

# Laboratorio didattico di matematica computazionale

Beatrice Meini

Lezione 3 - 13/3/2013

## 1 Le immagini in octave

Octave rappresenta le immagini mediante una matrice  $A$  di interi dimensione  $p \times q$ , associando all'elemento  $(i, j)$  della matrice  $A$  un colore opportuno. Più precisamente, se  $a_{i,j} = k$ , il colore dell'elemento  $(i, j)$  è quello definito dalla  $k$ -esima riga della matrice `colormap`. La matrice `colormap` è una matrice  $64 \times 3$ , con elementi compresi tra 0 e 1, dove ciascuna riga rappresenta un colore mediante una terna (r, g, b) che definisce la quantità di rosso, verde e blu.

```
octave:24> format short
octave:25> size(colormap)
ans =
    64     3

octave:26> colormap
ans =
    0.00000    0.00000    0.50000
    0.00000    0.00000    0.56349
    0.00000    0.00000    0.62698
    0.00000    0.00000    0.69048
    0.00000    0.00000    0.75397
    0.00000    0.00000    0.81746
    0.00000    0.00000    0.88095
    0.00000    0.00000    0.94444
    0.00000    0.00794    1.00000
lines 1-9
```

Se  $A$  è una matrice  $p \times q$  con elementi interi compresi tra 1 e 64, il comando `image(A)` produce un'immagine  $p \times q$ , il cui elemento  $(i,j)$  è rappresentato dal colore sulla riga di indice  $a_{i,j}$  della matrice `colormap`. Ad esempio:

```
octave:28> A=zeros(64*5, 64*3);
octave:29> for k=1:64, A(5*k-4: 5*k, : ) = k; end
octave:30> image(A)
```

La `colormap` può essere modificata, ad esempio:

```
octave:31> colormap( ocean(64) );
```

Per ripristinare quella di default:

```
octave:33> colormap( "default" );
```

Si modifichi a piacere la matrice  $A$  e si disegni l'immagine corrispondente. Se gli elementi della matrice  $A$  non sono interi compresi tra 1 e il numero di righe della `colormap`, conviene usare l'istruzione `imagesc(A)`, che costruisce l'immagine riscalando opportunamente gli elementi della matrice  $A$  (si veda l'help). Ad esempio:

```
octave:10> A=rand(64);
octave:11> imagesc(A)
```

## 2 Il segno di un numero complesso

Dato il numero complesso  $z$  non immaginario puro, definiamo

$$\text{sign}(z) = \begin{cases} 1 & \text{se } \text{Re}(z) > 0 \\ -1 & \text{se } \text{Re}(z) < 0 \end{cases}$$

Il segno si può ottenere mediante le istruzioni `sign` e `real`:

```
octave:1> z=4*exp(i*6);
octave:2> s=sign(real(z))
s = 1
octave:3> z
z = 3.8407 - 1.1177i
```

Si può dimostrare che il segno del numero complesso  $z$  è il limite della successione  $\{x_k\}_k$  definita come:

$$x_1 = z, \\ x_{k+1} = \frac{x_k + x_k^{-1}}{2}, \quad k \geq 0$$

*Esercizio 1.* Si scriva la function `[s,n] = segno(z, maxiter, eps)` che:

1. prende come input il numero complesso  $z$ , l'intero positivo `maxiter` e il numero reale positivo `eps`;
2. calcola gli elementi della successione  $\{x_k\}_k$  fino all'indice  $k = n$  tale che o  $n = \text{maxiter}$  oppure  $|x_n - x_{n-1}| < \text{eps}$ ;
3. restituisce in output  $s$ , che è l'ultimo elemento calcolato della successione, e  $n$ , il numero di iterazioni effettuate.

Dovreste ottenere i seguenti risultati:

```
octave:7> format long e
octave:8> [s, n]=segno(z,10,1.e-10)
s = 1.000000000000000e+00 - 1.44755976108056e-28i
n = 7
```

Scegliere un numero complesso con parte reale piccola, ad esempio  $10^{-2}$ . Quante iterazioni servono per avere una differenza più piccola ad esempio di  $10^{-12}$ ?

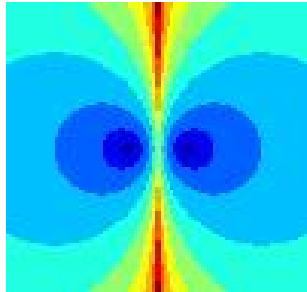
Che cosa succede se scelgo come  $z$  un numero immaginario puro?

Vogliamo ora disegnare i bacini di attrazione della successione  $\{x_k\}_k$  nel rettangolo del piano complesso  $[a, b] \times [ic, id]$ , dove  $[a, b]$ ,  $[c, d]$  sono intervalli della retta reale. Per far questo costruiamo un reticolo nel rettangolo  $[a, b] \times [ic, id]$  e per ciascun punto del reticolo contiamo il numero di iterazioni utilizzate dalla function dell'esercizio precedente:

*Esercizio 2.* Si scriva una function `[x, y, iter] = bsegno( a, b, c, d, maxiter, eps)` che:

1. prende in input gli estremi  $a, b, c, d$  degli intervalli  $[a, b]$ ,  $[c, d]$ , il numero intero positivo `maxiter` e il numero reale positivo `eps`;
2. suddivide gli intervalli  $[a, b]$  e  $[c, d]$  in sottointervalli piccoli, ad esempio mediante il comando `x=linspace(a,b,100)`, `y=linspace(c,d,100)`;
3. costruisce la matrice `iter` di dimensione `length(x) x length(y)` tale che l'elemento  $(h, k)$  di `iter` è il numero di elementi della successione calcolati con la function `segno`, a partire da  $z=x(h) + i*y(k)$ ;
4. restituisce in output le variabili `x, y, iter`.

Si disegnino i bacini di attrazione mediante il comando `imagesc(x, y, iter)`. Con i valori  $a=c=-5$ ,  $b=d=5$ , `eps = 1.e-8`, `maxiter = 20` dovreste ottenere un'immagine del tipo



Provare con altri valori. In particolare modificare  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  per fare degli zoom intorno a  $1$  o  $-1$ , o vicino all'asse immaginario.

### 3 L'insieme di Mandelbrot

L'insieme di Mandelbrot è definito come l'insieme dei punti  $s$  del piano complesso tali che la successione  $\{z_n\}_n$  è limitata, dove

$$\begin{aligned} z_1 &= s, \\ z_{n+1} &= z_n^2 + s, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

In particolare il punto  $s = 0$  appartiene all'insieme di Mandelbrot. Si vuole disegnare l'insieme di Mandelbrot sul piano complesso. Per far questo costruiamo un reticolo in un rettangolo  $[ab] \times [ic, id]$  del piano complesso, e per ciascun punto  $s$  del reticolo assegnamo ad una matrice  $W$  il valore di  $z_K$ , dove  $K$  è un opportuno indice:

*Esercizio 3.* Si scriva una function  $W = \text{mandel}(a, b, c, d, K)$  che:

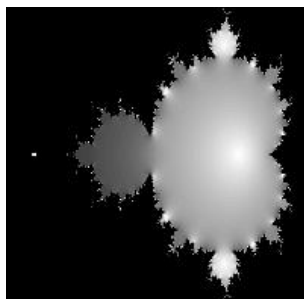
1. prende in input gli estremi  $a, b, c, d$  degli intervalli  $[a, b]$ ,  $[c, d]$  e il numero intero positivo  $K$ ;
2. suddivide gli intervalli  $[a, b]$  e  $[c, d]$  in sottointervalli “piccoli”, assegnando ad esempio alle variabili  $x$  e  $y$  le discretizzazioni degli intervalli  $[a, b]$  e  $[c, d]$ , rispettivamente;
3. costruisce la matrice  $W$  tale che l’elemento  $(h, k)$  di  $W$  è il  $K$ -esimo elemento della successione  $\{z_n\}_n$ , ottenuto con  $s = x(h) + i \cdot y(k)$ .

*Attenzione:* per certi valori di  $s$  la successione  $\{z_n\}_n$  diverge molto velocemente, per cui il valore calcolato di  $z_K$  risulta essere **NaN** (Not a Number). Quindi, al punto 3, inserire un controllo sulla grandezza del modulo di  $z_n$ , per  $n=1, \dots, K$ : ad esempio, se il modulo è maggiore di  $1.e16$ , si interrompe l’iterazione e si assegna a  $W(h, k)$  l’ultimo elemento calcolato.

Disegnare l’immagine mediante il comando `imagesc(exp(-abs(W')))`: la funzione `exp` ha l’effetto di appiattare vicino a zero gli elementi grandi.

Il comando

```
octave:1> W=mandel(-2,0.6,-1,1,20);
```



dovrebbe produrre la figura

Fare degli “zoom” provando con altri valori di  $a, b, c, d$ .

## 4 Altri insiemi di Mandelbrot

Si consideri ora la successione  $\{z_n\}_n$  definita come

$$\begin{aligned} z_1 &= s, \\ z_{n+1} &= z_n^p + s, \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

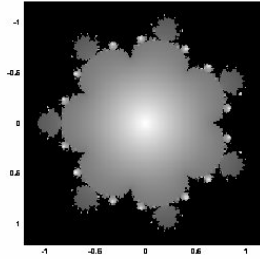
dove  $s$  è un numero complesso fissato, e  $p$  è un intero maggiore di 1 fissato.

*Esercizio 4.* Si fissi  $p$  e, come nell’esercizio precedente, si disegni l’insieme dei punti  $s$  del piano complesso tali che la successione è limitata. Per far questo si definisca la function  $W = \text{mandelp}(a, b, c, d, p, K)$  in modo analogo all’Esercizio 1.

1. Si provino diversi valori di  $p$ .

Il comando

```
octave:5> W=mandelp(-1.2,1.2,-1.2,1.2,8,20);
```



dovrebbe produrre l'immagine

## 5 Insiemi di Julia

Sia  $s$  un numero complesso fissato e si consideri la successione  $\{z_n\}_n$  definita come:

$$z_1 \text{ numero complesso fissato in modo arbitrario}$$

$$z_{n+1} = z_n^2 + s, \quad n \geq 1.$$

Vogliamo disegnare i bacini di attrazione della successione, al variare di  $z_1$  scelto in un rettangolo  $[a, b] \times [c, d]$  del piano complesso.

*Esercizio 5.* Si scriva una function  $W = \text{julia}(a, b, c, d, s, K)$  che disegni i bacini di attrazione della successione, al variare di  $z_1$  nel rettangolo del piano complesso  $[a, b] \times [c, d]$ , dove  $a, b, c, d$  sono reali:

1. si suddividano gli intervalli  $[a, b]$  e  $[c, d]$  in sottointervalli piccoli, ottenendo una griglia del rettangolo  $[a, b] \times [c, d]$ ;
2. per ciascun punto  $x(h) + i \cdot y(k)$  della griglia: si calcolino gli elementi della successione  $z_n$ , per  $n=2, \dots, K$ , ottenuti con  $z_1 = x(h) + i \cdot y(k)$  (come negli esercizi precedenti, si interrompa il calcolo se  $|z_n|$  è "troppo grande"); si definisca  $W(h, k)$  l'ultimo elemento calcolato della successione;
3. si disegni la figura definita da  $W$

Scegliendo  $[a, b] = [-1.5, 1.5]$ ,  $[c, d] = [-1.5, 1.5]$ ,  $s = 0.27334 - 0.00742i$ ,  $k=20$ , dovrete ottenere l'immagine

