

**Primo compito di Analisi Matematica I**  
*Corso di Laurea in Fisica, Corso A, A.A. 2003/04*

Pisa, 14 novembre 2003

1) Per ciascuna delle seguenti successioni, dire se si tratta di una successione convergente, divergente o indeterminata; nel caso di convergenza, si trovi il limite.

a)  $x_n := \frac{(2 + \cos n)^n}{n!}$ .

b) La successione definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} x_1 &= \alpha \\ x_{n+1} &= (x_n)^2 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

dove  $\alpha$  è un assegnato numero reale.

c)  $x_n := \frac{1}{n^k} \binom{n}{k}$ ,

definita per  $n \geq k$  e dove  $k$  è un assegnato numero naturale.

2) Si risolvano i seguenti esercizi:

a) Si mostri che

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}.$$

*Suggerimento: si utilizzi l'uguaglianza*

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}.$$

b) Definita per ricorrenza la successione

$$\begin{cases} x_1 &= 1 \\ x_{n+1} &= x_n + 6n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

si dimostri che

$$\sum_{n=1}^k x_n = k^3.$$

3) Per ciascuna delle seguenti serie, dire se si ha convergenza, divergenza o indeterminatezza:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n (n^{1/n} - 1); \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}}; \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n}{(n+1)^k - n^k};$$

nell'ultimo caso  $k$  è un assegnato numero naturale.

**Facoltativo:** Si hanno  $n$  paia di scarpe uguali, cioè  $n$  scarpe sinistre uguali ed  $n$  scarpe destre uguali.

- a) Dire in quanti modi diversi si possono raggruppare a caso le scarpe in  $n$  coppie.
- b) Dire in quanto modi si possono raggruppare le scarpe in  $n$  coppie, con la condizione che ogni coppia sia formata da una scarpa destra e da una sinistra.
- c) Dire in quanto modi si possono raggruppare le scarpe in  $n$  coppie, con la condizione che ogni coppia sia formata da due scarpe dello stesso tipo (cioè da due scarpe destre o da due scarpe sinistre).