ANNO ACCADEMICO 2001/2002 CORSO di LAUREA in FISICA

GEOMETRIA I e II (facoltativo)

Appello del 16/7/2002

Esercizio 1 [G1]

Al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$, discutere l'esistenza e l'unicità delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} -ix + (1+i)y + \alpha z = 2 - i \\ i\alpha x + 2y - 3iz = 0 \\ x - y = -\frac{1+i}{2} \end{cases}$$

Esercizio 2 [G1, VO]

Sia $B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ invertibile, siano $S_n, A_n \subset M_{n,n}(\mathbb{R})$ i sottospazi delle matrici simmetriche ed antisimmetriche risp., $C(B) = \{X \in M_{n,n}(\mathbb{R}) | XB = BX\}$ e sia $L_B : M_{n,n}(\mathbb{R}) \to M_{n,n}(\mathbb{R})$ l'applicazione definita da $L_B(X) = BX + {}^tXB$.

Dimostrare le seguenti affermazioni:

a) L_B è lineare e $C(B)$ è un sottospazio.

b) $B \in S_n \iff \operatorname{Im} L_B \subset S_n$.

c) $\forall\ U, V, W \subset M_{n,n}(\mathbb{R})$ sottospazi tali che $U \cap V \subset W$, $V \cap W \subset U$, $W \cap U \subset V$ $\Rightarrow$ $U \cap V = V \cap W = W \cap U$.

d) $C(B) \cap A_n = A_n \cap \operatorname{Ker} L_B = \operatorname{Ker} L_B \cap C(B)$.

e) n dispari, $\Rightarrow$ $\operatorname{Ker} L_B$ non contiene matrici invertibili.

Esercizio 3 [G2, VO]

Sia $V = \mathbb{R}_3[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 3. Si trovi la forma canonica di Jordan delle applicazioni lineari $L_1, L_2, L_3 : V \to V$ definite da:

$$L_1(p(x)) = p(x-2) + p(x),\ L_2(p(x)) = p(x-2) + p(-x),\ L_3(p(x)) = p(x+1) + p(x-1)$$

Sigle dell'esame: G1 = Geometria I; G2 = Geometria II; VO = Vecchio ordinamento e Geometria I+II. Durata: G1 e G2 2,5 ore, VO 3 ore.
Scrivere subito sul foglio: nome, numero di marticola e sigla dell'esame.

Esercizio 4 [G1]

Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$, φ, ψ due prodotti scalari su V e Iso(φ), Iso(ψ) $\subset V$ gli insiemi dei vettori φ-isotropi e ψ-isotropi, rispettivamente.

Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false motivando la risposta:

a) φ non degenere $\Rightarrow$ $\forall\ W \subset V$ sottospazio, $V = W \oplus W^{\perp}$.

b) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, Iso(φ)=Iso(ψ)= $\{0\}$ $\Rightarrow$ φ è isometrico a ψ o φ è isometrico a $-\psi$.

c) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, φ non degenere $\Rightarrow$ Iso(φ)= $\{0\}$.

Esercizio 5 [G2, VO]

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, $v_1, \ldots, v_k \in V$ e sia φ^* il prodotto scalare su V^* definito da $\varphi^*(f,g) = \sum_{i=1}^{k} f(v_i)g(v_i)$, $\forall\ f,g \in V^*$.

a) Dimostrare che Rad φ^* =Ann(Span ($v_1, \ldots, v_k$)).

b) Dare condizioni su $v_1, \ldots, v_k$ affinché φ^* sia definito.

Esercizio 6 [G2, VO]

Studiare al variare di λ in $\mathbb{R}$ il tipo affine della conica di equazione:

$$x^2 + (2\lambda + 2)xy + y^2 + 2\lambda x + (2\lambda - 4)y = 0$$

precisando per quali valori di λ si ottengono coniche non a centro.

Per $\lambda = 2$ classificare la conica dal punto di vista metrico.