Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica

07 giugno 2016

Esercizio 1. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione infinitesima, con $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e sia $T : \ell^2 \to \ell^2$ l'operatore definito da $T(x)_n = a_n x_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in \ell^2$.

i) Mostrare che $T \in \mathcal{L}(\ell^2)$ e calcolarne la norma.

ii) Mostrare che $T \in \mathcal{K}(\ell^2)$.

iii) Determinare lo spettro e gli eventuali autovalori di T.

Esercizio 2. Sia $1 < p < +\infty$ e sia $T : L^p(0,1) \to L^p(0,1)$ l'operatore definito da

$$T(u)(x) = x \int_0^1 su(s)ds \qquad x \in (0,1).$$

i) Mostrare che T è lineare e continuo.

ii) Mostrare che T è compatto e calcolarne lo spettro.

iii) Determinare l'operatore aggiunto T^*.

iv) Data una funzione $g \in L^p(0,1)$, provare che l'equazione integrale

$$u(x) - x \int_0^1 s\, u(s)ds = g(x)$$

ha una e una sola soluzione $u \in L^p(0,1)$.

Esercizio 3. Sia $T : H_0^1(0,1) \to \mathbb{R}$ l'operatore definito da

$$T(u) = \int_0^1 x\, u'(x)dx.$$

i) Mostrare che T è lineare e continuo.

ii) Calcolare la norma di T.

Si ricorda che $H_0^1(0,1)$ è munito della norma $\|u\|_{H_0^1} = \|u'\|_{L^2}$.

Soluzioni

Soluzione esercizio 1.

i) La linearità di T segue subito dalla definizione.

Per ogni $x \in \ell^2$, si ha

$$\|T(x)\|_{\ell^2}^2 = \sum_n a_n^2 x_{n+1}^2 \leq \left(\max_n a_n\right)^2 \|x\|_{\ell^2}^2,$$

da cui segue che T è continuo con $\|T\| \leq \max_n a_n$.

Consideriamo ora $x = e_{\bar{n}+1}$, dove $(e_n)_n$ è la base canonica di ℓ^2 e $\bar{n} \in \mathbb{N}$ è tale che $a_{\bar{n}} = \max_n a_n$. Per tale scelta di x abbiamo $\|T(x)\|_{\ell^2} = a_{\bar{n}} = \max_n a_n$, da cui otteniamo che $\|T\| = \max_n a_n$.

ii) Per ogni $N \in \mathbb{N}$, sia $T_N : \ell^2 \to \ell^2$ l'operatore definito da $T_N(x)_n = a_n x_{n+1}$ se $n < N$ e $T_N(x)_n = 0$ se $n \geq N$. Osserviamo che gli operatori T_N hanno tutti rango finito.

Per ogni $x \in \ell^2$ abbiamo

$$\|(T - T_N)(x)\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n \geq N} a_n^2 x_{n+1}^2 \leq \left(\max_{n \geq N} a_n\right)^2 \|x\|_{\ell^2}^2,$$

da cui segue che $\|T - T_N\| \leq \max_{n \geq N} a_n$. In particolare $\lim_{N \to +\infty} \|T - T_N\| = 0$, cioè T è limite di operatori di rango finito ed è quindi compatto.

iii) Poiché T è compatto, sappiamo che $0 \in \sigma(T)$ e $\sigma(T) \setminus \{0\} = VP(T) \setminus \{0\}$. Inoltre, $T(e_1) = 0$, quindi $0 \in VP(T)$.

Mostriamo ora che $\sigma(T) = VP(T) = \{0\}$. Sia $\lambda \neq 0$ e sia $x \in \ell^2$ tale che $T(x) = \lambda x$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo $x_{n+1} = (\lambda / a_n) x_n$ da cui otteniamo che, per n abbastanza grande, $|x_{n+1}| \geq |x_n|$. Poiché $x \in \ell^2$ questo implica $x = 0$ e quindi $\lambda \notin \sigma(T)$.

Soluzione esercizio 2.

i) La linearità di T segue dalla linearità dell'integrale.

Dalla stima

$$|T(u)(x)| \leq x \int_0^1 |s u(s)| ds \leq x \, \|x\|_{L^{p'}} \|u\|_{L^p} \qquad x \in (0,1),$$

segue che

$$\|T(u)\|_{L^p} \leq \|x\|_{L^p} \|x\|_{L^{p'}} \|u\|_{L^p} = (p+1)^{-\frac{1}{p}} (p'+1)^{-\frac{1}{p'}} \|u\|_{L^p},$$

quindi T è continuo.

ii) Poiché l'immagine di T coincide con la retta generata dalla funzione x, e quindi ha dimensione 1, T è un operatore compatto.

Essendo T compatto sappiamo che $0 \in \sigma(T)$ e $\sigma(T) \setminus \{0\} = VP(T) \setminus \{0\}$. Siano ora $\lambda \neq 0$ e $u \in L^p(0,1)$, con $u \neq 0$, tali che $T(u) = \lambda u$. Poiché l'immagine di T è la retta generata dalla funzione x, abbiamo $u(x) = x$. Possiamo quindi calcolare

$$T(u)(x) = x \int_0^1 s^2 ds = \frac{1}{3}\, x = \lambda x,$$

per cui $\lambda = 1/3$ e $\sigma(T) = \{0, 1/3\}$.

iii) Essendo T limitato sappiamo che $\mathrm{dom}(T^*) = L^{p'}(0,1)$. Inoltre, per ogni $(u,v) \in L^p(0,1) \times L^{p'}(0,1)$, abbiamo

$$\int_0^1 u(s) T^*(v)(s) ds = \int_0^1 T(u)(s) v(s) ds = \int_0^1 s u(s) ds \int_0^1 s v(s) ds,$$

quindi

$$T^*(v)(x) = x \int_0^1 v(s) ds \qquad x \in (0,1).$$

iv) Dobbiamo mostrare che l'operatore $I - T$ è bigettivo. Osserviamo subito che è iniettivo, poiché $1 \notin \sigma(T)$. La surgettività di $I - T$ segue dal Teorema dell'alternativa di Fredholm, che ci garantisce che

$$\mathrm{Im}(I - T) = L^p(0,1) \iff \mathrm{Ker}(I - T) = \{0\}.$$

Soluzione esercizio 3.

i) La linearità di T segue dalla linearità dell'integrale.

Dalla stima

$$T(u) \leq \|x\|_{L^2} \|u'\|_{L^2} = \|x\|_{L^2} \|u\|_{H_0^1},$$

segue che T è continuo con $\|T\| \leq \|x\|_{L^2} = 1/\sqrt{3}$.

ii) Ponendo $g(x) = (x^2 - x)/2 \in H_0^1(0,1)$, si ha

$$T(u) = \int_0^1 x\, u'(x) dx = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2} \right) u'(x) dx = \langle g, u \rangle_{H_0^1},$$

da cui segue che $\|T\| = \|g\|_{H_0^1} = 1/(2\sqrt{3})$.