

Compito di Analisi Matematica III, Corso B

Corso di Laurea in Fisica, A.A. 2007/08

Pisa, 21 luglio 2008

1) Data una matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

definiamo la sua norma

$$\|A\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Si trovi il minimo della funzione

$$\|A - \text{Id}\| = \sqrt{(a-1)^2 + b^2 + c^2 + (d-1)^2},$$

al variare delle matrici A con determinante uguale a zero.

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$\begin{cases} u'(t) = \frac{te^{u(t)}}{u(t) - 1} \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$$

- Si tracci il grafico delle soluzioni quando $t_0 = 0$ e $u_0 < 1$.
- Si tracci il grafico delle soluzioni quando $t_0 = 0$ e $u_0 > 1$.
- Si mostri che tutte le soluzioni con $t_0 = 0$ e $u_0 \neq 1$ sono funzioni pari.
- Si tracci il grafico delle altre eventuali soluzioni.

3) Si consideri la curva piana di equazione (in coordinate polari)

$$\rho(\theta) = 1 + \frac{1}{2} \sin(2\theta) \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

- Si disegni il supporto della curva.
- Si calcoli l'area della porzione di piano racchiusa dalla curva.