Esercizi di Geometria analitica e algebra lineare
Marzo 2008 - due

Esercizio 1. Sia A uno spazio affine reale di dimensione n. Facendo uso delle coordinate affini, indichiamo con

$$\Delta(P_0, \ldots, P_k) = \left\{ x_0 P_0 + \ldots + x_k P_k \;\middle|\; x_i \geqslant 0\, \forall i,\ \sum_i x_i = 1 \right\}$$

il simplesso determinato da $P_0, \ldots, P_k$ punti affinemente indipendenti in A, con $k \leqslant n$. La *dimensione* del simplesso è il numero k.

Siano $Q_0, \ldots, Q_n$ punti affinemente indimendenti in A e $\Delta = \Delta(Q_0, \ldots, Q_n)$ il simplesso generato da questi. Una *faccia* di Δ è un simplesso del tipo

$$\Delta(P_{i_0}, \ldots, P_{i_k})$$

determinato da un sottoinsieme $\{i_0, \ldots, i_k\} \subset \{0, \ldots, n\}$.

1. Mostra che Δ ha $\begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix}$ facce distinte di dimensione k.

2. Mostra che ogni faccia F è contenuta in un unico sottospazio affine di dimensione k.

3. Mostra che due facce di dimensione $n-1$ si intersecano in una faccia di dimensione $n-2$. Mostra che l'intersezione di due facce è vuota oppure è una faccia.

Esercizio 2. Il *baricentro* di un simplesso $\Delta(P_0, \ldots, P_k)$ è il punto

$$Q = \frac{1}{k+1} P_0 + \ldots + \frac{1}{k+1} P_k$$

descritto in coordinate affini. Mostra che una affinità che manda un simplesso in un altro manda necessariamente il baricentro nel primo nel baricentro del secondo.

Esercizio 3. Sia $f : V \to V$ un endomorfismo di un sottospazio vettoriale e U, W due sottospazi in somma diretta $V = U \oplus W$, entrambi f-invarianti (cioè tali che $f(W) \subset W$ e $f(U) \subset U$).

- Mostra che λ è autovalore per f se e solo se lo è per $f|_U$ oppure $f|_W$.

- Mostra che f ha tutti gli autovalori nel campo se e solo se entrambi $f|_U$ e $f|_W$ hanno tutti gli autovalori nel campo.
- Mostra che la molteplicità algebrica di λ in f è la somma delle molteplicità algebriche di λ in $f|_U$ e $f|_W$.
- Mostra che la molteplicità geometrica di λ in f è la somma delle molteplicità geometriche di λ in $f|_U$ e $f|_W$.
- Concludi che f è diagonalizzabile se e solo se lo sono entrambe $f|_U$ e $f|_W$.

Esercizio 4. Sia $f : V \to V$ un endomorfismo di un sottospazio vettoriale e W un sottospazio f-invariante, cioè tale che $f(W) \subset W$.

- Mostra che se λ è autovalore per $f|_W$, allora è anche autovalore per f.
- Mostra che se f ha tutti gli autovalori nel campo, allora anche $f|_W$ ha tutti gli autovalori nel campo.
- Mostra che se f è diagonalizzabile allora $f|_W$ è diagonalizzabile.

Esercizio 5. Sia $f : V \to V$ un endomorfismo. Usare l'esercizio precedente per mostrare il fatto seguente: se f è diagonalizzabile allora un sottospazio W è f-invariante se e solo se ha una base di autovettori per f. Vale lo stesso risultato se f non è diagonalizzabile?

Esercizio 6. Mostra che un endomorfismo nilpotente (cioè tale che $f^n = 0$ per qualche n) è diagonalizzabile se e solo se è nulla.

Esercizio 7. Sia $f(x) = Ax + b$ una affinità di uno spazio affine A^n_K. Mostra che se A non ha 1 come autovalore allora f ha un punto fisso (un punto x tale che $f(x) = x$).

Esercizio 8. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} W_1 &= \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y=0, y+z-t=0\right\}, \\ W_2 &= \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Costruire, se esiste, un endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che:

1. $f(W_1) = W_1$ e $f(W_2) = W_2$);

2. f non è surgettiva,

3. f non è diagonalizzabile.

Esercizio 9 Dire quali delle matrici seguenti sono simili.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

Esercizio 10 Si considerino le matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Dire se A è diagonalizzabile

2. Dire se A e B sono simili.

3. Trovare, se esiste, una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori sia per A che per B.

Esercizio 11 Siano W_1 e W_2 due sottospazi vettoriali distinti di dimensione 2 in $\mathbb{R}^3$. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una applicazione lineare tale che W_1 e W_2 sono gli unici spazi f-invarianti di dimensione 2.

1. Mostra che f è triangolabile.

2. Mostra che f non è diagonalizzabile.

3. Dire se è possibile che le restrizioni di f a W_1 e W_2 siano entrambe diagonalizzabili.

4. Costruire un esempio esplicito di W_1, W_2 e f con le proprietà suddette.