

Temi d'esame di Analisi Matematica 1

Area di Ingegneria dell'Informazione - a cura di M. Bardi

31.1.95

1) Studiare la funzione

$$f(x) = xe^{\arctan \frac{1}{|x^2-2|}}$$

(insieme di definizione, segno, limiti ed asintoti, continuità e derivabilità, crescita e decrescita, punti di massimo e di minimo relativo ed assoluto, limiti di f' , abbozzo del grafico; NON si richiede lo studio di f'').

2) Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3^{1/n} n}{n+1} \right)^{\alpha n^2}$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

3) Calcolare l'integrale

$$\int \frac{\sin \log(x^2)}{x^4} dx.$$

4) (Facoltativo) Dimostrare che, per $n \rightarrow \infty$,

$$\sum_{k=1}^n 1/k \sim \log n.$$

16.2.95

1) Data la funzione

$$f(x) = \arcsin(\ln^2(-x/6) - 1)$$

si provi che il suo dominio è $[-6e^{\sqrt{2}}, -6e^{-\sqrt{2}}]$ e la si studi (segno, limiti ed asintoti, continuità e derivabilità, crescita e decrescita, punti di massimo e di minimo relativo ed assoluto, limiti di f' , derivata seconda, concavità e convessità, flessi, abbozzo del grafico).

2) Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\cos(\sqrt{2}x) + \sqrt{1-2x^2}}{x^3 \sinh x}.$$

3) a) Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^{1/3}} 4^{\alpha x^2} \tanh(\alpha x - 1) dx$$

risulta convergente;

b) calcolarlo per $\alpha = 0$.

21.6.95

1) Studiare la funzione

$$f(x) = \ln \sqrt[3]{|\sinh x|^2}$$

(insieme di definizione, segno, limiti ed asintoti, continuità e derivabilità, crescita e decrescenza, punti di massimo e di minimo relativo ed assoluto, derivata seconda, concavità e convessità, abbozzo del grafico).

2) Calcolare

$$\int_0^{1/16} \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x^3 - x} + 3\sqrt{x} - 3} dx.$$

3) Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^\alpha \arctan \frac{1}{n^3}.$$

10.7.95

1) Studiare la funzione

$$f(x) = \ln \left| e^{-\frac{16}{16-x^2}} - e^{-1} \right|$$

(insieme di definizione, segno, limiti ed asintoti, continuità e derivabilità, crescita e decrescenza, punti di massimo e di minimo relativo ed assoluto, limiti di f' , abbozzo del grafico; NON si richiede lo studio di f'').

2) Risolvere nel campo complesso l'equazione

$$z^4 + 2\sqrt{3}z^2 + 4 = 0,$$

representandone le soluzioni nel piano di Gauss.

3) (Questa è una versione semplificata: il programma allora comprendeva anche le successioni di funzioni). Si calcoli al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$ il limite per $n \rightarrow +\infty$ della successione

$$f_n(x) = \arctan[(2x + 1)^n], \quad x \in \mathbb{R}.$$

5.9.95

1) Studiare, al variare del parametro $\alpha \geq 0$ la funzione

$$f_\alpha(x) = \frac{2\alpha}{\alpha + (2 - \alpha)e^{-3x}}$$

(insieme di definizione, segno, limiti ed asintoti, crescita e decrescenza, punti di massimo e di minimo relativo ed assoluto, abbozzo del grafico); LO STUDIO DELLA DERIVATA SECONDA È RICHIESTO SOLO PER $\alpha = 1$.

2) Calcolare l'integrale

$$\int_0^{1/3} x^2 \arcsin 3x dx.$$

3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(\arctan x) - \arctan(\sin x)}{\sinh x - \sin x}.$$

20.9.95

1) Studiare la funzione

$$f(x) = \left| \log \left(\sqrt{e^{2x} + 1} - e^x \right) \right|$$

(insieme di definizione, segno, limiti ed asintoti, continuità e derivabilità, crescita e decrescita, punti di massimo e di minimo relativo ed assoluto, limiti di f' se rilevanti, derivata seconda, concavità e convessità, abbozzo del grafico).

2) Data la funzione

$$F(x) = \int_0^x \frac{e^t}{\sin t + 2} dt,$$

a) determinare il suo dominio e dimostrare che è invertibile;

b) detta G l'inversa di F , calcolare il polinomio di Mac Laurin di ordine 2 di G .

3) Trovare le 6 soluzioni in \mathbf{C} dell'equazione

$$z^3 = |z|^3 2i \log |z|$$

e disegnarle nel piano di Gauss.

(sugg.: se ne calcoli prima il modulo e poi l'argomento).

4.2.97

1) Studiare la funzione

$$f(x) = \arctan \left(\left| \frac{x+1}{x-1} \right|^{\frac{1}{2}} \right)$$

(insieme di definizione, continuità, limiti nei punti notevoli; asintoti; derivabilità, crescita e decrescita, punti di massimo e di minimo relativo ed assoluto, limiti di f' , abbozzo del grafico. Non sono richiesti il calcolo e lo studio della derivata seconda). **Facoltativo.** Calcolare $f(x) + f(-x)$ e dedurre una simmetria del grafico; dedurre inoltre, senza calcolare f'' , che f non è né concava né convessa in $[-1, 1]$.

2)

i) Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log(\cosh(x^\pi)) - x^\pi);$$

ii) calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(\cosh(x^\pi)) - x^\pi + \log 2}{e^{-2x^\pi}}.$$

3) Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3-\pi)^{\beta-1}}{4^n} \cos(2n),$$

si dica per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{R}$ essa converge e se ne calcoli la somma per $\beta = 1$.

4) **Facoltativo.** Sia

$$a_n = 3 \cdot 3^{2^{-1}} \cdot \dots \cdot 3^{2^{-n+1}} \cdot 3^{2^{-n}};$$

si calcoli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

21.2.97

1) Studiare la funzione

$$f(x) = \cos x \cdot e^{\frac{-1}{\sin x + 1}}$$

nell'intervallo $[-\pi/2, 3\pi/2]$ (insieme di definizione, segno, limiti ed eventuali asintoti, continuità ed eventuali prolungamenti, derivabilità, crescita e decrescenza, massimi e minimi relativi ed assoluti, limiti di f' se rilevanti, abbozzo del grafico **anche in tutto** \mathbb{R} ; non sono richiesti il calcolo e lo studio della derivata seconda).

2) [**Nota bene: quest'esercizio vale 12 punti**] Si consideri l'integrale

$$\int_4^{+\infty} \frac{dx}{(x-4)^\alpha \sqrt{e^x - e^4}};$$

(i) si determinino tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali esso risulta convergente;

(ii) lo si calcoli per $\alpha = 0$.

3) [**Nota bene: quest'esercizio vale 8 punti**] Trovare tutti i numeri complessi z che soddisfano la disequazione

$$\operatorname{Im}(z + 2i) \leq \left| \frac{z - i}{i - 1} \right|$$

e rappresentarli nel piano di Gauss.

4) **Facoltativo.** Sia $f :]-2, 0[\rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che $f(-1/2) = 0$ e, per ogni $x \in]-2, 0[$, $f(y) - f(x) = o(y - x)$ per $y \rightarrow x$. Quanto vale $f(-1)$?

12.6.97

1) Studiare la funzione

$$f(x) = \arctan\left(e^{\frac{1}{x^2 + x - 2}}\right)$$

(insieme di definizione, segno, limiti ed eventuali asintoti, continuità e derivabilità, crescita e decrescenza, punti di massimo e di minimo relativo ed assoluto, limiti di f' , abbozzo del grafico; NON si richiede lo studio di f'').

2) Sia

$$f(x) = -\log \frac{5}{x} - \int_5^x \frac{e^{t^2}}{t} dt;$$

- a) determinare il dominio D di f ; dimostrare che $f : D \rightarrow f(D)$ è invertibile e che l'inversa g è derivabile;
- b) calcolare $f(5)$ e scrivere la formula di Taylor col resto di Peano di centro 0 e ordine 1 per g ;

3. c) verificare che $f(x) = \int_5^x \frac{1-e^{t^2}}{t} dt$ e dimostrare che $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ esiste finito.

3) Studiare la convergenza e la convergenza assoluta, al variare del parametro $\alpha \geq 0$, della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log(2n) \sin \frac{1}{n^{\alpha/2}}.$$

27.6.97

1) Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{3 - 2x - 2e^{-|2x-1|/2}}{2x-1}$$

(insieme di definizione, limiti ed asintoti, continuità e derivabilità, crescita e decrescita, punti di massimo e di minimo relativo ed assoluto, limiti di f' , segno, abbozzo del grafico; NON è richiesto lo studio della derivata seconda)

2)

i) Determinare i primi due termini non nulli dello sviluppo asintotico per $x \rightarrow 0$ di $\sin^2 x$ e di $\sinh^2 x$.

ii) Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(1 - \cosh x) - \sinh(\cos x - 1)}{\cos(\sinh x) - \cos(\sin x)}$$

3)

i) Calcolare una primitiva di

$$g(x) = \frac{\tan \frac{-3x}{2}}{(\tan \frac{-3x}{2})^2 + 1}.$$

ii) Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } 0 \leq x < \pi/6 \\ -\cos x + \alpha & \text{se } \pi/6 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

sia continua; calcolarne poi una primitiva.

5.9.97

1) Studiare la funzione

$$f(x) = \arctan \sqrt{\frac{(x+1)^3}{x-3}}$$

(insieme di definizione, segno, limiti ed asintoti, continuità e derivabilità, crescita e decrescita, punti di massimo e di minimo relativo ed assoluto, limiti di f' se rilevanti, abbozzo del grafico).

2) Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1 - \sin^3 x}{x^3(\cos x - e^{\tan^2 x})}.$$

3) Calcolare una primitiva della funzione

$$g(x) = \frac{|\arcsin(3x + 2)|}{\sqrt{3}\sqrt{x+1}}.$$

25.9.97

1) Studiare la funzione

$$f(x) = x + \log |27 - x^2| - 2 \log |x|$$

(insieme di definizione, limiti ed asintoti, continuità e derivabilità, crescita e decrescita, punti di massimo e di minimo relativo ed assoluto, derivata seconda, concavità e convessità, abbozzo del grafico).

2) Studiare la convergenza dell' integrale

$$\int_0^1 \frac{(\arctan x)^{\alpha+1/2}}{(1-\sqrt{x})^\alpha} dx$$

e calcolarlo per $\alpha = -1/2$.

3) Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{\frac{2x}{2x^2-1}}.$$

si provi che è invertibile in un intervallo aperto contenente 1; si calcoli $f(1)$ e si scriva il polinomio di Taylor di ordine 2 della funzione inversa f^{-1} a partire da $y = e^2$.