**Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica**

27 gennaio 2015

**Esercizio 1.** Si consideri il sottoinsieme di $L^\infty(\mathbb{R})$ definito da

$$M = \left\{ f \in L^\infty(\mathbb{R}) \,:\, \int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{x^2+1}\,dx \le 1 + \int_{-\infty}^0 \frac{f(x)}{x^4+1}\,dx \right\}$$

e per $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ si ponga

$$p(g) = \inf\left\{ \lambda > 0 \,:\, \frac{g}{\lambda} \in M \right\}.$$

i) Dire se $M$ è, rispettivamente, chiuso rispetto alla topologia debole*, debole e forte.

ii) Dire se $M$ è, rispettivamente, sequenzialmente chiuso rispetto alla topologia debole*, debole e forte.

iii) Dire se esiste $c > 0$ tale che $p(g) \le c\|g\|_\infty$ per ogni $g \in L^\infty(\mathbb{R})$.

iv) Dire se $p$ è una norma su $L^\infty(\mathbb{R})$.

**Esercizio 2.** Sia $I = (0,1)$ e sia $T : D(T) \subset L^2(I) \to L^2(I)$ l'operatore differenziale $T(u) = -u'' + u'$ definito sul dominio $D(T) = H^2(I) \cap H_0^1(I)$.

i) Mostrare che $T$ è un operatore chiuso.

ii) Determinare l'aggiunto di $T$ in $L^2(I)$.

iii) Data $f \in L^2(I)$, mostrare che esiste un'unica soluzione dell'equazione $T(u) = f$.

**Esercizio 3.** Sia $X$ uno spazio di Banach e siano $A : D(A) \to X$ e $B : D(B) \to X$ due operatori lineari chiusi, con $D(B) \subseteq D(A) \subset X$ e $B$ iniettivo da $D(B)$ in $X$. Poniamo $T = A \circ B^{-1} : R(B) \to X$.

i) Dimostrare che, se $B$ è surgettivo, allora $T$ è lineare e continuo.

ii) Nel caso in cui $B$ sia solo iniettivo, dire se $T$ è chiudibile, cioè se è la restrizione all'immagine di $B$ di un operatore chiuso.

**Soluzione esercizio 1.**

i) Osserviamo che $M$ si può scrivere come

$$M = \left\{ f \in L^\infty(\mathbb{R}) \, : \, \int_R f(x)h(x)\,dx \le 1 \right\},$$

dove $h(x) = 1/(x^2+1)$ se $x > 0$ e $h(x) = -1/(x^4+1)$ se $x < 0$. Poiché $h$ appartiene a $L^1(\mathbb{R})$, l'insieme $M$ è debole* chiuso, e quindi chiuso anche per la topologia debole e per quella forte.

ii) Essendo $M$ chiuso nella topologia debole* è anche sequenzialmente chiuso nella stessa topologia, e quindi è sequenzialmente chiuso anche rispetto alla topologia debole e a quella forte.

iii) E' sufficiente mostrare che $M$ contiene la palla $B_c(0)$ di $L^\infty(\mathbb{R})$, per $c > 0$ sufficientemente piccolo. Data $g \in B_c(0)$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)h(x)\,dx \le \|g\|_\infty \|h\|_1 \le 1,$$

se $c = 1/\|h\|_1$.

iv) $p$ non è una norma poiché $M$ contiene l'iperpiano $\{f \, : \, \int_{\mathbb{R}} fh\,dx = 0\}$, su cui $p \equiv 0$.

**Soluzione esercizio 2.**

i) Sia $u_n \in D(T)$ una successione tale che $u_n \to u$ e $v_n = T(u_n) \to v$ in $L^2(I)$. Dall'uguaglianza

$$\int_I u_n v_n\,dx = \int_I u_n(-u_n'' + u_n')\,dx = \int_I (u_n')^2\,dx + \frac{1}{2}u_n(1)^2 - \frac{1}{2}u_n(1)^2 = \|u_n\|_{H_0^1}^2$$

otteniamo $u \in H_0^1(I)$ e $\|u\|_{H_0^1} \le \|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2}$. In particolare, $u_n$ converge a $u$ debolmente in $H_0^1(I)$. Per ogni funzione test $\phi \in C_c^1(I)$ possiamo scrivere

$$\int_I v\phi\,dx = \lim_n \int_I (-u_n'' + u_n')\phi\,dx = \lim_n \int_I u_n'(\phi' + \phi)\,dx = \int_I u'(\phi' + \phi)\,dx,$$

da cui segue che $u \in H^2(I)$ e $T(u) = v$, cioè $T$ è un operatore chiuso.

ii) Date due funzioni $u, v \in D(T)$ si ha

$$\int_I T(u)v\,dx = \int_I (-u'' + u')v\,dx = \int_I u(-v'' - v')\,dx.$$

In particolare $D(T) \subseteq D(T^*)$ e la restrizione di $T^*$ a $D(T)$ è data dall'operatore $T^*(v) = -v'' - v'$. Essendo tale restrizione un operatore chiuso (per quanto mostrato in precedenza) otteniamo che $D(T^*) = D(T)$.

iii) Definiamo la forma bilineare su $H^1_0(I)$

$$a(u,v) = \int_I (u'v' + u'v)\, dx.$$

Tale forma bilineare è continua e coerciva (ma non simmetrica), infatti

$$a(u,u) = \|u\|^2_{H^1_0} \qquad \text{per ogni } u \in H^1_0(I).$$

Grazie al teorema di Lax-Milgram, per ogni $f \in L^2(I)$ esiste un'unica funzione $u \in H^1_0(I)$ tale che

$$a(u,v) = \int_I (u'v' + u'v)\, dx = \int fv\, dx \qquad \text{per ogni } v \in H^1_0(I).$$

In particolare otteniamo che $u \in H^2(I)$ e $T(u) = f$.

**Soluzione esercizio 3.**

i) La linearità di $T$ segue subito dalla linearità di $A$ e di $B$.
Mostriamo ora la continuità di $T$. Grazie al Teorema del grafico chiuso è sufficiente mostrare che $T$ ha grafico chiuso. Osserviamo che $B^{-1}$ è chiuso e quindi continuo. Sia ora $x_n$ una successione in $X$ tale che $x_n \to x \in X$ e $y_n = T(x_n) \to y \in X$. Posto $z_n = B^{-1}(x_n)$, dalla continuità di $B^{-1}$ segue che $z_n \to z = B^{-1}(x)$. Poiché $A(z_n) = y_n \to y$, dalla chiusura di $A$ si ottiene che $y = A(B^{-1}(x)) = T(x)$.

ii) Sia $X = C([0,1])$, sia $g \in X$ una funzione non identicamente nulla, sia $A(u) = u(0)g$ e sia $B(u) = \int_0^x u\, dx$. Notiamo che $A$, $B$ sono operatori limitati e $B$ è iniettivo con $R(B) = \{u \in C^1([0,1]) \,:\, u(0) = 0\}$. L'operatore $T$ è quindi dato da $T(u) = u'(0)g$ per ogni $u \in R(B)$. Prendiamo ora una successione $u_n \to 0$ in $X$ con $u_n \in R(B)$ e $T(u_n) = u_n'(0)g = g$ per ogni $n$. Se $T$ fosse la restrizione a $R(B)$ di un operatore chiuso $\widetilde{T}$ si avrebbe $\widetilde{T}(0) = g$, il che è assurdo per la scelta di $g$. Ne segue che $T$ non è chiudibile.