2.6 Un problema di Dirichlet

Consideriamo il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} u''(x) + f(x, u(x), u'(x)) = 0, \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{cases} \tag{10}$$

dove $f \in C^0([0,\pi] \times \mathbb{R}^2)$. Nella sezione I.2.3 abbiamo studiato problemi di questo tipo dal punto di vista locale, con il teorema della funzione implicita. Grazie alla teoria del grado di Leray-Schauder possiamo ora studiare questioni globali di esistenza di soluzioni. Supponiamo che la nonlinearità f abbia *crescita sotto-lineare*, cioè

$$\lim_{|\zeta| \to +\infty} \frac{|f(x,\zeta)|}{|\zeta|} = 0, \quad \text{uniformemente in } x \in [0,\pi]. \tag{11}$$

Vogliamo dimostrare che in queste ipotesi esiste una soluzione $u \in C^2([0,\pi])$ del problema (10). Indichiamo con $C^0_0([a,b])$ lo spazio delle funzioni continue sull'intervallo $[a,b]$ che si annullano agli estremi.

2.1 Lemma. *L'operatore lineare*

$$C^2([0,\pi]) \cap C^0_0([0,\pi])) \to C^0([0,\pi]), \quad u \mapsto u'', \tag{12}$$

è un isomorfismo.

Si tratta di un caso particolare del Lemma I.2.8, ma diamone comunque una dimostrazione diretta.

Dimostrazione. Data $v \in C^0([0,\pi])$, si vuole trovare $u \in C^2([0,\pi]) \cap C^0_0([0,\pi])$ che risolva $u'' = v$. Integrando due volte questa equazione otteniamo,

$$u'(t) - u'(0) = \int_0^t v(s)\, ds,$$
$$u(x) - u(0) - u'(0)x = \int_0^x dt \int_0^t v(s)\, ds.$$

Dato che $u(0) = 0$, si deve avere

$$u(x) = \int_0^x dt \int_0^t v(s)\, ds + u'(0)x.$$

Il valore di $u'(0)$ può essere determinato imponendo la condizione $u(\pi) = 0$,

$$u'(0) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi dt \int_0^t v(s)\, ds.$$

Dunque la formula

$$u(x) = \int_0^x dt \int_0^t v(s)\, ds - \frac{x}{\pi} \int_0^\pi dt \int_0^t v(s)\, ds,$$

definisce l'inversa dell'operatore d^2/dx^2. □

Indichiamo con $T \in L(C^0([0,\pi]), C^2([0,\pi]) \cap C^0_0([0,\pi]))$ l'operatore inverso di (12).

2.2 Esercizio. *Determinare la norma di T. Come è legata questa norma alle migliori costanti c_0 e c_1 per cui vale*

$$\|u\|_\infty \le c_0 \|u''\|_\infty, \quad \|u'\|_\infty \le c_1 \|u''\|_\infty,$$

per ogni $u \in C^2([0,\pi]) \cap C^0_0([0,\pi])$?

Applicando l'operatore T, vediamo che il problema (10) è equivalente a trovare $u \in C^1([0,\pi]) \cap C_0^0([0,\pi])$ tale che

$$u + Tf(\cdot, u, u') = 0.$$

La mappa $K(u) = Tf(\cdot, u, u')$ è continua e limitata da $C^1([0,\pi])$ in $C^2([0,\pi]) \cap C_0^0([0,\pi])$. Dato che l'inclusione $C^2([0,\pi]) \hookrightarrow C^1([0,\pi])$ è compatta, deduciamo che la mappa K è una mappa compatta dallo spazio $C^1([0,\pi]) \cap C_0^0([0,\pi])$ in sè. Quindi la mappa $F(u) = u + K(u)$ è una perturbazione compatta dell'identità su tale spazio.

Vorremmo trovare una palla $B_R \subset C^1([0,\pi]) \cap C_0^0([0,\pi])$ sufficientemente grande tale che l'equazione $F(u) = 0$ non abbia soluzioni sul suo bordo, in modo da poter applicare la teoria del grado (la norma qui è quella C^1). Dato che ci interesserà anche congiungere la mappa F all'identità tramite l'omotopia,

$$H(t, u) = u + tK(u), \quad t \in [0, 1],$$

ricaviamo subito stime a priori per le soluzioni dell'equazione $H(t, u) = 0$. Siano dunque $u \in C^1([0,\pi]) \cap C_0^0([0,\pi])$ e $t \in [0, 1]$. Allora

$$\|H(t, u)\|_{C^1} \geq \|u\|_{C^1} - t\|K(u)\|_{C^1} \geq \|u\|_{C^1} - \|K(u)\|_{C^1}. \tag{13}$$

Grazie all'ipotesi di sotto-linearità (11), per ogni $\epsilon > 0$ esiste una costante c_ϵ tale che

$$|f(x, \xi, \eta)| \leq \epsilon(|\xi| + |\eta|) + c_\epsilon.$$

Allora, indicando con τ la norma di T come operatore da $C^0([0,\pi])$ in $C^1([0,\pi])$,

$$\|K(u)\|_{C^1} \leq \tau\|f(\cdot, u, u')\|_\infty \leq \tau\epsilon\|u\|_{C^1} + \tau c_\epsilon. \tag{14}$$

Se scegliamo $\epsilon = 1/(2\tau)$, da (13) e (14) ricaviamo

$$\|H(t, u)\|_{C^1} \geq \frac{1}{2}\|u\|_{C^1} - \tau c_\epsilon.$$

Quindi, se fissiamo un $R > 2\tau c_\epsilon$, se $\|u\|_{C^1} \geq R$ si trova $\|H(t, u)\|_{C^1} > 0$ per ogni $t \in [0, 1]$. Dunque l'omotopia H è ammissibile sulla palla B_R, e per l'invarianza del grado si ottiene

$$\deg(F, B_R, 0) = \deg(\mathrm{id}, B_R, 0) = 1.$$

Pertanto l'equazione $F(u) = 0$ ha almeno una soluzione in B_R. Tale soluzione risolve il problema (10).

Parte III
Teoria della biforcazione

1 Biforcazione locale

1.1 Punti di biforcazione

Consideriamo una mappa continua

$$F : \Lambda \times X \to Y,$$

dove Λ - lo spazio dei parametri - è uno spazio topologico, e X, Y sono spazi di Banach reali. Supponiamo che $F(\lambda, 0) = 0$ per ogni $\lambda \in \Lambda$.

1.1 DEFINIZIONE. *Un punto* $\lambda_0 \in \Lambda$ *si dice* di biforcazione *se per ogni* U *intorno di* $(\lambda_0, 0)$ *in* $\Lambda \times X$ *esiste* $(\lambda, x) \in U$ *con* $x \neq 0$ *tale che* $F(\lambda, x) = 0$.

In altre parole, i λ_0 di biforcazione sono i valori del parametro per cui dall'insieme di soluzioni banali $(\lambda, 0)$ si biforca un insieme di soluzioni non banali. Per definizione, i punti di biforcazione costituiscono un sottoinsieme chiuso di Λ.

Abbiamo già incontrato questo concetto nella sezione I.2.1, studiando l'inviluppo di famiglie di curve, e negli Esercizi 2.9, 2.10 e 2.11 della sezione I.2.3, studiano l'esistenza di soluzioni piccole per il problema di Dirichlet con parametro

$$\begin{cases} u''(x) + \lambda u + g(u) = 0, \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases}$$

Il seguente risultato stabilisce una condizione *necesssaria* affinché il punto λ_0 sia di biforcazione.

1.2 Proposizione. *Supponiamo che la mappa F sia continua, differenziabile rispetto ad x, e che la mappa $D_x F : \Lambda \times X \to L(X, Y)$ sia continua. Se $F(\lambda, 0) = 0$ per ogni $\lambda \in \Lambda$ e $\lambda_0 \in \Lambda$ è di biforcazione, allora l'operatore lineare $D_x F(\lambda_0, 0)$ non è un inversa destra (in particolare, non è un isomorfismo).*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $D_x F(\lambda_0, 0)$ sia un inversa destra, equivalentemente che $D_x F(\lambda_0, 0)$ sia iniettiva e che la sua immagine Y_1 sia un sottospazio chiuso che ammette un complementare topologico Y_2. Il differenziale rispetto alle ultime due variabili della mappa

$$\tilde{F} : \Lambda \times X \times Y_2 \to Y, \quad \tilde{F}(\lambda, x, y_2) = F(\lambda, x) + y_2,$$

risulta un isomorfismo da $X \times Y_2$ su Y. Per il teorema della funzione implicita, esiste un intorno $\tilde{U}$ di $(\lambda_0, 0, 0)$ in $\Lambda \times X \times Y_2$ dove l'insieme delle soluzioni dell'equazione $F(\lambda, x, y_2) = 0$ è il grafico di una mappa definita in un intorno di λ_0 in Λ a valori in $X \times Y_2$. Dato che $F(\lambda, 0) = 0$ per ogni $\lambda \in \Lambda$, tale mappa è la mappa identicamente nulla, e la mappa $\tilde{F}$ non ha altri zeri in $\tilde{U}$. Dato che se (λ, x) è uno zero di F allora $(\lambda, x, 0)$ è uno zero di $\tilde{F}$, deduciamo che la mappa F non ha zeri nell'intorno di $(\lambda_0, 0)$, $\left\{(\lambda, x) \mid (\lambda, x, 0) \in \tilde{U}\right\}$, diversi da $(\lambda, 0)$. Pertanto λ_0 non è di biforcazione. $\square$

Questa condizione non è in generale sufficiente affinchè λ_0 sia di biforcazione. Consideriamo ad esempio la mappa

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad F(\lambda, x, y) = \begin{pmatrix} \lambda x - y^3 \\ \lambda y + x^3 \end{pmatrix}.$$

Dato che

$$D_{(x,y)} F(\lambda, 0, 0) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

il candidato ad essere punto di biforcazione è $\lambda_0 = 0$. D'altra parte se $F(\lambda, x, y) = 0$, ossia

$$\begin{cases} \lambda x - y^3 = 0, \\ \lambda y + x^3 = 0, \end{cases}$$

moltiplicando la prima equazione per y, la seconda per x, e sottraendo la prima dalla seconda otteniamo

$$x^4 + y^4 = 0,$$

per cui $(x, y) = (0, 0)$ è l'unico zero di $F(\lambda, \cdot, \cdot)$, e non esistono punti di biforcazione.

Il caso lineare. È istruttivo considerare il caso dell'applicazione lineare

$$F : \mathbb{R} \times X \to X, \quad F(\lambda, x) = \lambda x - Tx,$$

dove è un operatore lineare e continuo su X. La condizione necessaria della Proposizione 1.2 richiede che $\lambda_0 I - T$ non sia un inversa destra. Se X ha dimensione finita, questo è equivalente a chiedere che $\lambda_0 I - T$ non sia un isomorfismo, ossia che λ_0 sia un autovalore di T. D'altra parte, gli autovalori di T sono sicuramente punti di biforcazione.

Se lo spazio di Banach X ha dimensione infinita, la condizione necessaria individua una parte dello spettro di T. È facile verificare che λ_0 è di biforcazione se e solamente se appartiene alla chiusura dell'insieme degli autovalori di T. La chiusura dell'insieme degli autovalori di T è in generale strettamente contenuta nello spettro di T, e addirittura strettamente contenuta nell'insieme dei λ per cui $\lambda I - T$ non è un inversa destra. Ad esempio, l'operatore di Volterra

$$T \in L(C^0([0,1])), \quad Tu(x) = \int_0^x u(t)\, dt,$$

non ha autovalori, il suo spettro consiste del solo punto 0, e T non è un inversa destra non avendo immagine chiusa, pur essendo iniettivo.

1.2 Riduzione di Lyapunov-Schmidt

Consideriamo una mappa continua $F : \Lambda \times X \to Y$, tale che $D_x F$ sia continua e $F(\lambda, 0) = 0$ per ogni λ. Sia λ_0 un candidato punto di biforcazione tale che:

(i) $X_1 = \ker D_x F(\lambda_0, 0)$ è non zero e complementato in X;

(ii) $Y_1 = \operatorname{Im} D_x F(\lambda_0, 0)$ è chiuso e complementato in Y.

Siano X_2 e Y_2 complementari topologici di X_1 e Y_1, rispettivamente. Nella maggior parte delle applicazioni, $D_x F(\lambda_0, 0)$ è un operatore di Fredholm, quindi tanto X_1 quanto Y_2 hanno dimensione finita.

Sia Q il proiettore su Y_2 di nucleo Y_1. Scrivendo gli elementi di X come (x_1, x_2) con $x_1 \in X_1$ e $x_2 \in X_2$, l'equazione $F(\lambda, x) = 0$ è equivalente al sistema

$$\begin{cases} QF(\lambda, x_1, x_2) = 0, \\ (I - Q)F(\lambda, x_1, x_2) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Il differenziale rispetto alla variabile x_2 della mappa $(I - Q)F : \Lambda \times X_1 \times X_2 \to Y_1$ nel punto $(\lambda_0, 0, 0)$ è la restrizione a X_2 di $(I - Q)D_x F(\lambda_0, 0)$, che è un isomorfismo da X_2 su Y_1. Per il teorema della funzione implicita esistono un intorno U di $(\lambda_0, 0)$ in $\Lambda \times X_1$, un intorno V di 0 in X_2 ed una mappa continua $u : U \to X_2$ tali che l'insieme delle soluzioni di $(I - Q)F(\lambda, x_1, x_2) = 0$ in $U \times V$ è della forma

$$\{(\lambda, x_1, u(\lambda, x_1)) \mid (\lambda, x_1) \in U\}. \tag{2}$$

Quindi il sistema (1) è equivalente al sistema

$$QF(\lambda, x_1, u(\lambda, x_1)) = 0, \tag{3}$$

che prende il nome di *equazione di biforcazione*. Il numero di equazioni di questo sistema è pari alla dimensione di Y_2. Se $DF_x(\lambda_0, 0)$ è un operatore di Fredholm, si tratta di un sistema con un numero finito di equazioni ed un numero finito di incognite (oltre al parametro λ). Se l'indice di Fredholm è zero, si hanno tante equazioni quante incognite, e ci si aspetta che l'insieme delle soluzioni abbia dimensione pari allo spazio dei parametri.

Se $Y_1 = Y$, l'equazione di biforcazione è banale e l'insieme (2) è l'insieme delle soluzioni di $F(\lambda, x) = 0$ in un intorno di $(\lambda_0, 0)$. Il primo caso non banale si ha quando Y_1 ha codimensione 1. In questo caso, se y^* è un elemento del duale di Y il cui nucleo sia Y_1, risolvere l'equazione di biforcazione (3) significa trovare gli zeri della funzione reale

$$f(\lambda, x_1) = \langle y^*, F(\lambda, x_1, u(\lambda, x_1))\rangle,$$

in un intorno di $(\lambda_0, 0) \in \Lambda \times X_1$. Si noti che 0 è un punto critico per la funzione $f(\lambda_0, \cdot)$. Se inoltre lo spazio dei parametri Λ è una varietà, il fatto che f sia identicamente nulla su $\Lambda \times \{0\}$ ci dice che $(\lambda_0, 0)$ è un punto critico per f. Il caso più semplice in cui si riesce a descrivere un insieme di livello di una funzione reale nell'intorno di un punto critico si ha quando la matrice hessiana della funzione è invertibile: la descrizione è fornita dal lemma di Morse, oggetto del prossimo paragrafo.

1.3 Osservazione. *Se Λ è una varietà e F è di classe C^k, anche la mappa u risulta di classe C^k, e quindi i coefficienti dell'equazione di biforcazione (3) sono di classe C^k.*

1.3 Il lemma di Morse

Indichiamo con $\nabla^2 f$ la matrice hessiana di una funzione di n variabili. Il lemma di Morse dice che se in un punto critico x_0 di f la matrice hessiana è invertibile, esiste un sistema di coordinate in cui f è la forma quadratica definita da $\nabla^2 f(x_0)$, più costante.

1.4 Teorema. (Lemma di Morse) *Sia Ω un intorno di 0 in $\mathbb{R}^n$, e sia $f \in C^{k+2}(\Omega)$, $k \geq 1$, una funzione tale che $Df(0) = 0$ e $\nabla^2 f(0)$ sia invertibile. Allora esiste un diffeomorfismo C^k $\varphi : U \to \varphi(U)$ di un intorno di 0 tale che $\varphi(0) = 0$, $D\varphi(0) = I$, e*

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{2}\nabla^2 f(0)\varphi(x) \cdot \varphi(x). \tag{4}$$

Dimostrazione. Cerchiamo il diffeomorfismo φ della forma

$$\varphi(x) = \Phi(x)x,$$

dove Φ prende valori nello spazio $L(\mathbb{R}^n)$ delle matrici reali $n \times n$. Allora l'equazione (4) è equivalente a

$$f(x) - f(0) = \frac{1}{2}\Phi(x)^* \nabla^2 f(0)\Phi(x)x \cdot x.$$

D'altra parte

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx)\, dt = \int_0^1 (1-t)\frac{d^2}{dt^2} f(tx)\, dt = \left(\int_0^1 (1-t)\nabla^2 f(tx)\, dt\right) x \cdot x,$$

dove abbiamo integrato per parti. L'espressione

$$\Psi(x) = \int_0^1 (1-t)\nabla^2 f(tx)\, dt$$

definisce una mappa di classe C^k da un intorno convesso $V \subset \Omega$ di 0 a valori in $L_s(\mathbb{R}^n)$, lo spazio delle matrici simmetriche reali $n \times n$. Stiamo quindi cercando una mappa Φ a valori in $L(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$\Phi(x)^* \nabla^2 f(0)\Phi(x) - 2\Psi(x) = 0. \tag{5}$$

Una tale mappa può essere trovata facilmente grazie al teorema della funzione implicita. Consideriamo infatti la mappa

$$F : V \times L(\mathbb{R}^n) \to L_s(\mathbb{R}^n), \quad F(x, A) = A^* \nabla^2 f(0)A - 2\Psi(x).$$

Questa mappa è di classe C^k (poichè tale è Ψ), e

$$F(0, I) = \nabla^2 f(0) - 2\Psi(0) = \left(1 - 2\int_0^1 (1-t)\, dt\right) \nabla^2 f(0) = 0.$$

Inoltre

$$D_2 F(0, I)H = H^* \nabla^2 f(0) + \nabla^2 f(0)H$$

è surgettiva da $L(\mathbb{R}^n)$ su $L_s(\mathbb{R}^n)$: se $S \in L_s(\mathbb{R}^n)$, la matrice $H = (1/2)\nabla^2 f(0)^{-1} S$ risolve $D_2 F(0, I)H = S$. Per il teorema della funzione implicita esiste quindi un intorno $W \subset V$ di 0 ed una mappa $\Phi \in C^k(W, L(\mathbb{R}^n))$ tale che $\Phi(0) = I$ e vale (5) per ogni $x \in W$. La mappa $\varphi(x) = \Phi(x)x$ ha differenziale I in 0, ed è dunque un diffeomorfismo C^k in un intorno $U \subset W$ di 0, che verifica le proprietà richieste. $\square$

1.5 Osservazione. *Sia k l'indice di Morse del punto critico 0, cioè il numero di autovalori negativi di $\nabla^2 f(0)$. Allora esiste una matrice $T \in GL(\mathbb{R}^n)$ tale che*

$$T^* \nabla^2 f(0) T = G := \begin{pmatrix} -I_k & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix},$$

nella decomposizione $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. Allora il diffeomorfismo $\psi = T^{-1}\varphi$ è tale che

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{2} G\psi(x) \cdot \psi(x) = f(0) - \frac{1}{2}|\psi_1(x)|^2 + \frac{1}{2}|\psi_2(x)|^2,$$

dove (ψ_1, ψ_2) sono le componenti di ψ nella decomposizione $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$.

1.6 Osservazione. *Il lemma di Morse vale con minori ipotesi di regolarità: è sufficiente supporre che f sia di classe C^{k+1}, $k \geq 1$, per ottenere un diffeomorfismo φ di classe C^k. Tale risultato vale anche per funzioni definite su spazi di Hilbert. Se $\nabla^2 f(0)$ non è invertibile, ma è comunque Fredholm, è possibile dimostrare un lemma di Morse generalizzato. Per queste estensioni si veda [Cha93], Teorema I.5.1.*

Come anticipato, il lemma di Morse permette di descrivere il luogo di zeri di una funzione vicino ad un punto critico. Sia infatti f una funzione C^{k+2} in un intorno di $0 \in \mathbb{R}^n$, tale che $f(0) = 0$, $Df(0) = 0$, e $\nabla^2 f(0)$ invertibile. Se la matrice simmetrica $\nabla^2 f(0)$ è definita, 0 è uno zero isolato di f. Se invece la matrice $\nabla^2 f(0)$ è indefinita, il lemma di Morse e l'Osservazione 1.5 mostrano che l'insieme di zeri di f vicino a 0 è diffeomorfo al cono

$$\left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \mid |x_1| = |x_2|\right\},$$

dove k è l'indice di Morse del punto critico 0. Quindi il luogo di zeri di f vicino a 0 è una iperfuperficie di classe C^k con una singolarità che potremmo dire di *tipo conico*. In particolare, se $n = 2$ tale luogo di zeri è costituito da due curve C^k che si intersecano trasversalmente in 0.

1.4 Biforcazione dall'autovalore semplice

Nel seguito ci occuperemo del problema di biforcazione ad un parametro, cioè del caso in cui Λ sia un intervallo della retta reale. Il seguente teorema afferma che se λ_0 è un autovalore semplice, l'insieme di biforcazione è costituito da una curva regolare trasversa alla retta $\{(\lambda, 0)\}$.

1.7 Teorema. *Siano X, Y spazi di Banach. Sia Ω un intorno di $(\lambda_0, 0)$ in $\mathbb{R} \times X$, sia $F \in C^{k+2}(\Omega, Y)$ tale che:*

(i) $F(\lambda, 0) = 0$ *per ogni* λ;

(ii) $X_1 = \ker D_x F(\lambda_0, 0)$ *ha dimensione 1, e sia ξ un generatore di X_1;*

(iii) $Y_1 = \operatorname{Im} D_x F(\lambda_0, 0)$ *è un sottospazio chiuso di codimensione 1;*

(iv) il vettore $\partial_\lambda D_x F(\lambda, 0)\xi|_{\lambda=\lambda_0}$ non appartiene a Y_1.

Allora esiste un intorno $U \subset \Omega$ di $(\lambda_0, 0)$ ed una curva $\Gamma \subset U$ di classe C^k passante per $(\lambda_0, 0)$ e trasversa alla curva $\mathbb{R} \times \{0\}$ (nel senso che la retta tangente a Γ in $(\lambda_0, 0)$ è distinta dalla retta $\mathbb{R} \times \{0\}$) tale che

$$\overline{\{(\lambda, x) \in U \mid F(\lambda, x) = 0,\ x \neq 0\}} = \Gamma.$$

Dimostrazione. Sia y^* un elemento del duale di Y con nucleo Y_1. Grazie alla riduzione di Lyapunov-Schmidt, dobbiamo studiare gli zeri della funzione C^{k+2} su un intorno di $(\lambda_0, 0)$ in $\mathbb{R}^2$,

$$f(\lambda, s) = \langle y^*, F(\lambda, s\xi, u(\lambda, s\xi))\rangle,$$

dove abbiamo usato le notazione della sezione 1.2 ed il fatto che X_1 è generato dal vettore ξ. Come abbiamo già osservato, $(\lambda_0, 0)$ è un punto critico di f. La matrice hessiana di f in $(\lambda_0, 0)$ è della forma

$$\nabla^2 f(\lambda_0, 0) = \begin{pmatrix} \langle y^*, \partial^2_{\lambda\lambda} F(\lambda_0, 0)\rangle & \langle y^*, \partial_\lambda D_x F(\lambda, 0)\xi|_{\lambda=\lambda_0}\rangle \\ \langle y^*, \partial_\lambda D_x F(\lambda, 0)\xi|_{\lambda=\lambda_0}\rangle & 0 \end{pmatrix}.$$

L'ipotesi (iv) garantisce che gli elementi fuori dalla diagonale sono diversi da zero, quindi $\nabla^2 f(0)$ è invertibile e indefinita. Per il lemma di Morse, il luogo di zeri di f vicino a $(\lambda_0, 0)$ è costituito da due curve di classe C^k che si intersecano trasversalmente in $(\lambda_0, 0)$. Una di queste due curve è il ramo triviale $\{(\lambda, 0)\}$. Se Γ_0 è l'altra curva, la curva Γ di soluzioni che biforcano da $(\lambda_0, 0)$ è data da

$$\Gamma = \{(\lambda, s\xi, u(\lambda, s\xi)) \in \mathbb{R} \times X_1 \times X_2 \mid (\lambda, s) \in \Gamma_0\},$$

ed ha le proprietà richieste. □

Consideriamo nuovamente l'Esercizio I.2.11: trovare i punti di birforcazione λ del problema

$$\begin{cases} u''(x) + \lambda u(x) + g(u(x)) = 0, \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{cases} \tag{6}$$

dove $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, $g(0) = g'(0) = 0$. Se indichiamo con

$$F : \mathbb{R} \times C^2([0, \pi]) \cap C^0_0([0, \pi]) \to C^0([0, \pi]), \quad F(\lambda, u) = u'' + \lambda u + g(u),$$

osserviamo che $D_u F(\lambda, 0)v = v'' + \lambda v$, quindi il Lemma I.2.8 implica che $D_u F(\lambda, 0)$ è un isomorfismo se e solamente se λ non è il quadrato di un intero non nullo. I candidati punti di biforcazione sono dunque i punti k^2, con $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Il nucleo X_1 di $D_u F(k^2, 0)$ è generato dalla funzione $\xi(x) = \sin kx$, l'immagine è il sottospazio chiuso di codimensione 1,

$$Y_1 = \left\{ w \in C^0([0, \pi]) \mid \int_0^\pi w(x) \sin kx \, dx = 0 \right\}.$$

Per poter applicare il Teorema 1.7 resta da verificare l'ipotesi (iv). Questa ipotesi è soddisfatta, in quanto

$$\partial_\lambda D_u F(\lambda, 0)\xi|_{\lambda=k^2} = \partial_\lambda(\xi'' + \lambda\xi)|_{\lambda=k^2} = \xi$$

non appartiene al sottospazio Y_1. Possiamo quindi applicare il Teorema 1.7 e concludere che per ogni $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ esiste una curva $\mu \mapsto (\lambda_\mu, u_\mu)$, $\mu \in (-\epsilon, \epsilon)$, di classe C^k tale che (λ_μ, u_μ) sono soluzioni di (6), $u_0 = 0$, $\lambda_0 = k^2$, $\partial_\mu u_\mu|_{\mu=0} \neq 0$.

1.8 Esercizio. *Supponendo che $g''(0) \neq 0$, determinare se la funzione $\mu \mapsto \lambda_\mu - k^2$ cambia o meno segno in un intorno di 0.*

1.9 Esercizio. *Supponiamo che la mappa $F : \Lambda \times X \to Y$ sia continua, differenziabile rispetto ad x in ogni punto $(\lambda, 0)$, uniformemente rispetto a λ, cioè*

$$F(\lambda, x) - F(\lambda, 0) - D_x F(\lambda, 0)x = o(|x|)$$

per $x \to 0$, uniformemente rispetto a λ. Supponiamo inoltre che la mappa $D_x F : \Lambda \times \{0\} \to L(X, Y)$ sia continua. Dimostrare che se $F(\lambda, 0) = 0$ per ogni $\lambda \in \Lambda$ e $\lambda_0 \in \Lambda$ è di biforcazione, allora l'operatore lineare $D_x F(\lambda_0, 0)$ non è un inversa destra.

1.10 Esercizio. *Sia $\mathcal{F}_0(X, Y)$ l'insieme degli operatori di Fredholm di indice 0 da X in Y, che risulta un aperto di $L(X, Y)$. Posto,*

$$\Sigma = \{A \in \mathcal{F}_0(X, Y) \mid A \textit{ non è un isomorfismo}\} = \bigcup_{h=1}^\infty \Sigma^h,$$
$$\Sigma^h = \{A \in \mathcal{F}_0(X, Y) \mid \dim \ker A = h\},$$

dimostrare i seguenti fatti:

(i) la chiusura di Σ^h *è* $\bigcup_{k\geq h}\Sigma^k$*;*

(ii) Σ^h *è una sottovarietà di codimensione* h^2 *di* $L(X,Y)$*.*

(iii) le ipotesi del Teorema 1.7 sono equivalenti a richiedere che la curva di operatori $\lambda \mapsto D_xF(\lambda,0)$ *interseca* Σ *nell'ipersuperficie* Σ^1*, e che tale intersezione è trasversa.*

In altre parole, Σ è una *ipersuperficie stratificata*, con singolarità di codimensione almeno 3. Sviluppando una teoria della trasversalità per curve che intersecano Σ nella sua parte singolare, è possibile estendere il Teorema 1.7 al caso in cui $D_xF(\lambda_0,0)$ sia Fredholm di indice zero, con nucleo di dimensione arbitraria.

Riferimenti bibliografici

[Cha93] K. C. Chang, *Infinite-dimensional Morse theory and multiple solution problems*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, vol. 6, Birkhäuser, Boston, Mass., 1993.

[Nir70] L. Nirenberg, *Topics in nonlinear functional analysis*, Courant lecture notes, Amer. Math. Soc., New York, 1970.