Compiti di Analisi Matematica I e II

Corso di Laurea in Fisica, Corso A, A.A. 2003/04

Pisa, 31 Gennaio 2005

Chi intenda sostenere entrambe le prove di Analisi Matematica I e II svolga gli esercizi 2), 6) e 7) ed eventualmente il secondo dei due esercizi facoltativi.

I Parte.

1) Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \left[x^{(1-\cos x)} + x\right]^{1/x}.$$

2) Studiare qualitativamente la funzione

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x+2}}}{(x-2)}$$

sul suo dominio massimale di definizione, tracciandone un grafico qualitativo e studiandone asintoti, eventuali massimi e minimi locali o globali.

3) Studiare la convergenza delle serie

1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{\alpha n}}$$

2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{\tan\left[\sqrt[10]{n^{10}+n^7} - \sqrt[4]{n^4-n}\right]\right\}^{\alpha}$$

al variare del numero α in $\mathbb{R}$.

4) [**facoltativo**] Stabilire ed eventualmente calcolare il seguente

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{(\tan x)^{\alpha} - \frac{1}{(\pi-2x)^{\beta}}}{\left[\arctan(\pi-2x)\right]^{\gamma}} \tag{1}$$

al variare di α, β e γ in $\mathbb{R}$.

II Parte.

5) Si stabilisca, al variare del parametro reale α, se il seguente problema ai limiti ammette soluzione:

$$\begin{aligned} y''(x) + \alpha y(x) &= x \\ y(0) = y(1) &= 0. \end{aligned}$$

In caso affermativo, si esibiscano tutte le soluzioni.

6) Si studino le soluzioni del seguente problema di Cauchy, al variare dei dati iniziali (x_0, y_0), e se ne tracci un grafico approssimativo:

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{x^2\ \ (1 + y(x)^2)}{y(x) - (1 + y(x)^2)} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} .$$

7) Al variare del parametro reale α, si dica se esiste e, nel caso, si calcoli il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\big[\arctan(|xy|)\big]^\alpha}{1 + \big(\sin(x)\big)^2 - \cos(y)}.$$

4) **[facoltativo]** Determinare tutti i dati iniziali (x_0, y_0) tali che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \big[\cosh\big(y(x)\big) - 2\big]\ \big[y(x)^2 + e^x\big] \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

abbia soluzione limitata.