

ISTITUZIONI DI GEOMETRIA 2023/24 - ESERCIZI SETTIMANALI

È sempre lecito e consigliato usare un enunciato degli esercizi precedenti per risolvere un esercizio, anche se non è stato risolto.

1. Esercizi del 29 febbraio

Esercizio 1.1. Costruisci due atlanti lisci non compatibili su \mathbb{R} . Mostra che le due varietà lisce che ne risultano sono però diffeomorfe.

(Nota: Per teoremi profondi, due strutture lisce sulla stessa varietà topologica di dimensione $n \leq 3$ sono sempre diffeomorfe. Questo fatto spesso non è vero in dimensione $n \geq 4$.)

Esercizio 1.2. Mostra che la mappa

$$S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n, \quad (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto [x_1, \dots, x_{n+1}]$$

è liscia.

Esercizio 1.3. Costruisci un diffeomorfismo fra \mathbb{RP}^1 e S^1 .

Esercizio 1.4. Sia $f: \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la mappa

$$f([x, y, z]) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} (x^2 - y^2, xy, xz, yz).$$

Mostra che f è iniettiva e df_p è iniettivo per ogni $p \in \mathbb{RP}^2$.

Esercizio 1.5. Sia $U \subset M$ un aperto in una varietà liscia M . Mostra che un omeomorfismo $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una carta compatibile con la struttura liscia di M se e solo se è un diffeomorfismo.

Esercizio 1.6. Sia $S \subset M$ un chiuso in una varietà liscia M . Mostra che esiste una funzione liscia $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f^{-1}(0) = S$.

Esercizio 1.7. Siano $S_0, S_1 \subset M$ due chiusi disgiunti in una varietà liscia M . Mostra che esiste una funzione liscia $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(S_i) = i$ per $i = 0, 1$ e $f(x) \in (0, 1)$ per ogni $x \in M \setminus (S_0 \cup S_1)$.

Esercizio 1.8. Per ogni $0 < k < n$, la *Grassmanniana affine* $\text{Graff}_k(\mathbb{R}^n)$ è l'insieme dei sottospazi affini di \mathbb{R}^n di dimensione k . Costruisci una naturale struttura di varietà liscia sull'insieme $\text{Graff}_k(\mathbb{R}^n)$, in modo che venga connessa e la mappa naturale $\text{Graff}_k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ che assegna ad ogni sottospazio affine la sua gacitura sia liscia. Non è necessario dimostrare tutto.

2. Esercizi del 7 marzo

Esercizio 2.1. Sia $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ polinomio di grado $d \geq 1$. Considera l'insieme $S = \{z \mid p'(z) = 0\}$. Mostra che la mappa

$$p: \mathbb{C} \setminus p^{-1}(p(S)) \longrightarrow \mathbb{C} \setminus p(S)$$

$$z \longmapsto p(z)$$

è un rivestimento liscio di grado d .

Esercizio 2.2. Considera il gruppo $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{R}^3)$ generato da:

$$f(x, y, z) = (x + 1, y, z), \quad g(x, y, z) = (x, y + 1, z),$$

$$h(x, y, z) = (-x, -y, z + 1).$$

Mostra che l'azione è libera e propriamente discontinua e che la varietà \mathbb{R}^3/Γ è compatta ed orientabile ma non omeomorfa al 3-toro. Mostra che questa varietà ha un rivestimento doppio diffeomorfo al 3-toro.

Esercizio 2.3. Considera il gruppo $\Gamma < \text{Aff}(\mathbb{R}^2)$ generato da

$$f(x, y) = \left(2x, \frac{1}{2}y\right).$$

Mostra che Γ non agisce in modo propriamente discontinuo sulla varietà $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Mostra che la mappa $M \rightarrow M/\Gamma$ è comunque un rivestimento, ed il quoziente M/Γ è una superficie non di Hausdorff (ogni punto ha un intorno omeomorfo a \mathbb{R}^2 , ma non è di Hausdorff!).

Esercizio 2.4. Sia $f: M \rightarrow N$ un omeomorfismo fra varietà lisce che è anche un diffeomorfismo locale. Mostra che f è un diffeomorfismo. Deduci che le due definizioni seguenti di rivestimento liscio sono equivalenti: una funzione liscia $f: M \rightarrow N$ fra varietà lisce è un *rivestimento liscio* se

- (1) ogni punto $x \in N$ ha un intorno aperto U tale che

$$p^{-1}(U) = \sqcup_{i \in I} U_i$$

e la restrizione $\pi|_{U_i}: U_i \rightarrow U$ è un diffeomorfismo;

- (2) è un rivestimento topologico e un diffeomorfismo locale.

Esercizio 2.5. Sia M compatta e N connessa. Se $\dim M = \dim N$, mostra che ogni embedding $M \rightarrow N$ è un diffeomorfismo.

Esercizio 2.6. Un *nodo* è una sottovarietà di \mathbb{R}^3 diffeomorfa a S^1 . Ricorda che $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ è interpretabile come l'insieme delle rette vettoriali in \mathbb{R}^3 . Dato un nodo $K \subset \mathbb{R}^3$, mostra che:

- (1) La funzione $f: K \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^2$, $p \mapsto T_p K$ è liscia.
 (2) Esiste un piano vettoriale $W \subset \mathbb{R}^3$ tale che la proiezione ortogonale $\pi: K \rightarrow W$ sia una immersione.

Esercizio 2.7. Costruisci un embedding esplicito della bottiglia di Klein K in \mathbb{R}^n , per qualche n .

Esercizio 2.8. Costruisci un embedding del toro n -dimensionale

$$S^1 \times \dots \times S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

per ogni $n \geq 1$.

3. Esercizi del 14 marzo

Negli esercizi seguenti V è sempre uno spazio vettoriale reale di dimensione n . Un elemento di $\mathcal{T}_h^k(V)$ è *puro* se può essere scritto come prodotto tensoriale di h vettori di V e k covettori di V^* .

Esercizio 3.1. Siano $v, v', w, w' \in V^*$ covettori non nulli.

- (1) Se v e v' sono indipendenti, allora $v \otimes w$ e $v' \otimes w'$ sono vettori indipendenti in $\mathcal{T}^2(V)$.
- (2) Se inoltre anche w e w' sono indipendenti, allora

$$v \otimes w + v' \otimes w' \in \mathcal{T}^2(V)$$

non è un elemento puro.

Esercizio 3.2. Considera l'isomorfismo canonico $\mathcal{T}_1^1(V) = \text{Hom}(V, V)$. Mostra che questo isomorfismo manda gli elementi puri in tutti e soli gli omomorfismi di rango ≤ 1 .

Esercizio 3.3. Siano $v^1, \dots, v^k \in V^*$. Mostra che questi vettori sono indipendenti $\iff v^1 \wedge \dots \wedge v^k \neq 0$.

I tre esercizi seguenti sono una introduzione alla *teoria di Hodge*.

Esercizio 3.4. Dato un elemento non nullo $\alpha \in \Lambda^k(V)$ con $k \leq n$, mostra che esiste sempre un $\beta \in \Lambda^{n-k}(V)$ tale che $\alpha \wedge \beta \neq 0$ in $\Lambda^n(V)$.

Deduci da questo fatto che la forma bilineare

$$\begin{aligned} \Lambda^k(V) \times \Lambda^{n-k}(V) &\longrightarrow \Lambda^n(V) \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \alpha \wedge \beta \end{aligned}$$

è non-degenere, cioè che la mappa indotta

$$\begin{aligned} \Lambda^k(V) &\longrightarrow \text{Hom}(\Lambda^{n-k}(V), \Lambda^n(V)) \\ \alpha &\longmapsto (\beta \mapsto \alpha \wedge \beta) \end{aligned}$$

è un isomorfismo. Nota che $\dim \Lambda^n(V) = 1$.

Esercizio 3.5. Sia \langle, \rangle un prodotto scalare su V . Mostra che esiste un unico prodotto scalare \langle, \rangle su $\Lambda^k(V)$ tale che

$$\langle v^1 \wedge \dots \wedge v^k, w^1 \wedge \dots \wedge w^k \rangle = \det \langle v^i, w^j \rangle$$

per qualsiasi scelta di covettori $v^1, \dots, v^k, w^1, \dots, w^k \in V^*$. Qui $\det \langle v^i, w^j \rangle$ indica il determinante della matrice $k \times k$ il cui elemento i, j è $\langle v^i, w^j \rangle$. Mostra che se il prodotto \langle, \rangle su V è definito positivo allora anche quello indotto su $\Lambda^k(V)$ lo è.

Esercizio 3.6. Sia V dotato di un prodotto scalare definito positivo. Sia $\omega \in \Lambda^n(V)$ un generatore, normalizzato in modo che

$$\langle \omega, \omega \rangle = 1.$$

L'operatore stella di Hodge è la mappa lineare

$$*: \Lambda^k(V) \rightarrow \Lambda^{n-k}(V)$$

che manda $\beta \in \Lambda^k(V)$ nell'unico $*\beta \in \Lambda^{n-k}(V)$ per cui

$$\alpha \wedge (*\beta) = \langle \alpha, \beta \rangle \omega$$

per ogni $\alpha \in \Lambda^k(V)$. Usando gli esercizi precedenti, mostra che

- (1) La mappa $*$ è ben definita.
- (2) Se v^1, \dots, v^n è una base positiva ortonormale per V^* , allora

$$*(v^1 \wedge \dots \wedge v^k) = v^{k+1} \wedge \dots \wedge v^n.$$

- (3) La mappa $*$ è una isometria.
- (4) Vale $**\beta = (-1)^{k(n-k)}\beta$ per ogni $\beta \in \Lambda^k(V)$.

4. Esercizi del 21 marzo

Esercizio 4.1. Ricordiamo che \mathbb{RP}^n è l'insieme delle rette vettoriali l in \mathbb{R}^{n+1} . Considera l'insieme

$$E = \{(l, v) \in \mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid v \in l\}.$$

Mostra che E è una sottovarietà liscia di $\mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ e che la mappa $E \rightarrow \mathbb{RP}^n$, $(l, v) \mapsto l$ è un fibrato vettoriale di rango 1 (detto *fibrato tautologico*).

Esercizio 4.2. Mostra che il fibrato tangente TM di una varietà M è sempre orientabile, anche se M non lo è.

Esercizio 4.3. Dimostra che esistono esattamente due fibrati vettoriali di rango 1 con base S^1 a meno di isomorfismi.

Esercizio 4.4. Sia $E \rightarrow M$ un fibrato vettoriale e $S \subset M$ un sottoinsieme chiuso. Mostra che ogni sezione parziale definita su S si estende ad una sezione globale su M (suggerimento: adatta la dimostrazione vista per le funzioni $S \rightarrow \mathbb{R}^k$).

Esercizio 4.5. Dimostra la identità di Jacobi: dati tre campi vettoriali X, Y, Z su una varietà M , vale

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] \equiv 0.$$

Esercizio 4.6. Data una matrice quadrata A , sia X_A il campo vettoriale su \mathbb{R}^n dato da $X_A(x) = Ax$. Mostra che

$$[X_A, X_B] = X_{BA-AB}.$$

Esercizio 4.7. Sia M una varietà, siano X, Y campi vettoriali su M e $f, g \in C^\infty(M)$. Mostra che

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X.$$

5. Esercizi del 28 marzo

Esercizio 5.1. Mostra che una distribuzione D di rango 1 in una varietà M è sempre integrabile.

Esercizio 5.2. Costruisci una foliazione sul toro $T = S^1 \times S^1$ che abbia sia foglie compatte che non compatte (cerca di descrivere la foliazione in modo rigoroso, non solo con un disegno).

Esercizio 5.3. Considera su \mathbb{R}^3 , con coordinate (x_1, x_2, x_3) , una generica distribuzione di piani

$$D_x = \{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0\}.$$

Considera il campo $X = a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Mostra che la distribuzione è integrabile se e solo se

$$X \cdot \text{rot}X = 0$$

in ogni punto. Qui $\text{rot}X$ indica il rotore di X .

Esercizio 5.4. Mostra che gli unici sottogruppi di Lie connessi di $SO(3)$ sono l'identità, $SO(3)$, e i sottogruppi isomorfi a S^1 che descrivono le rotazioni intorno ad un asse.

Esercizio 5.5. Mostra che qualsiasi varietà non-orientabile M di dimensione n è contenuta in una varietà orientabile di dimensione $n + 1$.

Esercizio 5.6. Sia $\pi: E \rightarrow M$ un fibrato vettoriale. Mostra che π è una equivalenza omotopica.

Esercizio 5.7. Sia M una varietà liscia e TM il suo fibrato tangente. Mostra che esiste sempre un fibrato vettoriale $E \rightarrow M$ tale che $TM \oplus E$ sia un fibrato vettoriale banale.

6. Esercizi dell' 11 aprile

Esercizio 6.1. Sia M una varietà con bordo e N una varietà senza bordo. Mostra che $M \times N$ ha una naturale struttura di varietà con bordo, e che $\partial(M \times N)$ è diffeomorfo a $\partial M \times N$.

Esercizio 6.2. Sia $\pi: E \rightarrow M$ un fibrato vettoriale. Sia g un tensore metrico su E (quindi $g(p)$ è un prodotto scalare definito positivo su E_p per ogni p). Mostra che

$$\{v \in E \mid \|v\| \leq 1\}$$

è un dominio regolare di E . Qui $\|v\| = \sqrt{g(p)(v, v)}$ dove $p = \pi(v)$.

Esercizio 6.3. Sia $f: M \rightarrow N$ una sommersione. Mostra che se $D \subset N$ è un dominio regolare allora $f^{-1}(D) \subset M$ è un dominio regolare.

Esercizio 6.4. Mostra che una n -varietà M è orientabile \iff esiste una n -forma mai nulla su M .

Esercizio 6.5. Sia $f: M \rightarrow N$ una mappa liscia fra varietà. Siano $\omega \in \Omega^k(N)$ e $\eta \in \Omega^h(N)$. Dimostra che

$$f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge g^*(\eta).$$

Esercizio 6.6. Sia M varietà qualsiasi e N varietà non orientabile. Il prodotto $M \times N$ può essere orientabile?

7. Esercizi del 18 aprile

Esercizio 7.1. Considera il toro $T = S^1 \times S^1$ con coordinate (θ^1, θ^2) definite a meno di $+2k\pi$ e la 1-forma $\omega = d\theta^1$. Considera la 1-sottovarietà $\gamma_i = \{\theta^i = 0\}$ per $i = 1, 2$, orientata come S^1 . Mostra che

$$\int_{\gamma_1} \omega = 0, \quad \int_{\gamma_2} \omega = 2\pi.$$

Esercizio 7.2. Sia M varietà orientata con tensore metrico g (non necessariamente definito positivo). La forma volume ω_g è definita dalla richiesta

$$\omega_g(p)(v_1, \dots, v_n) = 1$$

per ogni base ortonormale v_1, \dots, v_n positiva di T_pM . Mostra che la definizione è ben posta.

Esercizio 7.3. Sia $f: U \rightarrow V$ una mappa liscia fra aperti $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$. Scriviamo $f = (f_1, \dots, f_n)$. Per non confonderci usiamo variabili diverse $(x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m$ e $(y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n$. Mostra che

$$f^*(dx^i) = \frac{\partial f_i}{\partial y^j} dy^j = df_i.$$

Esercizio 7.4. Sia $\varphi: M \rightarrow N$ una mappa liscia fra varietà e $\omega \in \Omega^k(N)$. Otteniamo

$$d(\varphi^*\omega) = \varphi^*(d\omega).$$

Suggerimento. Mostra il teorema nel caso in cui $\omega = f$ sia una funzione e nel caso in cui $\omega = dg$ sia il differenziale di una funzione. Deduci il caso generale dalle buone proprietà di d rispetto alle operazioni $+$ e \wedge . \square

Esercizio 7.5. Sia $\omega \in \Omega^1(M)$ una 1-forma su una varietà M senza bordo. Supponiamo che ω sia chiusa (cioè $d\omega = 0$) e mai nulla. Poiché $\omega(p) \neq 0$ per ogni $p \in M$, il funzionale $\omega(p): T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ è non banale e possiamo definire la distribuzione di iperpiani:

$$D(p) = \ker \omega(p).$$

Mostra che D è integrabile e quindi tangente ad una foliazione su M .

Esercizio 7.6. Sia D una distribuzione di piani in una 3-varietà M senza bordo. Mostra che D è integrabile \iff per ogni 1-forma α mai nulla definita su un aperto di M avente $\ker \alpha = D$ abbiamo $\alpha \wedge d\alpha = 0$.

Una *forma simplettica* su una varietà N è una 2-forma $\omega \in \Omega^2(M)$ che è chiusa (cioè $d\omega = 0$) e *non-degenere*, cioè per ogni $p \in M$ e per ogni $v \in T_pM$ esiste $w \in T_pM$ tale che $\omega(p)(v, w) \neq 0$.

Esercizio 7.7. Mostra i fatti seguenti:

- (1) Se ω è una forma simplettica su N , allora N ha dimensione pari.
- (2) Costruisci una forma simplettica su \mathbb{R}^{2n} .
- (3) Sia $\pi: T^*M \rightarrow M$ il fibrato cotangente di una varietà M di dimensione n . Nota che T^*M è una varietà di dimensione $2n$. La *1-forma tautologica* $\theta \in \Omega^1(T^*M)$ sulla varietà T^*M è definita nel modo seguente: un punto $\alpha \in T^*M$ è per definizione un funzionale $\alpha: T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ con $p = \pi(\alpha)$. Sia $v \in T_\alpha(T^*M)$. Poniamo

$$\theta(\alpha)(v) = \alpha(d\pi_\alpha(v)).$$

Mostra che $d\theta$ è una forma simplettica su T^*M .

8. Esercizi del 2 maggio

Sia M una varietà di dimensione n con tutti i numeri di Betti finiti. La *caratteristica di Eulero – Poincaré* è il numero intero

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^n (-1)^i b^i(M).$$

Esercizio 8.1. Mostra che per qualsiasi successione esatta di spazi vettoriali finito dimensionali

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{k-1}} V_k \longrightarrow 0$$

vale la relazione

$$\sum_{i=1}^k (-1)^i \dim V_i = 0.$$

Deduci il fatto seguente. Sia $M = U \cup V$ varietà con U, V aperti. Supponiamo che i numeri di Betti di $U \cap V, U, V, M$ siano tutti finiti. Allora

$$\chi(M) = \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V).$$

Esercizio 8.2. Calcola i numeri di Betti della superficie ottenuta togliendo k punti a S^2 .

Esercizio 8.3. Dimostra che la superficie $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ ha $b^1 = \infty$.

Esercizio 8.4. Sia $K \subset S^3$ un nodo. Mostra che $H^1(S^3 \setminus K) \cong \mathbb{R}$.

Esercizio 8.5. Sia $\pi: E \rightarrow M$ una fibrazione con fibra F . Mostra che se la fibrazione ha una sezione allora $\pi^*: H^k(M) \rightarrow H^k(E)$ è iniettivo. Deduci che la fibrazione di Hopf

$$\pi: S^3 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \cong S^2, \quad \pi(z, w) = [z, w]$$

non ha sezioni. Qui $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ è definito come $S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid \|z\|^2 + \|w\|^2 = 1\}$. Puoi dare per buono il fatto che π sia effettivamente una fibrazione.

Esercizio 8.6. Sia M una varietà connessa e $p \in M$ un punto. Costruisci un morfismo iniettivo di spazi vettoriali

$$H^1(M) \longrightarrow \text{Hom}(\pi_1(M, p), \mathbb{R}).$$

Deduci che se M è semplicemente connessa allora $b^1(M) = 0$.

(Nota: in realtà il morfismo viene un isomorfismo, ma la suriettività è più difficile da dimostrare.)

Esercizio 8.7. Sia ω una forma simplettica su una varietà N . Mostra che esiste un'orientazione per N tale che $\omega \wedge \cdots \wedge \omega$ sia una forma volume su N .