2i-1})| \le \varepsilon$.
   B) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $n \in \mathbb{N}^+$ e
   $$a \le t_1 < t_2 \le t_3 < t_4 \le t_5 < t_6 \cdots < t_{2n} \le b \tag{1}$$
   con $\sum_{i=1}^n [t_{2i} - t_{2i-1}] \le \delta$, allora abbiamo $\sum_{i=1}^n |f(t_{2i}) - f(t_{2i-1})| \le \varepsilon$.
   Provare che tali definizioni sono equivalenti.

   (d) Assumiamo che $f$ sia crescente e assolutamente continua. Definiamo inoltre per ogni $A \subset [a, b]$, la funzione
   $$v_f(A) = \inf \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \zeta(I_j) : A \subset \bigcup \{I_j : j \in \mathbb{N}\}, I_j \text{ intervallo di } [a, b] \right\}, \tag{2}$$
   ove $\zeta(I) = f(\sup I) - f(\inf I) = \sup f(I) - \inf f(I)$ per ogni intervallo $I \subset [a, b]$. Provare le seguenti affermazioni.

   i. La $v_f$ è una misura esterna su $\mathcal{P}([a, b])$ che è anche di Radon e limitata.
   **ii.*** Se $E \subset [a, b]$ e $\mathcal{L}^1(E) = 0$, allora $v_f(E) = 0$.
   ii. Ogni insieme $\mathcal{L}^1$-misurabile contenuto in $[a, b]$ è anche $v_f$-misurabile.
   iii. Se $a \le \alpha < \beta \le b$, allora $f(\beta) - f(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^\beta f' \, d\mathcal{L}^1$.

2. Consideriamo $A, E \subset \mathbb{R}^n$ e le mappe $f : A \to \mathbb{R}^m$ e $g : E \to \mathbb{R}^m$. Provare le seguenti affermazioni.

   (a) Se $f$ ha un differenziale $L$ in $x$, ovvero $f(y) - f(x) - L(y - x) = o(y - x)$ per $y \in A$ e $y \to x$, ed inoltre $x \in A \cap D(A)$, allora $L$ è unico.

   (b) Vale l'uguaglianza insiemistica $D(A) \cap D(E) = D(A \cap E)$.

   (c) Se $x \in D(A \cap E) \cap A \cap E$, $f$ è differenziabile in $x$, ovvero $f$ ha un differenziale ed è unico, $g$ è lipschitziana e $g|_{A \cap E} = f_{A \cap E}$, allora $g$ è differenziabile in $x$ e $Dg(x) = Df(x)$.

   (d) Se $A = E$, $f = g$ $\mathcal{L}^n$-q.o. in $A$, $g$ ed $f$ sono differenziabili $\mathcal{L}^n$-q.o. in $A$, allora $Df = Dg$ $\mathcal{L}^n$-q.o. in $A$.