Compito di Analisi Matematica 2

11 febbraio 2020

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Calcolare il volume del solido

$$E := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)^2 + 4z^2 \leq 1\right\}.$$

Determinare il massimo e il minimo assunti sull'insieme E dalla funzione

$$f(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2\,.$$

Esercizio 2. Studiare la continuità e la differenziabilità della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^3 \sin(y)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Esercizio 3. Determinare la soluzione generale del seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x'(t) &= 2x(t) + y(t) \\ y'(t) &= 4x(t) - y(t). \end{cases}$$

Studiare la stabilità dell'origine.

SOLUZIONI

Soluzione Esercizio 1. Osserviamo che l'insieme E è la rotazione attorno all'asse z dell'insieme

$$S := \{(x, z) \,:\, (x-1)^2 + 4z^2 \le 1\}.$$

Il bordo di S è un'ellisse con semiassi di lunghezza 1 e 1/2, e con baricentro nel punto $(1, 0)$. Per il teorema di Pappo abbiamo quindi che

$$|E| = 2\pi\,|S| = 2\pi\frac{\pi}{2} = \pi^2\,.$$

Calcoliamo ora il massimo e il minimo di f su E. Dato che $(0, 0, 0) \in E$, abbiamo subito che $\min_E f = 0$.

Osserviamo che il massimo di f su E è uguale al massimo di $g(x, z) = x^2 + z^2$ sull'insieme S. Dato che la funzione g non ha punti stazionari al di fuori dell'origine, applicando il metodo dei Moltiplicatori di Lagrange otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x &= \lambda(x-1) \\ z &= 4\lambda z \\ (x-1)^2 + 4z^2 &= 1 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema otteniamo le soluzioni $(x, z) = (0, 0)$, che è il punto di minimo assoluto, e $(x, z) = (2, 0)$, che è quindi il punto di massimo assoluto, per cui si ha

$$\max_E f = g(2, 0) = 4\,.$$

Soluzione Esercizio 2. Osserviamo per prima cosa che f è continua e differenziabile in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Per quanto riguarda il comportamento di f nel punto $(0, 0)$, notiamo che

$$|f(x, y)| \le \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} \le x^2 + y^2 \qquad \text{per ogni } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

da cui segue che f è continua e differenziabile anche nel punto $(0, 0)$ e si ha

$$\nabla f(0, 0) = (0, 0).$$

Soluzione Esercizio 3. Riscriviamo il sistema in forma matriciale come $X'(t) = AX(t)$ con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A ha autovalori $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -2$ ed è quindi diagonalizzabile. In particolare l'origine è un punto di sella.

Due autovettori della matrice A, corrispondenti agli autovalori λ_1 e λ_2, sono rispettivamente $v_1 = (1, 1)$ e $v_2 = (1, -4)$, pertanto la soluzione generale del sistema si può scrivere come

$$(x(t),\, y(t)) = X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 = \left(c_1 e^{3t} + c_2 e^{-2t},\, c_1 e^{3t} - 4c_2 e^{-2t}\right),$$

al variare di $c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}$.