Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica

8 settembre 2015

Esercizio 1. Per ogni $x \in \ell^2$ sia

$$(Tx)_n = \frac{nx_n + x_{n+1}}{n+1} \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

i) Mostrare che T è un operatore lineare e continuo da ℓ^2 in sè.

ii) Mostrare che l'operatore $I - T$ è compatto.

iii) Dire se T è suriettivo.

Esercizio 2. Sia H uno spazio di Hilbert separabile, sia $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base hilbertiana di H e sia $V_n = \langle e_1, \dots, e_n\rangle$ il sottospazio generato dai vettori $e_1, \dots, e_n$. Sia $T \in \mathcal{L}(H)$.

i) Dimostrare che T è compatto se e solo se

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in B_1\cap V_n^\perp} \|Tx\| = 0.$$

ii) Dimostrare che T è compatto se verifica la condizione $\sum_{n=1}^\infty \|Te_n\|^p < +\infty$ per qualche $0 < p \leq 2$.

iii) Dire se esistono operatori compatti tali che $\sum_{n=1}^\infty \|Te_n\|^p = +\infty$ per ogni $p > 0$.

Esercizio 3. Sia $I = (0,1) \subset \mathbb{R}$ e sia $L = H_0^1(I) \cap H^2(I)$.

i) Mostrare che L è un sottospazio denso di $H_0^1(I)$.

ii) Mostrare che L è un sottospazio chiuso di $H^2(I)$.

iii) Mostrare che

$$\|u\|_L = \left(\int_I u''(x)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad u \in L,$$

definisce una norma su L.

iv) Mostrare che $(L, \|\cdot\|_L)$ è uno spazio di Hilbert.

Soluzione Esercizio 1.

i) La linearità di T segue direttamente dalla definizione. Vediamo ora che T è limitato. Dato $x \in \ell^2$ calcoliamo

$$\|Tx\|_{\ell^2}^2 \leq \sum_n (|x_n| + |x_{n+1}|)^2 \leq 2 \sum_n \left(|x_n|^2 + |x_{n+1}|^2\right) \leq 4\|x\|_{\ell^2}^2,$$

da cui segue che T è continuo con $\|T\| \leq 4$.

ii) Per ogni $x \in \ell^2$ si ha

$$\big((I-T)x\big)_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{n+1} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Da questa relazione si ottiene facilmente che $I - T = \lim_{N\to\infty} \Pi_N(I-T)$, dove $\Pi_N : \ell^2 \to \ell^2$ è la proiezione sulle prima N coordinate. $I - T$ è quindi compatto, essendo limite di operatori di rango finito.

iii) Per il Teorema dell'Alternativa di Fredholm, T è suriettivo se e solo se è iniettivo. Dato $x \in \ell^2$ con $Tx = 0$ si ha $x_{n+1} = nx_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, che implica subito $x = 0$ e quindi T è iniettivo.

Soluzione Esercizio 2.

i) Supponiamo che valga la condizione

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in B_1\cap V_n^\perp} \|Tx\| = 0, \tag{1}$$

e siano P_{V_n}, $P_{V_n^\perp}$ le proiezioni ortogonali sui sottospazi V_n, $V_n^\perp$ rispettivamente. Per ogni $x \in B_1$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \|TP_{V_n}x - Tx\| = \lim_{n\to\infty} \|TP_{V_n^\perp}x\| \leq \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in B_1\cap V_n^\perp} \|Tx\| = 0,$$

da cui si ottiene che $TP_{V_n} \to T$ in $\mathcal{L}(H)$. Essendo TP_{V_n} operatori di rango finito, ne segue che T è compatto.

Viceversa, supponiamo che T sia compatto. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $x_n \in B_1 \cap V_n^\perp$ tale che

$$\|Tx_n\| \geq \sup_{x\in B_1\cap V_n^\perp} \|Tx\| - \frac{1}{n}\,.$$

Osserviamo che, poiché $V_{n+1}^\perp \subset V_n^\perp$ e $\cap_n V_n^\perp = \emptyset$, si ha $x_n \rightharpoonup 0$ e quindi anche $Tx_n \rightharpoonup 0$ per $n \to \infty$. Essendo T compatto, questo implica che $Tx_n \to 0$ da cui si ottiene (1).

ii) Mostriamo che la condizione $\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^p < +\infty$ implica (1). Poiché ℓ^p si immerge con continuità in ℓ^2 per $p \leq 2$, abbiamo anche $\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 < +\infty$. In particolare, otteniamo

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k\geq n} \|Te_k\|^2 = 0.$$

Dato $x \in B_1 \cap V_n^{\perp}$ si ha

$$\|Tx\| \leq \sum_{k\geq n} |x_k|\|Te_k\| \leq \left(\sum_{k\geq n} \|Te_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

da cui si ottiene subito (1). La compattezza di T segue quindi dal punto precedente.

iii) Sia $\{\lambda_n\}_n$ una successione limitata e sia $T \in \mathcal{L}(H)$ l'operatore definito da $Te_n = \lambda_n e_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. La condizione (1), e quindi la compattezza di T, è equivalente alla condizione $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Basta quindi scegliere una successione infinitesima λ_n tale che $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^p = +\infty$ per ogni $p > 0$, ad esempio $\lambda_n = 1/\log(n+1)$.

Soluzione Esercizio 3.

i) L continene $C_c^{\infty}(I)$ che è denso in $H_0^1(I)$, pertanto anche L è denso in $H_0^1(I)$.

ii) Sia $u_n \in H_0^1(I) \cap H^2(I)$ tale che $u_n \to u$ in $H^2(I)$. Dobbiamo dimostrare che $u \in H_0^1(I)$, cioè che $u(0) = u(1) = 0$. Poiché $H^2(I)$ si immerge con continuità in $C([0,1])$, si ha che $u_n \to u$ uniformemente in $[0,1]$ e quindi $u(0) = u(1) = 0$.

iii) Utilizzando le proprietà note della norma L^2 si verifica subito che $\|\cdot\|_L$ soddisfa la disuguaglianza triangolare. Resta quindi da verificare che $\|u\|_L = 0$ implica $u = 0$. Questo segue dal fatto che se u'' è nulla q.o. (ossia $\|u\|_L = 0$) allora $u'(x) = c$ con c costante. Imponendo che u' abbia media nulla, che è sempre vero per una funzione in $H_0^1(I)$, si deduce $u' = 0$, da cui a sua volta segue che u deve essere identicamente nulla, per rispettare le condizioni al bordo di I.

iv) Un prodotto scalare che induce su L la norma $\|\cdot\|_L$ è il seguente:

$$L \times L \ni (u,v) \mapsto \int_I u''(x)v''(x)\,dx.$$

Per dimostrare che L è completo basta far vedere che $\|\cdot\|_L$ è equivalente alla norma standard su $H^2(I)$, $\|u\|_{H^2(I)} = \|u\|_{L^2(I)} + \|u'\|_{L^2(I)} + \|u''\|_{L^2(I)}$ e tener presente che L è chiuso in $H^2(I)$ per quanto visto al punto ii). Dato che è noto che su $H_0^1(I)$ $\|u\|_{L^2(I)}$ è controllata da $\|u'\|_{L^2(I)}$ rimane da dimostrare che su L $\|u'\|_{L^2(I)}$ è stimata dall'alto da $\|u''\|_{L^2(I)}$. Per far questo basta notare che, per i teoremi di immersione in dimensione 1 già usati sopra, $u' \in C([0,1])$. Avendo media nulla, per i teoremi classici sulle funzioni continue, fissata $u \in L$ esiste un punto $z_u \in [0,1]$ tale che $u'(z_u) = 0$. Il teorema di rappresentazione ci dice allora che $u'(x) = \int_{z_u}^{x} u''(t)\, dt$. Dalla disuguaglianza di Hölder si ottiene

$$(u'(x))^2 \leq \left(\int_0^x |u''(t)|\, dt \right)^2 \leq \int_0^1 |u''(t)|^2\, dt,$$

da cui segue $\|u'\|_{L^2(I)} \leq \|u''\|_{L^2(I)}$ per ogni $u \in L$.