

Analisi Matematica B - 2011/12 - Programma dettagliato

Docente: Alberto Abbondandolo

Gli argomenti in **grassetto** sono quelli considerati più importanti e, nel caso siano teoremi, occorre conoscerne la dimostrazione. Degli altri occorre conoscere comunque gli enunciati.

Numeri reali. Assiomi dei numeri reali. Loro conseguenze: proprietà di Archimede e densità dei numeri razionali. **Il numero $\sqrt{2}$ è irrazionale. Il valore assoluto e disuguaglianze ad esso collegate. Disuguaglianza di Bernoulli e disuguaglianza aritmetico-geometrica. Massimo e minimo, maggioranti e minoranti, limitatezza, estremo superiore ed inferiore (di insiemi e di funzioni). Proprietà dell'estremo superiore ed inferiore. Binomio di Newton.**

Limiti di successioni reali. Definizione di successione. Limiti di successioni e loro proprietà elementari: unicità del limite, limitatezza delle successioni convergenti, permanenza del segno, confronto, proprietà algebriche. **Successioni divergenti e loro proprietà.** Comportamento al limite di successioni importanti: a^n con $a \in \mathbb{R}$, $\sqrt[n]{a}$ con $a \geq 0$, $\sqrt[n]{n^k}$ con $k \in \mathbb{Z}$, a^n/n^k con $a \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$, $\sqrt[n]{n!}$. **Successioni monotone, teorema: le successioni monotone hanno limite. Applicazioni importanti: la successione definita ricorsivamente da $x_{n+1} = 1/2(x_n + 2/x_n)$, $x_0 > 0$, converge a $\sqrt{2}$, successione di Fibonacci ed metodo per esprimere in forma chiusa una successione definita da una legge di ricorrenza del secondo ordine. Sottosuccessioni. Il teorema di Bolzano-Weierstrass.**

Funzioni continue. Intorni e punti di accumulazione. **Limiti di funzioni e loro proprietà elementari: unicità del limite, permanenza del segno, confronto, proprietà algebriche.** Rapporto tra limiti di funzioni e di successioni. **Funzioni continue e loro proprietà algebriche. Teorema degli zeri** (conoscere almeno una delle due dimostrazioni viste) e teorema dei valori intermedi. **Applicazione: i polinomi di grado dispari possiedono radici.** Limiti destri e sinistri. **Monotonia e continuità: esistenza del limite per funzioni monotone;** per una funzione f tra intervalli sono fatti equivalenti: (1) f è continua e bigettiva, (2) f è strettamente monotona e surgettiva. La continuità della funzione inversa. **La funzione $x \mapsto \sqrt{x}$. Le funzioni e^x e $\log x$: definizioni e proprietà; esponenziali e logaritmi in base qualunque. Notazione di Landau per funzioni e per successioni. Versione debole della formula di Stirling: $\sqrt[n]{n!} = n/e + o(n)$ e $\log n! = n \log n - n + o(n)$. Il teorema di Weierstrass.**

Numeri complessi. Definizione e rappresentazione cartesiana. Operazioni algebriche, **coniugato e modulo di un numero complesso.** L'esponenziale complesso, le funzioni seno e coseno, la formula di de Moivre. **Radici n -esime di numeri complessi.** Il teorema fondamentale dell'algebra.

Funzioni derivabili. La derivata: interpretazione geometrica e significato analitico. Derivata di somme, prodotti e rapporti. Derivate delle funzioni elementari. Derivata di una composizione di funzioni e della funzione inversa. Derivate dell'esponenziale, del logaritmo e delle funzioni trigonometriche. **Massimi e minimi locali: il principio di Fermat. Teorema di Lagrange, monotonia e segno della derivata.** Applicazioni: come

funziona l'arcobaleno, numero di soluzioni di equazioni. **Formula di Taylor con resto di Peano.** **Sviluppi di Taylor di e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\log(1+x)$, $(1+x)^\alpha$, $\arctan x$.** **Massimi e minimi e segno delle derivate di ordine superiore.** Formula di Taylor con resto di Lagrange, stima dell'errore negli sviluppi di Taylor. **Applicazioni:** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}/n = \log 2$ e $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/(2n+1) = \pi/4$.

Serie numeriche e serie di potenze. **Definizione di serie convergente, divergente e indeterminata, somma di una serie.** **Esempi importanti:** serie geometrica, serie armonica, serie di Mengoli, serie armonica generalizzata. **Se una serie converge, il suo termine generale è infinitesimo.** **Serie a termini positivi: confronto, confronto asintotico, criteri della radice n -esima e del rapporto.** **Espressione di un numero decimale come frazione.** Applicazioni geometriche delle serie. **Serie a segno alterno: criterio di Leibniz.** **Serie di potenze: dominio di convergenza.** Derivabilità delle serie di potenze. **Calcolo di $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$.** Calcolo approssimato dei logaritmi dei numeri naturali.

Funzioni integrabili. **Somme di Riemann superiori ed inferiori e loro proprietà.** **Funzioni integrabili secondo Riemann e loro integrale.** **Le funzioni integrabili sono uno spazio vettoriale e l'integrale è un'applicazione lineare.** **Monotonia dell'integrale.** **La funzione di Dirichlet non è integrabile secondo Riemann.** Criterio di integrabilità. Funzioni Lipschitziane. **Se f è integrabile e g Lipschitziana, allora $g \circ f$ è integrabile.** Integrabilità del prodotto di funzioni integrabili e del valore assoluto di una funzione integrabile. **Le funzioni continue sono integrabili (lo abbiamo dimostrato solo per funzioni Lipschitziane).** **Primitive e teorema fondamentale del calcolo integrale.** **Integrazione per parti e per sostituzione.** **Integrali e serie: il comportamento delle serie armoniche generalizzate.** Integrali impropri. **Decomposizione in frazioni semplici.** Prodotto di Wallis e sviluppo asintotico del coefficiente binomiale centrale. Formula di Stirling. Integrazione di serie di potenze. Funzione Gamma. Calcolo della lunghezza di alcune curve. La cicloide. Il problema della brachistocrona.