Teoria del grado in BMO

Alessio Figalli

Indice

1 Varietà compatte senza bordo

Siamo interessati a studiare il grado di mappe $u : X \to Y$, con X e Y $n-$varietà regolari compatte orientate senza bordo e Y connessa. Nel caso classico, se $u \in C^1$ e $y \in Y$ è un valore regolare ($u^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_k\}$, $J_u(x_i)$ non singolare), allora il grado non dipende dal valore regolare y e si ha

$$deg(u, X, Y) = deg(u, X, y) = \sum_i sgn\ det\ J_u(x_i).$$

Per densità si estende poi il grado a mappe C^0.
Proprietà di base:

(i) $deg(u, X, Y) \neq 0 \Rightarrow u$ surgettiva;

(ii) il grado è invariante per deformazioni continue (omotopia).

Una formula integrale per il grado per mappe C^1 è data da

$$deg(u, X, Y) = \frac{\int_X u^\sharp\ \alpha}{\int_Y \alpha},$$

con α $n-$forma regolare su Y con integrale non nullo;
in coordinate locali, se $\alpha = f(y)dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n$,

$$deg(u, X, Y) = \frac{\int_X f(u(x))\ det\ J_u(x)dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n}{\int_Y f(y)dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n}.$$

Se poi X e Y sono varietà Riemanniane,

$$deg(u, X, Y) = \frac{\int_X det\ J_u(x)\, d\sigma_X(x)}{vol(Y)}, \tag{1.1}$$

con $d\sigma_X$ elemento di volume di X e J_u è calcolato usando coordinate geodetiche normali in x e $u(x)$.
Nel caso particolare in cui $X = \partial\Omega$, dove Ω è un dominio limitato regolare di $\mathbb{R}^{n+1}$ e $Y = S^n$, detta $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_{n+1})$ una qualunque estensione C^1 di u dentro Ω a valori in $\mathbb{R}^{n+1}$, c'è un'ulteriore formula integrale per il grado:

$$deg(u, \partial\Omega, S^n) = \frac{1}{|B_1|} \int_\Omega det\ J_{\tilde{u}}(x)\, dx,$$

dove B_1 denota la palla unitaria. Si può vedere che le due formule coincidono usando Gauss-Green e il fatto che $det\ J_{\tilde{u}}$ è una divergenza; infatti, usando il linguaggio delle $k-$forme, ricordando che la $n-$forma di volume su S^n è data da

$$d\sigma_{S^n} = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} x_i d\hat{x}_i, \quad d\hat{x}_i = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \ldots dx_{n+1},$$

si ha, detta $\sigma_{\partial\Omega}$ la $n-$forma di volume di $\partial\Omega$,

$$\begin{aligned}(det\ J_u)\, d\sigma_{\partial\Omega} &= u^\sharp\, (d\sigma_{S^n}) = u^\sharp \left(\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} x_i d\hat{x}_i \right) \\ &= \tilde{u}^\sharp \left(\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} x_i d\hat{x}_i \right) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \tilde{u}_i d\tilde{u}_1 \wedge \ldots \wedge d\tilde{u}_{i-1} \wedge d\tilde{u}_{i+1} \ldots d\tilde{u}_{n+1},\end{aligned}$$

da cui

$$\frac{1}{|S^n|}\int_{\partial\Omega} det\ J_u(x)\, d\sigma_{\partial\Omega}(x) = \frac{1}{|S^n|}\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i-1}\int_{\partial\Omega} \tilde{u}_i d\tilde{u}_1 \wedge \ldots \wedge d\tilde{u}_{i-1} \wedge d\tilde{u}_{i+1} \ldots d\tilde{u}_{n+1}$$
$$= \frac{1}{|S^n|}\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i-1}\int_{\Omega} d\left(\tilde{u}_i d\tilde{u}_1 \wedge \ldots \wedge d\tilde{u}_{i-1} \wedge d\tilde{u}_{i+1} \ldots d\tilde{u}_{n+1}\right)$$
$$= \frac{n+1}{|S^n|}\int_{\Omega} d\tilde{u}_1 \wedge \ldots d\tilde{u}_{n+1} = \frac{1}{|B_1|}\int_{\Omega} det\ J_{\tilde{u}}(x)\, dx.$$

1.1 BMO e VMO

Sia X una $n-$varietà regolare compatta senza bordo dotata di una metrica Riemanniana (come si vedrà la nozione di BMO è indipendente dalla scelta della metrica). Definiamo

$$r_0 = r_0(X) = injrad(X), \quad B_\varepsilon(x) \text{ palla geodetica in } X \text{ di raggio } \varepsilon < r_0.$$

1.1.1 Mappe BMO a valori reali

Data $f \in L^1(X)$ (usando la misura associata alla metrica), definiamo

$$||f||_{BMO} := \sup_{\varepsilon<r_0, x\in X} \fint_{B_\varepsilon(x)} |f(y) - \overline{f}_\varepsilon(x)|\, d\sigma_X(y),$$

dove

$$\overline{f}_\varepsilon(x) := \fint_{B_\varepsilon(x)} f(y)\, d\sigma_X(y);$$

si ha allora $BMO(X,\mathbb{R}) := \{f \in L^1(X) \mid ||f||_{BMO} < +\infty\}$. Questo spazio, quozientato rispetto alle costanti, diventa uno spazio di Banach rispetto alla norma BMO. Poiché

$$\fint_{B_\varepsilon(x)} |f(y) - \overline{f}_\varepsilon(x)|\, d\sigma_X(y) \le \fint_{B_\varepsilon(x)}\fint_{B_\varepsilon(x)} |f(y) - f(z)|\, d\sigma_X(y)\, d\sigma_X(z) =$$
$$\fint_{B_\varepsilon(x)}\fint_{B_\varepsilon(x)} |f(y) - \overline{f}_\varepsilon(x) + \overline{f}_\varepsilon(x) - f(z)|\, d\sigma_X(y)\, d\sigma_X(z) \le 2\fint_{B_\varepsilon(x)} |f(y) - \overline{f}_\varepsilon(x)|\, d\sigma_X(y),$$

$$||f||_* := \sup_{\varepsilon<r_0, x\in X} \fint_{B_\varepsilon(x)}\fint_{B_\varepsilon(x)} |f(y) - f(z)|\, d\sigma_X(y)\, d\sigma_X(z)$$

è una norma equivalente su BMO.
Una prima proprietà utile (che si dimostra facilmente per assurdo) è

Lemma 1.1. *$\exists\ C = C(X)$ tale che*

$$||f||_{L^1} \le C||f||_{BMO} + \left|\int_X f\right|$$

o, equivalentemente,

$$\left|\left| f - \fint_X f \right|\right|_{L^1} \le C||f||_{BMO}.$$

Corollario 1.2. *Sia* $0 < r_1 < r_0$ *e definiamo*

$$||f||_1 = \sup_{\varepsilon < r_1, x \in X} \fint_{B_\varepsilon(x)} |f(y) - \overline{f}_\varepsilon(x)| \, d\sigma_X(y).$$

Allora $||\cdot||_1$ *e* $||\cdot||_{BMO}$ *sono equivalenti.*

Dimostrazione. Ovviamente

$$||f||_1 \leq ||f||_{BMO}.$$

Viceversa, supponendo f a media nulla (cosa lecita dato che le due norme non cambiano), poiché il lemma precedente vale sostituendo $||\cdot||_1$ a $||\cdot||_{BMO}$ (la dimostrazione è identica), per ogni $r_1 \leq \varepsilon < r_0$ si ha

$$\fint_{B_\varepsilon(x)} |f(y) - \overline{f}_\varepsilon(x)| \, d\sigma_X(y) \leq 2 \fint_{B_\varepsilon(x)} |f| \leq \frac{2}{|B_{r_1}(x)|} \int_X |f| \leq C||f||_1.$$

$\square$

Lemma 1.3. *Siano* X *e* Y $n-$*varietà Riemanniane regolari compatte senza bordo,* $\varphi : X \to Y$ *diffeomorfismo* C^1*. Allora*

$$f \in BMO(Y) \Rightarrow f \circ \varphi \in BMO(X)$$

e

$$||f \circ \varphi||_{BMO(X)} \leq C||f||_{BMO(Y)}.$$

Da questo lemma segue che, cambiando metrica, la norma BMO che si ottiene è equivalente alla precedente.

1.1.2 Mappe BMO a valori in varietà

Sia Y una $n-$varietà regolare compatta senza bordo che possiamo supporre *embedded* in $\mathbb{R}^N$. Definiamo allora

$$BMO(X, Y) := \{u \in BMO(X, \mathbb{R}^N) \mid u(x) \in Y \ q.o.\},$$

dove $u \in BMO(X, \mathbb{R}^N)$ se ogni componente è in $BMO(X, \mathbb{R})$. Si può dimostrare che la nozione di $BMO(X, Y)$ non dipende dalla metrica di X né dall'embedding di Y (questo segue da: F Lipschitziana, $u \in BMO \Rightarrow ||F \circ u||_{BMO} \leq 2 \ Lip(F)||u||_{BMO}$). Fissati la metrica Riemanniana su X e un embedding regolare di Y in $\mathbb{R}^N$, $BMO(X, Y)$ è dotata della metrica

$$d(u, v) = ||u - v||_{BMO(X, \mathbb{R}^N)}.$$

Osserviamo che, ovviamente, $C^0(X) \subset BMO(X)$ ($||f||_{BMO} \leq 2||f||_{C^0}$).

1.1.3 Mappe VMO

VMO è la chiusura delle funzioni regolari (o equivalentemente continue) con la norma BMO e viene dotato della norma $||\cdot||_{BMO}$. In questo modo si definisce $VMO(X, \mathbb{R}^N)$ e da questo si ottiene

$$VMO(X, Y) := \{u \in VMO(X, \mathbb{R}^N) \mid u(x) \in Y \ q.o.\}$$

e, come prima, tutto è indipendente dalla metrica di X e dall'embedding di Y. Vale la seguente caratterizzazione di VMO :

Teorema 1.4. *$u \in VMO(X, \mathbb{R}^N) \Leftrightarrow u \in BMO(X, \mathbb{R}^N)$ e*

$$\fint_{B_\varepsilon(x)} |u - \overline{u}_\varepsilon(x)| \stackrel{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \textit{unif. in } x.$$

Notiamo che una delle due implicazioni è banale, mentre la dimostrazione dell'altra è molto più complessa.

Corollario 1.5. *$\exists\ C = C(X)$ tale che*

$$||\overline{u}_\varepsilon||_{BMO} \leq C||u||_{BMO} \quad \forall u \in BMO(X, \mathbb{R}^N).$$

Inoltre, se $u \in VMO(X, \mathbb{R}^N)$,

$$||u - \overline{u}_\varepsilon||_{BMO}, ||u - \overline{u}_\varepsilon||_{L^1} \stackrel{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Osserviamo che, se $u \in C^0(X, Y)$, $x \mapsto \overline{u}_\varepsilon(x)$ mappa X in $\mathbb{R}^N$ ma non in Y, ma comunque, per ε piccolo, è vicina a Y. Grazie al teorema 1.4, vediamo che lo stesso è vero anche in $VMO(X, Y)$:

$$\mathrm{dist}(\overline{u}_\varepsilon(x), Y) \leq \fint_{B_\varepsilon(x)} |u - \overline{u}_\varepsilon(x)| = o(1) \quad \text{unif. in } x,$$

e questa disuguaglianza vale anche nel caso in cui Y sia un qualunque chiuso di $\mathbb{R}^N$. Ciò permette di definire, detto P l'operatore di proiezione di un intorno tubolare di Y in $\mathbb{R}^N$ su Y,

$$u_\varepsilon(x) := P\overline{u}_\varepsilon(x).$$

Corollario 1.6. *Se $u \in VMO(X, Y)$,*

$$||u_\varepsilon - u||_{BMO} \to 0, \quad u_\varepsilon \to u \textit{ q.o.}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} ||u_\varepsilon - u||_{BMO} &\leq ||u_\varepsilon - \overline{u}_\varepsilon||_{BMO} + ||\overline{u}_\varepsilon - u||_{BMO} \\ &\leq 2||u_\varepsilon - \overline{u}_\varepsilon||_{C^0} + ||\overline{u}_\varepsilon - u||_{BMO} \\ &= 2\sup_x\ \mathrm{dist}(\overline{u}_\varepsilon(x), Y) + ||\overline{u}_\varepsilon - u||_{BMO} \to 0. \end{aligned}$$

□

Corollario 1.7. *$u \in VMO(X, Y) \Rightarrow \exists (u_j) \subset C^\infty(X, Y)$ tale che*

$$||u_j - u||_{BMO} \to 0, \quad u_j \to u \textit{ q.o.}$$

Dimostrazione. Poiché $C^\infty(X, Y)$ è denso in $C^0(X, Y)$, la tesi segue dal corollario 1.6. □

1.1.4 Esempi di funzioni BMO e VMO

(i) $C^0(X) \hookrightarrow VMO(X)$ con continuità:

$$||f||_{BMO} \leq 2||f||_{C^0}.$$

(ii) $W^{1,n}(X) \hookrightarrow VMO(X)$ con continuità: per Poincaré (che vale anche su varietà) e per Holder si ha, $\forall \varepsilon < r_0$,

$$\int_{B_\varepsilon(x)} |u - \overline{u}_\varepsilon(x)| \leq C\varepsilon \int_{B_\varepsilon(x)} |\nabla u| \leq C\varepsilon^n \left(\int_{B_\varepsilon(x)} |\nabla u|^n \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow \fint_{B_\varepsilon(x)} |u - \overline{u}_\varepsilon(x)| \leq C \left(\int_{B_\varepsilon(x)} |\nabla u|^n \right)^{\frac{1}{n}},$$

e dunque $W^{1,n}(X) \hookrightarrow BMO(X)$ con continuità. L'immersione in $VMO(X)$ segue allora dalla disuguaglianza sopra e dal teorema 1.4.

(iii) $W^{s,p}(X) \hookrightarrow VMO(X)$ con continuità, dove p è l'esponente critico per le immersioni di Sobolev ($sp = n$, $0 < s < n$ anche non intero):

(a) $s \geq 1$: grazie alle immersioni di Sobolev $W^{s,p}(X) \hookrightarrow W^{1,n}(X)$;

(b) $0 < s < 1$: ricordiamo che

$$W^{s,p}(X) = \left\{ u \;\middle|\; \int_X \int_X \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|\text{dist}(x,y)|^{sp+n}} < +\infty \right\},$$

e nel nostro caso ($sp = n$)

$$W^{s,p}(X) = \left\{ u \;\middle|\; \int_X \int_X \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|\text{dist}(x,y)|^{2n}} < +\infty \right\}.$$

Come prima basta vedere che $W^{s,p}(X) \hookrightarrow BMO(X)$ con continuità ed infatti, per Holder, si ha, $\forall \varepsilon < r_0$,

$$\fint_{B_\varepsilon(x)} \fint_{B_\varepsilon(x)} |u(y) - u(z)| \leq (2\varepsilon)^{\frac{2n}{p}} \fint_{B_\varepsilon(x)} \fint_{B_\varepsilon(x)} \frac{|u(y) - u(z)|}{|\text{dist}(y,z)|^{\frac{2n}{p}}}$$

$$\leq C\varepsilon^{2n\ \frac{1}{p} - 1} \int_{B_\varepsilon(x)} \int_{B_\varepsilon(x)} \frac{|u(y) - u(z)|}{|\text{dist}(y,z)|^{\frac{2n}{p}}} \leq C \left(\int_{B_\varepsilon(x)} \int_{B_\varepsilon(x)} \frac{|u(y) - u(z)|^p}{|\text{dist}(y,z)|^{2n}} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

1.2 Grado per mappe VMO

Siamo interessati a studiare il grado di mappe $u \in VMO(X, Y)$, con X e Y $n-$varietà regolari compatte orientate senza bordo e Y connessa.

Definizione 1.8. *Sia $u \in VMO(X, Y)$. Per ε piccolo ricordiamo che è ben definita $u_\varepsilon(x) := P\overline{u}_\varepsilon(x)$. Si definisce allora*

$$deg(u, X, Y) = deg(u_\varepsilon, X, Y).$$

Questa è una buona definizione: presi ε e ε' piccoli, essendo u_ε e $u_{\varepsilon'}$ continue, sono definiti $deg(u_\varepsilon, X, Y)$ e $deg(u_{\varepsilon'}, X, Y)$ e, considerando l'omotopia

$$[0,1] \ni t \mapsto u_{t\varepsilon+(1-t)\varepsilon'},$$

si vede che sono uguali.
Vedremo inoltre più avanti che $deg(u, X, Y)$ è indipendente dalla scelta della metrica su X e dall'embedding di Y.
Per prima cosa vediamo qualche proprietà del grado in VMO. Avremo bisogno del seguente:

Lemma 1.9. *Sia $u \in VMO(X,Y)$ e supponiamo che, per un certo vettore costante $\xi \in \mathbb{R}^N$,*

$$u(x) + \xi \in Y \quad q.o.$$

Allora

$$deg(u+\xi) = deg(u).$$

Dimostrazione. Ovviamente possiamo supporre $\xi \neq 0$ (altrimenti la tesi è banale) e in questo caso vedremo che entrambi i gradi sono 0. Possiamo inoltre supporre, senza perdita di generalità, che si abbia $\xi = (\xi_1, 0, \dots, 0)$, con $\xi_1 > 0$, e inoltre che $0 \in Y$ e che $y_1 \leq 0 \ \forall y \in Y$. Allora

$$u_1(x) \leq -\xi_1 \quad q.o. \ x \in X,$$

e di consequenza, per $\varepsilon < r_0$, la prima componente di $\overline{u}_\varepsilon(x)$ è $\leq -\xi_1$, da cui, per ε piccolo, la prima componente di $P\overline{u}_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(x)$ è $\leq -\frac{\xi_1}{2}$. Allora l'immagine di u_ε non ricopre Y e quindi $0 = deg(u_\varepsilon) = deg(u)$.
Scambiando i ruoli di u e $u+\xi$ concludiamo che $deg(u+\xi) = 0$. □

Possiamo ora dimostrare la prima importante proprietà del grado:

Teorema 1.10 (stabilità per perturbazioni in VMO)**.** *Sia $u \in VMO(X,Y)$. Allora esiste $\delta > 0$ (dipendente da u) tale che*

$$v \in VMO(X,Y), \ d(u,v) < \delta \Rightarrow deg(v) = deg(u).$$

Dimostrazione. Per assurdo, esiste una succesione (v_j) tale che

$$||v_j - u||_{BMO} \to 0 \ \text{ e } \ |deg(v_j) - deg(u)| \geq 1.$$

Grazie alla compattezza di (v_j) in VMO non è difficile dimostrare che

$$\sup_{x\in X} ⨍_{B_\varepsilon(x)} |v_j(y) - \overline{v}_{j,\varepsilon}(x)| = o(1) \quad \text{unif. in } j \text{ e in } x \in X,$$

da cui

$$\text{dist}(\overline{v}_{j,\varepsilon}(x), Y) \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \text{unif. in } j \text{ e in } x \in X.$$

Esiste allora $\varepsilon_0 > 0$ tale che, per $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, è ben definita per ogni j

$$v_{j,\varepsilon} = P\overline{v}_{j,\varepsilon},$$

e si ha, per definizione,

$$deg(v_j) = deg(v_{j,\varepsilon}) \quad \forall j, \ \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0. \tag{1.2}$$

Definiamo

$$\xi_j := \fint_X (v_j - u),$$

e, a meno di passare ad una sottosuccessione, supponiamo $\xi_j \to \xi$ (ricordiamo che Y è limitata); allora, per il lemma 1.1,

$$\int_X |v_j - u - \xi_j| \leq C||v_j - u||_{BMO} \to 0 \Rightarrow ||v_j - (u+\xi)||_{L^1} \to 0,\ v_j \to u + \xi \ q.o.$$

Allora $u + \xi \in Y$ q.o. e inoltre, a ε fissato,

$$\overline{v}_{j,\varepsilon} \to \overline{u}_\varepsilon + \xi \ \text{ unif. per } j \to +\infty \Rightarrow v_{j,\varepsilon} \to (u+\xi)_\varepsilon \ \text{ unif. per } j \to +\infty,$$

da cui, per j grande, grazie alla (1.2) e al lemma 1.9,

$$deg(v_{j,\varepsilon}) = deg((u+\xi)_\varepsilon) \Rightarrow deg(v_j) = deg(u+\xi) = deg(u),$$

il che è assurdo. □

Corollario 1.11 (Invarianza per omotopia)**.** *Sia $t \mapsto H_t(\cdot) \in VMO(X,Y)$ una famiglia a un parametro continua rispetto alla topologia BMO. Allora*

$$deg(H_t) \quad \textit{è indipendente da } t.$$

Corollario 1.12. *$deg(u,X,Y)$ è indipendente dalla scelta della metrica Riemanniana su X e dall'embedding di Y.*

Dimostrazione. Sia $d = deg(u)$ rispetto ad una certa metrica e ad un certo embedding. Supponiamo poi di avere un'altra metrica su X e un altro embedding regolare in un qualche $\mathbb{R}^D$. Si ottiene allora un'altra famiglia $\tilde{u}_\varepsilon$ di funzioni da X in Y alle quali corrisponde un grado $\tilde{d}$. Per il corollario 1.6 $\tilde{u}_\varepsilon \to u$ in $BMO(X,Y)$ e dunque, per il teorema appena dimostrato, $\tilde{d} = d$. □

Commenti:

(i) **Definizione di grado:** abbiamo definito il grado di u come $deg(u) = deg(u_\varepsilon)$, dove u_ε sono funzioni continue opportunamente costruite in modo che $u_\varepsilon \to u$ in $BMO(X,Y)$. Il teorema sopra ci dice allora che, in verità, per definire il grado, avremmo potuto scegliere una qualunque famiglia di funzioni continue convergente a u in BMO.

(ii) **Non esistenza del grado in L^p:** la convergenza in BMO è più debole di quella uniforme ma più forte di quella in L^p $\forall p < \infty$. Si può vedere come il grado non si conservi per perturbazioni piccole in L^p :

$$u_j : S^1 \to S^1, \quad u_j(\theta) = e^{i\varphi_j(\theta)},$$

$$\varphi_j(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{su } \left(0, 2\pi - \frac{1}{j}\right) \\ \text{lineare da 0 a } 2\pi & \text{su } \left[2\pi - \frac{1}{j}, 2\pi\right] \end{cases},$$

$$u_j \xrightarrow{L^p} 0, \quad deg(u_j) = 1, \quad deg(0) = 0.$$

(iii) **Non uniformità della stabilità del grado:** quando si lavora con la norma C^0, esiste un $\delta > 0$ uniforme tale che

$$||u - v||_{C^0} < \delta \Rightarrow deg(u, X, Y) = deg(v, X, Y)$$

(basta infatti considerare l'omotopia $t \mapsto P(tu + (1-t)v)$). Invece, nel teorema 1.10, il δ dipende effettivamente da u. Si può infatti dimostrare che, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, esistono due mappe $u, v : S^1 \to S^1$ tali che

$$||u - v||_{H^{\frac{1}{2}}} < \varepsilon, \quad deg(u) = 0, \quad deg(v) = k.$$

(iv) **Possibili estensioni:** abbiamo definito il grado solo per $u \in VMO$; in verità è possibile definire il grado anche per alcune mappe in BMO : $\exists \delta > 0$ tale che, se

$$\text{dist}(u, VMO(X, Y)) := \inf_{v \in VMO} d(u, v) < \delta,$$

è ben definito $deg(u)$. Osserviamo che la distanza d, e quindi δ, dipendono dalla scelta della metrica Riemanniana su X e dall'embedding di Y.

1.3 Proprietà del grado in VMO

In questa sezione considereremo sempre mappe in VMO.
Proprietà 1. Se $deg(u) \neq 0$, allora

$$ess\ R(u) = Y,$$

dove $ess\ R(u)$ è il più piccolo chiuso Σ in Y tale che $u(x) \in \Sigma$ q.o.
($\Sigma = \cap_{\alpha \in \Lambda} \Sigma_\alpha = \cap_{j \in \mathbb{N}} \Sigma_{\alpha_j}$ per certi α_j, dove $(\Sigma_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ è la famiglia di tutti i chiusi in Y tali che $u(x) \in \Sigma_\alpha$ q.o.).

Dimostrazione. Per assurdo, $\exists y_0 \in Y \setminus ess\ R(u) \Rightarrow \exists r > 0$ tale che

$$ess\ R(u) \cap B_r(y_0) = \emptyset.$$

Sia $\Sigma = Y \setminus B_r(y_0)$; allora $u(x) \in \Sigma$ q.o. Poiché $u \in VMO$,

$$\fint_{B_\varepsilon(x)} |u - \overline{u}_\varepsilon(x)| \to 0 \text{ unif. in } x \Rightarrow \text{dist}(\overline{u}_\varepsilon(x), \Sigma) \to 0 \text{ unif. in } x \Rightarrow$$

$$\text{dist}(u_\varepsilon(x), \Sigma) \to 0 \text{ unif. in } x \Rightarrow deg(u) = deg(u_\varepsilon) = 0 \text{ per } \varepsilon \text{ piccolo,}$$

il che è assurdo. ☐

Proprietà 2. (Hopf) Se $u, v \in VMO(S^n, S^n)$ e $deg(u) = deg(v)$, allora le due mappe sono omotope in $VMO(S^n, S^n)$.

Dimostrazione. Per costruzione $deg(u_\varepsilon) = deg(u) = deg(v) = deg(v_\varepsilon) \Rightarrow u_\varepsilon$ e v_ε sono omotope in $C^0(S^n, S^n)$, e quindi in $VMO(S^n, S^n)$. D'altra parte

$$t \mapsto u_{t\varepsilon}, \quad t \mapsto v_{t\varepsilon}$$

sono omotopie tra u e u_ε e tra v e v_ε. ☐

Proprietà 3. (Borsuk) Siano $U, V \subset \mathbb{R}^n$ due aperti limitati simmetrici rispetto all'origine con ∂U e ∂V regolari e connessi. Allora, se $u \in VMO(\partial U, \partial V)$ è una mappa dispari, $deg(u)$ è dispari.

Dimostrazione. Basta applicare il teorema di Borsuk a u_ε che è una mappa dispari. □

Proprietà 4. Sia $u \in W^{1,n}(X, Y)$. Allora,

$$deg(u) \int_Y \alpha = \int_X u^\sharp \alpha$$

per ogni α $n-$forma regolare su Y.

Dimostrazione. Come è noto $C^\infty(X, Y)$ è denso in $W^{1,n}(X, Y)$, e quindi esiste $(u_j) \subset C^\infty(X, Y)$ tale che

$$||u_j - u||_{W^{1,n}} \to 0,$$

da cui, grazie all'esempio (ii) nel paragrafo 1.1.4,

$$||u_j - u||_{BMO} \to 0.$$

Allora

$$\int_X u_j^\sharp \alpha \to \int_X u^\sharp \alpha$$

e

$$deg(u_j) = deg(u) \text{ per } j \text{ grande.}$$

□

Proprietà 5. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio limitato con bordo connesso regolare. Sia poi $u \in W^{1,n}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e si supponga che $u|_{\partial\Omega}$ sia a valori in S^{n-1} (da intendersi nel senso delle tracce). Allora

$$deg(u|_{\partial\Omega}, \partial\Omega, S^{n-1}) = \frac{1}{|B_1|} \int_\Omega det\ J_u$$

(si noti che il membro di sinistra ha senso perché $u|_{\partial\Omega} \in W^{1-\frac{1}{n},n}(\partial\Omega) \subset VMO(\partial\Omega)$ grazie all'esempio (iii) nel paragrafo 1.1.4).

Dimostrazione. Essendo la formula nota nel caso di mappe regolari (si veda l'inizio del primo capitolo per la dimostrazione nel caso C^1 usando le formule integrali per il grado), la dimostrazione è, come ci si aspetta, per approssimazione e si basa sul seguente:

Lemma 1.13. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio con bordo connesso regolare, Y una varietà compatta senza bordo embedded in maniera regolare in $\mathbb{R}^N$ e $u \in W^{1,n}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tale che $u(\partial\Omega) \subset Y$. Allora $\exists (u_j) \subset C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tale che*

$$u_j(\partial\Omega) \subset Y \quad \forall j, \quad u_j \xrightarrow{W^{1,n}} u.$$

Allora $u_j|_{\partial\Omega} \to u|_{\partial\Omega}$ in $W^{1-\frac{1}{n},n}(\partial\Omega)$ e quindi in BMO, da cui

$$deg(u|_{\partial\Omega}, \partial\Omega, S^{n-1}) = deg(u_j|_{\partial\Omega}, \partial\Omega, S^{n-1})$$

per j abbastanza grande; la tesi segue allora osservando che

$$\frac{1}{|B_1|} \int_\Omega det\ J_{u_j} \to \frac{1}{|B_1|} \int_\Omega det\ J_u.$$

□

Corollario 1.14. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un dominio limitato con bordo connesso regolare,*

$$u \in W^{1,n}(\Omega, S^{n-1}) \Rightarrow deg(u|_{\partial\Omega}, \partial\Omega, S^{n-1}) = 0.$$

Vogliamo ora usare il corollario per dimostrare il seguente risultato più forte:

Teorema 1.15. *Siano $\Omega, Z \subset \mathbb{R}^n$ domini limitati con $\partial\Omega$ e ∂Z connessi regolari, $u \in W^{1,n}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ tale che*

$$u(\partial\Omega) \subset \partial Z, \quad deg(u|_{\partial\Omega}, \partial\Omega, \partial Z) \neq 0.$$

Allora

$$ess\ R(u) \supset \overline{Z}.$$

Dimostrazione. Essendo $ess\ R(u)$ chiuso basta dimostrare che $ess\ R(u) \supset Z$. Per assurdo, esiste $z_0 \in Z \setminus ess\ R(u)$. Allora $\exists r > 0$ tale che

$$\overline{B}_r(z_0) \subset Z, \quad ess\ R(u) \cap \overline{B}_r(z_0) = \emptyset.$$

Sia P la proiezione sul punto di minima distanza in $\overline{B}_r(z_0)$ e poniamo $v = P \circ u$. Allora $v \in W^{1,n}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e $v(\Omega) \subset \partial B_r(z_0)$, da cui, per il corollario sopra,

$$deg(v|_{\partial\Omega}, \partial\Omega, \partial B_r(z_0)) = 0.$$

Per concludere basta dimostrare che

$$deg(u|_{\partial\Omega}, \partial\Omega, \partial Z) = deg(v|_{\partial\Omega}, \partial\Omega, \partial B_r(z_0))$$

e, a meno di approssimare u in $W^{1,n}$ con funzioni u_j regolari grazie al lemma 1.13 e v con $v_j = P \circ u_j$, possiamo supporre u regolare. Allora, in questo caso, sono note le identità

$$deg(u|_{\partial\Omega}, \partial\Omega, \partial Z) = deg(u, \Omega, z_0),$$

$$deg(v|_{\partial\Omega}, \partial\Omega, \partial B_r(z_0)) = deg(v, \Omega, z_0),$$

e dunque, grazie all'omotopia

$$H_t(x) = tu(x) + (1-t)v(x),$$

si ottiene l'uguaglianza dei gradi di u e v $\square$

Osservazione: l'assunzione $u \in W^{1,n}$ è ottimale e non è possibile rimpiazzarla con $u \in W^{1,p}$ con $p < n :$ per $n \geq 2$, $\Omega = B_1(0)$, consideriamo $u(x) = \frac{x}{|x|}$; allora $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)\ \forall p < n$, $u|_{\partial\Omega} = id$ (e quindi $deg(u|_{\partial\Omega}, S^{n-1}, S^{n-1}) = 1$), ma $ess\ R(u) = S^{n-1}$.

Osservazione: ci si potrebbe chiedere se la condizione $u \in W^{1,n}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ possa essere rimpiazzata con $u \in VMO(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Il problema è che in generale le mappe in $VMO(\Omega)$ non ammettono traccia al bordo. Bisogna allora considerare una sottoclasse speciale di $VMO(\Omega)$ che consiste delle funzioni che ammettono traccia in $VMO(\partial\Omega)$ (classe che include $W^{1,n}(\Omega)$).

Topologia di BMO e VMO: è possibile studiare mappe BMO e VMO da X (compatta) in Y (compatta) anche se le loro dimensioni sono diverse (per esempio mappe da S^n a S^k). Come le mappe continue da X a Y si dividono in maniera naturale nelle loro componenti connesse, lo stesso accade in VMO. Esistono due diverse nozioni di omotopia in VMO :

(a) $u, v \in VMO(X,Y)$ sono omotope in $VMO \cap L^1$ se esiste $H \in C^0([0,1], VMO \cap L^1(X,Y))$ tale che $H(0) = u$, $H(1) = v$;

(b) $u, v \in VMO(X,Y)$ sono omotope in VMO se esiste $H \in C^0([0,1], VMO(X,Y))$ tale che $H(0) = u$, $H(1) = v$.

Ovviamente la prima definizione è più forte della seconda e, in generale, è *strettamente più forte*. Però le due nozioni sono *equivalenti* nel caso speciale $Y = S^k$, $k \geq 1$.
Le classi di omotopia di $VMO(X,Y)$ rispetto alla prima definizione sono in corrispondenza biunivoca con le classi di omotopia $\mathcal{C}_i$ di $C^0(X,Y)$ (esse sono semplicemente la chiusura delle componenti $\mathcal{C}_i$ in $VMO \cap L^1$).
Invece, gli spazi $L^p(X,Y)$ e $BMO(X,Y)$ sono connessi per archi; per dimostrarlo basta considerare il caso $p = \infty$. Diamo un'idea della dimostrazione:

(i) dette $PC(X,Y)$ le funzioni che prendono solo un numero finito di valori in Y, queste sono dense nella norma di L^∞ : per ogni $f : X \to Y$ esiste $g \in PC(X,Y)$ tale che $||f - g||_\infty < \varepsilon$;

(ii) $[0,1] \ni t \mapsto tf(x) + (1-t)g(x)$ dista al più ε da Y, e dunque
$$[0,1] \ni t \mapsto h_t(x) = P(tf(x) + (1-t)g(x)) \in Y$$
connette in maniera continua f a g in $L^\infty(X,Y)$;

(iii) date $g_0, g_1 \in PC(X,Y)$, con
$$g_0 = \sum a_i \chi_{\Omega_i}, \quad g_0 = \sum b_i \chi_{\Omega_i}, \quad a_i, b_i \in Y,$$
detto $\gamma_i : [0,1] \to Y$ un arco che collega a_i con b_i,
$$[0,1] \ni t \mapsto g_t = \sum \gamma_i(t) \chi_{\Omega_i} \in Y$$
connette in maniera continua g_0 a g_1 in $L^\infty(X,Y)$.

1.4 Lifting di mappe BMO

Siamo interessati al sollevamento di mappe da X, $n-$varietà compatta connessa senza bordo, in S^1.

Teorema 1.16. *$u \in VMO(X, S^1)$ è omotopa in $VMO(X, S^1)$ a una costante sse può essere scritta in modo unico come*
$$u = e^{i\varphi} \text{ con } \varphi \in VMO(X, \mathbb{R}),\ 0 \leq \fint_X \varphi < 2\pi. \tag{1.3}$$
Inoltre la mappa $u \mapsto \varphi$ è continua da $VMO \cap L^1$ (risp. VMO) in $VMO \cap L^1$ (risp. VMO).

Dimostrazione. Un'implicazione è ovvia (se $u = e^{i\varphi}$, l'omotopia è data da $t \mapsto e^{it\varphi}$). Per quanto riguarda il viceversa si ragiona nel modo seguente:
Esistenza:

(i) si approssima u con u_ε (costruite nel solito modo partendo dalle medie $\overline{u}_\varepsilon$ e proiettando su S^1);

(ii) si sollevano le u_ε come $u_\varepsilon = e^{i\varphi_\varepsilon}$ e si deducono stime sulla norma BMO delle φ_ε in funzione di quella delle u_ε che siano uniformi in ε;

(iii) l'esistenza della φ segue osservando che, poiché $\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} e^{i\varphi_\varepsilon}$ esiste ed è uguale a $u(x)$ per ogni x punto di Lebesgue di u, essendo $\varepsilon \mapsto \varphi_\varepsilon(x)$ continua per $\varepsilon > 0$, in tali punti esiste $\lim_{\varepsilon\to 0} \varphi_\varepsilon(x) =: \varphi(x)$;

(iv) le stime trovate al punto (ii) permettono di dimostrare che $\varphi \in VMO$.

Unicità: date φ_1 e φ_2 soluzioni di (1.3), si ha che

$$\eta = \frac{1}{2\pi}(\varphi_1 - \varphi_2) \in \mathbb{Z} \quad q.o.;$$

ma, poiché $\eta \in VMO$, $ess\ R(\eta)$ è connesso (se per assurdo fosse unione di due chiusi disgiunti si troverebbe che anche l'immagine di η_ε sarebbe sconnessa per ε abbastanza piccolo ma questo è assurdo perché η_ε è continua e X è connessa); dunque η è costante e, per la (1.3), $\eta \equiv 0$.
Continuità di $u \mapsto \varphi$: si utilizzano le stime trovate al punto (ii) nella dimostrazione dell'esistenza. □

Osservazione: grazie al teorema sopra e al lemma di Hopf per mappe VMO otteniamo: se $u \in VMO(S^1, S^1)$,

$$deg(u) = 0 \Leftrightarrow u = e^{i\varphi},\ \varphi \in VMO(S^1, \mathbb{R}).$$

Più in generale, considerando $e^{-ik\theta}u(\theta)$ con $k = deg(u)$, si ottiene

$$deg(u) = k \Leftrightarrow u(\theta) = e^{i(k\theta + \varphi(\theta))},\ \varphi \in VMO(S^1, \mathbb{R}).$$

Utilizzando sempre un ragionamento per approssimazione con funzioni continue per le quali i risultati sono già noti, si possono dimostrare i seguenti teoremi:

Teorema 1.17. *Se $\pi_1(X) = 0$, ogni funzione $u \in VMO(X, S^1)$ si può scrivere come*

$$u = e^{i\varphi} \ \text{con}\ \varphi \in VMO(X, \mathbb{R}),\ 0 \le \fint_X \varphi < 2\pi,$$

e dunque è omotopa a una costante in VMO.

Teorema 1.18. *$\exists\delta > 0$, con $\delta = \delta(X)$, tale che, se $||u||_{BMO} \le \delta$, allora*

$$u = e^{i\varphi} \ \text{con}\ \varphi \in VMO(X, \mathbb{R}),\ ||\varphi||_{BMO} \le 4||u||_{BMO},$$

e dunque è omotopa a una costante in VMO.

2 Varietà compatte con bordo

Siamo ora interessati a studiare il grado di mappe $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dominio limitato oppure $\Omega \subset\subset X$, con X $n-$varietà regolare aperta. Nel caso classico, se $p \notin u(\partial\Omega)$, allora è definito il grado di u in p per ogni $u \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e viene denotato con $deg(u, \Omega, p)$.

2.1 BMO e VMO su domini di $\mathbb{R}^n$

Consideriamo ora il caso di $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dominio limitato.

2.1.1 Mappe BMO

Definizione 2.1. *Sia $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Diciamo che $f \in BMO(\Omega)$ se*

$$||f||_{BMO} := \sup_{B\in\mathcal{C}} \fint_B |f - \overline{f}_B| < +\infty, \tag{2.1}$$

dove $\mathcal{C}$ è l'insieme delle palle la cui chiusura è contenuta in Ω e

$$\overline{f}_B = \fint_B f.$$

In questo modo, quozientando rispetto alle costanti, si ottiene, come era nel caso di varietà senza bordo, uno spazio di Banach. A questo punto si dice che $u \in BMO(\Omega, \mathbb{R}^N)$ se tutte le componenti di u sono in $BMO(\Omega)$ o, equivalentemente, se vale la (2.1) con $|\cdot|$ che denota la norma euclidea in $\mathbb{R}^N$. Sempre come nel caso delle varietà senza bordo, la norma BMO è equivalente alla norma

$$||u||_* = \sup_{B\in\mathcal{C}} \fint_B \fint_B |u(y) - u(z)|\, dy\, dz;$$

infatti

$$||u||_{BMO} \leq ||u||_* \leq 2||u||_{BMO}.$$

Definizione 2.2. *Per $0 < k < 1$, sia $\mathcal{C}_k$ l'insieme delle palle $B_r(x) \subset \Omega$ tali che*

$$r \leq k\, dist(x, \partial\Omega).$$

Usando $\mathcal{C}_k$ al posto di $\mathcal{C}$ nella (2.1) si ottiene una norma più piccola

$$||f||_{BMO,k}.$$

Si può dimostrare che se $0 < k_1, k_2 < 1$ le norme

$$||f||_{BMO,k_1} \quad \text{e} \quad ||f||_{BMO,k_2}$$

sono equivalenti; più difficile è far vedere che, in verità, sono equivalenti anche alla norma (2.1) senza alcuna ipotesi di regolarità su $\partial\Omega$ e questa equivalenza vale non solo nel caso della norma euclidea, ma per una qualunque norma in $\mathbb{R}^n$. La seconda definizione è più comoda da usare e perciò da ora prenderemo come norma in BMO quella con $k = \frac{1}{2}$ e, per comodità di notazione, scriveremo

$$||f||_{BMO,\frac{1}{2}} \quad \text{come} \quad ||f||_{BMO} \quad \text{e} \quad \mathcal{C}_{\frac{1}{2}} = \mathcal{C}.$$

Notiamo inoltre che, sempre nella seconda definizione, se si restringe la classe $\mathcal{C}_k$ a tutte le palle $B_r(x) \subset \Omega$ tali che

$$r \leq \min\{k\mathrm{dist}(x, \partial\Omega), r_0\}$$

per un dato $r_0 > 0$, si ottiene una norma più piccola che però, grazie ad un semplice argomento di ricoprimento, si vede essere equivalente a quella originaria (per vedere ciò conviene usare le relazioni con la norma $||\cdot||_*$).

Osservazione: un'altra possibilità per definire la norma BMO consiste nel prendere come $\mathcal{C}$ l'insieme dei cubi con lati paralleli agli assi tali che la chiusura è contenuta in Ω oppure che siano ben contenuti (nel senso della definizione 2.2) in Ω.

2.1.2 Mappe VMO

Definizione 2.3. *$VMO(\Omega)$ è la chiusura di $C^0(\overline{\Omega})$ in $BMO(\Omega)$.*

Ricordiamo ora il seguente:

Lemma 2.4. *Sia $K \subset \Omega$ compatto. Allora esiste una costante C_K tale che*

$$||f - \overline{f}_K||_{L^1(K)} \leq C_K ||f||_{BMO} \quad \forall f \in BMO(\Omega).$$

Dal lemma segue che, se $f \in VMO(\Omega)$, allora esiste una successione $(f_j) \subset C^0(\overline{\Omega})$ convergente a f in $BMO(\Omega)$, in $L^1_{loc}(\Omega)$ e q.o. Vale ora la seguente caratterizzazione di $VMO(\Omega)$ analoga a quella nel caso di varietà senza bordo:

Teorema 2.5. *$f \in VMO(\Omega) \Leftrightarrow f \in BMO(\Omega)$ e*

$$\lim_{\varepsilon\to 0, \varepsilon \leq \frac{1}{2} dist(x,\partial\Omega)} \fint_{B_\varepsilon(x)} |f - \overline{f}_\varepsilon(x)| \to 0 \quad \textit{unif. in } x,$$

nel senso che $\forall \delta > 0\ \exists \varepsilon_0 > 0$ tale che, $\forall x \in \Omega$,

$$\fint_{B_\varepsilon(x)} |f - \overline{f}_\varepsilon(x)| \leq \delta \quad \forall \varepsilon \leq \min\left\{\varepsilon_0, \tfrac{1}{2} dist(x, \partial\Omega)\right\}.$$

Inoltre $\exists (f_j) \subset C^\infty_0(\Omega)$ convergente a f in $BMO(\Omega) \cap L^1_{loc}(\Omega)$.

2.1.3 Esempi di funzioni BMO e VMO

(i) $L^\infty(\Omega) \hookrightarrow BMO(\Omega)$ con continuità:

$$||f||_{BMO} \leq 2||f||_{L^\infty}.$$

(ii) $C^0(\Omega) \hookrightarrow VMO(\Omega)$ con continuità:

$$||f||_{BMO} \leq 2||f||_{C^0}.$$

(iii) $W^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow VMO(\Omega)$ con continuità: per Poincaré e per Holder si ha

$$\fint_B |f - \overline{f}_B(x)| \leq \tilde{C} \left(\int_B |\nabla f|^n \right)^{\frac{1}{n}},$$

e dunque $W^{1,n}(X) \hookrightarrow BMO(X)$ con continuità. L'immersione in $VMO(X)$ segue allora dalla disuguaglianza sopra e dal teorema 2.5.
Osservazione: dal teorema 2.5 si ha che $C_0^\infty(\Omega)$ è denso in $VMO(\Omega)$, mentre ricordiamo che non lo è in $W^{1,n}(\Omega)$ (la chiusura di $C_0^\infty(\Omega)$ nella norma $W^{1,n}$ è $W_0^{1,n}(\Omega)$).

(iv) $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow VMO(\Omega)$ con continuità, dove p è l'esponente critico per le immersioni di Sobolev ($sp = n$, $0 < s < n$ anche non intero): per Holder si ha

$$\fint_B \fint_B |u(y) - u(z)| \leq C \left(\int_B \int_B \frac{|u(y) - u(z)|^p}{|y - z|^{2n}} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

(v) $\log|x| \in BMO(\Omega) \setminus VMO(\Omega)$ $\forall n$ se $0 \in \Omega$.

(vi) $f(x) = \log|\log|x|| \in VMO(\Omega)$ $\forall n$:

(a) $n \geq 2 : |\nabla f| \leq \frac{C}{|x||\log|x||} \Rightarrow f \in W^{1,n}$;

(b) $n = 1$: f è la traccia su $\mathbb{R}$ di $\log|\log|x||$ in $\mathbb{R}^2$ che appartiene a $W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}^2)$, da cui $f \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$, e dunque, grazie all'esempio (iv), f sta in VMO.

(vii) $f(x) = \log|\log|x||^\alpha \in VMO(\Omega)$ $\forall n$ per $0 < \alpha < 1$:

(a) $n > \frac{1}{1-\alpha} : f \in W^{1,n}$;

(b) $n \leq \frac{1}{1-\alpha}$: si fissi $m > \frac{1}{1-\alpha}$ intero; allora $f \in W^{1,m}_{loc}(\mathbb{R}^m)$, da cui la sua traccia su $\mathbb{R}^{m-1}$ appartiene in $W^{1-\frac{1}{m},m}_{loc}(\mathbb{R}^{m-1})$ e, continuando a prendere le tracce, $f \in W^{\frac{n}{m},m}_{loc}(\mathbb{R}^n)$, e dunque, sempre per l'esempio (iv), f sta in VMO.

(viii) In $\mathbb{R}$ si consideri la successione

$$f_j(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq \frac{1}{j^2} \\ -1 - \frac{log|x|}{log(j)} & \text{se } \frac{1}{j^2} \leq |x| \leq \frac{1}{j} \\ 0 & \text{se } \frac{1}{j} \leq |x|. \end{cases}$$

Allora

$$||f_j||_{H^{\frac{1}{2}}} \to 0.$$

In particolare

$$||f_j||_{BMO} \to 0.$$

Per dimostrare ciò basta notare che, se si considera la successione in $\mathbb{R}^2$,

$$||f_j||_{H^1(\mathbb{R}^2)} \to 0,$$

da cui la tesi prendendo la traccia. Si può comunque dare una dimostrazione diretta del fatto che $||f_j||_{BMO} \to 0$. Si noti infatti che

$$f_j(x) = \min\left\{1, \max\left\{0, -1 - \frac{log|x|}{log(j)}\right\}\right\};$$

allora, essendo $F(t) = \max\{0, t\}$ 1−Lipschitziana, dalla stima (valida in generale)

$$||F \circ u||_{BMO} \leq 2\ Lip(F)||u||_{BMO},$$

si ha

$$\left|\left|\max\left\{0, -1 - \frac{log|x|}{log(j)}\right\}\right|\right|_{BMO} \leq \frac{2}{log(j)}\,||log|x|||_{BMO} \leq \frac{C}{log(j)}.$$

Usando la stessa stima con $F(t) = \min\{0, t\}$ si ottiene

$$||f_j||_{BMO} \leq \frac{2C}{log(j)}.$$

Possiamo notare in particolare come questa stima appena trovata sulla norma BMO delle f_j valga in $\mathbb{R}^n$ per ogni n.

2.2 BMO e VMO su domini di una varietà

Consideriamo ora il caso di $\Omega \subset\subset X$, con X $n-$varietà regolare aperta. In questo caso, per definire $BMO(\Omega)$ e $VMO(\Omega)$, per prima cosa si dota X di una metrica Riemanniana; allora le definizioni date nel paragrafo precedente di $BMO(\Omega)$ e $VMO(\Omega)$ si estendono senza problemi, con l'unica differenza che si usano palle geodetiche $B_\varepsilon(x)$ con $\varepsilon < r_0 = injrad(\overline{\Omega})$. Si dimostra allora, come nel caso delle varietà senza bordo, che la definizione non dipende dalla metrica. Vale infatti il seguente:

Lemma 2.6. *Siano Ω_1 e Ω_2 domini limitati di $\mathbb{R}^n$, H un diffeomorfismo C^1 di un intorno di $\overline{\Omega}_1$ su un intorno di $\overline{\Omega}_2$. Allora*

$$f \in BMO(\Omega_2) \quad (risp.\ VMO(\Omega_2)) \ \Rightarrow \ f \circ H \in BMO(\Omega_1) \quad (risp.\ VMO(\Omega_1))$$

e

$$||f \circ H||_{BMO(\Omega_1)} \leq C||f||_{BMO(\Omega_2)}.$$

2.2.1 Esempi di funzioni BMO e VMO

(i) $\varphi(x) = \log\left(\frac{1}{\text{dist}(x,\partial\Omega)}\right) \in BMO(\Omega)$, dove la distanza può essere misurata con una qualunque metrica equivalente a quella Riemanniana.

(ii) $|\varphi|^\alpha \in VMO(\Omega)$ per $0 < \alpha < 1$, dove φ è la funzione dell'esempio precedente.

2.3 Grado per mappe VMO

Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dominio limitato, $u \in VMO(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e p un punto di $\mathbb{R}^n$. Vogliamo definire

$$deg(u, \Omega, p)$$

e dimostrare che continuano a valere le proprietà standard del grado.
Nel caso classico, con $u \in C^0(\overline{\Omega})$, si assume che

$$p \notin u(\partial\Omega). \tag{2.2}$$

Poiché in generale le funzioni VMO non hanno una traccia sul bordo, occorre dare una condizione diversa su p.
Definiamo

$$\mathcal{D} = \left\{ B_\varepsilon(x) \subset \Omega \;\middle|\; \varepsilon = \tfrac{1}{2}\mathrm{dist}(x, \partial\Omega) \right\};$$

allora, invece della (2.2), usiamo la condizione

$$\begin{cases} \exists \delta_0 > 0 \text{ e } U \text{ intorno di } \partial\Omega \text{ in } \Omega \text{ tali che} \\ \displaystyle{-}\!\!\!\!\!\!\int_B |u - p| \geq \delta_0 \quad \forall B \subset U,\ B \in \mathcal{D}. \end{cases} \tag{2.3}$$

In particolare, la (2.3) vale se $|u - p| \geq \delta_0$ q.o. in un qualche intorno U di $\partial\Omega$. Notiamo come, nel caso $u \in C^0(\overline{\Omega})$, la (2.2) e la (2.3) siano equivalenti. Denotiamo ora, dato $\varepsilon > 0$,

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega \mid \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}.$$

Definizione 2.7. *Data $u \in VMO(\Omega, \mathbb{R}^n)$, sia $\varepsilon_0 > 0$ tale che valgano*

$$-\!\!\!\!\!\!\int_{B_\varepsilon(x)} |u - \overline{u}_\varepsilon(x)| \leq \frac{\delta_0}{2} \qquad \forall x \in \Omega, \quad \forall \varepsilon \leq \min\{\varepsilon_0, \tfrac{1}{2} dist(x, \partial\Omega)\}, \tag{2.4}$$

e

$$\{x \in \Omega \mid dist(x, \partial\Omega) \leq 3\varepsilon_0\} \subset U,$$

con U come nella (2.3). Si definisce allora

$$deg(u, \Omega, p) = deg(\overline{u}_\varepsilon, \Omega_{2\varepsilon}, p).$$

Notiamo innanzitutto che, grazie alle ipotesi (2.3) e (2.4), si ha

$$|\overline{u}_\varepsilon(x) - p| \geq \frac{\delta_0}{2} \quad \text{se } x \in \partial\Omega_{2\varepsilon} \text{ e } \varepsilon \leq \varepsilon_0, \tag{2.5}$$

da cui $deg(\overline{u}_\varepsilon, \Omega_{2\varepsilon}, p)$ è definito $\forall \varepsilon \leq \varepsilon_0$, e dunque la definizione ha senso. Occorre ora vedere che è una buona definizione:

Lemma 2.8. *$deg(\overline{u}_\varepsilon, \Omega_{2\varepsilon}, p)$ è indipendente da ε per $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$.*

Dimostrazione. Possiamo supporre $p = 0$. Dimostreremo che, $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$ tale che

$$deg(\overline{u}_t, \Omega_{2t}, 0) = deg(\overline{u}_\varepsilon, \Omega_{2\varepsilon}, 0) \quad \text{per } |t - \varepsilon| < \delta,$$

da cui seguirà la tesi.
Ricordiamo che

$$(x, t) \mapsto \overline{u}_t(x)$$

è continua dove definita. Usando la (2.5), si vede che $\exists \delta > 0$ tale che

$$|\overline{u}_t(x)| \geq \frac{\delta_0}{4} \quad \text{se } |t - \varepsilon| < \delta \text{ e } \mathrm{dist}(x, \partial\Omega_{2\varepsilon}) \leq \delta, \tag{2.6}$$

e dunque

$$deg(\overline{u}_t, \Omega_{2t}, p)$$

è definito per $|t - \varepsilon| < \delta$. Allora, per omotopia ed escissione, grazie alla (2.6) otteniamo

$$deg(\overline{u}_\varepsilon, \Omega_{2\varepsilon}, 0) = deg(\overline{u}_t, \Omega_{2\varepsilon}, 0) = deg(\overline{u}_t, \Omega_{2t}, 0) \quad \text{per } |t - \varepsilon| < \delta.$$

$\square$

Osserviamo che, se $u \in C^0(\overline{\Omega})$, allora il grado appena definito coincide col grado usuale.

2.4 Proprietà del grado in VMO

Proprietà 1. Se $u \in VMO(\Omega, \mathbb{R}^n)$ soddisfa la (2.3) e

$$deg(u, \Omega, p) \neq 0,$$

allora

$$p \in ess\ R(u).$$

Dimostrazione. Analoga a quella della Proprietà 1 nel caso delle varietà senza bordo. $\square$

Proprietà 2.(Stabilità del grado nella topologia BMO) Siano $(u_j), u \subset VMO(\Omega, \mathbb{R}^n)$ tali che

$$u_j \to u \quad \text{in } BMO(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^n) \tag{2.7}$$

e

$$\begin{cases} \text{per un certo } p \in \mathbb{R}^n,\ \exists \delta_0 > 0 \text{ e } U \text{ intorno di } \partial\Omega \text{ in } \Omega \text{ tali che} \\ \displaystyle ⨍_B |u_j - p| \geq \delta_0 \quad \forall j,\ \forall B \subset U,\ B \in \mathcal{D}, \end{cases} \tag{2.8}$$

(per la (2.7) lo stesso vale per u). Allora

$$deg(u_j, \Omega, p) = deg(u, \Omega, p) \quad \text{per } j \text{ abbastanza grande.}$$

Dimostrazione. Possiamo supporre $p = 0$. Grazie alla compattezza di (u_j) in BMO non è difficile dimostrare che

$$\lim_{|B| \to 0, B \in \mathcal{C}} ⨍_B |u_j - \overline{u}_{j,B}| = 0 \quad \text{unif. in } j \tag{2.9}$$

(ricordiamo che $B \in \mathcal{C}$ significa che $B = B_r(x)$ con $r \leq \frac{1}{2}\text{dist}(x, \partial\Omega)$). Allora (2.8) e (2.9) implicano che $\exists \varepsilon_0$ tale che, $\forall \varepsilon < \varepsilon_0$,

$$\left| ⨍_{B_\varepsilon(x)} u_j \right| \geq \frac{\delta_0}{2} \quad \forall j,\ \forall x \in \partial\Omega_{2\varepsilon}.$$

Fissiamo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$; poiché $u_j \to u$ in $L^1_{loc}(\Omega)$, si ha

$$\overline{u}_{j,\varepsilon} \to u_\varepsilon \quad \text{unif. in } \overline{\Omega}_{2\varepsilon}.$$

Allora

$$deg(\overline{u}_{j.\varepsilon}, \Omega_{2\varepsilon}, 0) = deg(\overline{u}_\varepsilon, \Omega_{2\varepsilon}, 0) \quad \text{per } j \text{ abbastanza grande.}$$

La tesi segue allora dalla definizione di grado. $\square$

Osservazione: nell'argomento sopra è fondamentale che la (2.3) valga uniformemente in j. Diamo infatti un controesempio alla tesi nel caso in cui manca l'uniformità nella (2.3):
sia $\Omega = (0, 1)$ e poniamo

$$u_j(x) = f_j(x) - \frac{1}{2},$$

dove f_j è la succesione definita nell'esempio (viii) nel paragrafo 2.1.3. Allora

$$u_j(0) = \frac{1}{2}, \quad u_j(1) = -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad deg(u_j, \Omega, 0) = 1;$$

d'altra parte

$$u_j \to u \equiv -\frac{1}{2} \quad \text{in} \quad BMO \cap L^1 \quad \text{e} \quad deg(u, \Omega, 0) = 0.$$

Un corollario immediato di quanto appena dimostrato è il seguente:

Corollario 2.9 (Invarianza per omotopia). *Sia $t \mapsto H_t(\cdot) \in VMO(\Omega, \mathbb{R}^n)$ una famiglia a un parametro continua rispetto alla topologia $BMO \cap L^1_{loc}$. Supponiamo poi che la (2.3) valga uniformemente in t (ossia che gli stessi δ_0 e U vadano bene per ogni H_t). Allora*

$$deg(H_t, \Omega, p) \quad \text{è indipendente da } t.$$

Corollario 2.10. *Siano $u, v \in VMO(\Omega, \mathbb{R}^n)$ che soddisfano la (2.3) e supponiamo che, per qualche $\delta_1 < \delta_0$,*

$$\fint_B |u - v| \leq \delta_1, \quad \forall B \subset U, \; B \in \mathcal{D}.$$

Allora

$$deg(u, \Omega, p) = deg(v, \Omega, p).$$

Dimostrazione. Basta applicare l'omotopia

$$[0, 1] \ni t \mapsto H_t = tv + (1 - t)u$$

e il corollario precedente. □

Proprietà 3. (Borsuk) Supponiamo che $0 \in \Omega$ e che Ω sia simmetrico rispetto all'origine. Allora, se $u \in VMO(\Omega, \mathbb{R}^n)$ è dispari vicino a $\partial\Omega$ e la (2.3) vale con $p = 0$, $deg(u, \Omega, 0)$ è dispari.

Dimostrazione. Basta applicare il teorema di Borsuk a $\overline{u}_\varepsilon$. □

Osservazione: la definizione di grado si estende in modo ovvio a mappe VMO da un dominio Ω a chiusura compatta in una varietà Riemanniana X regolare e orientata a valori in un'altra varietà regolare orientata Y con $dim\ Y = dim\ X$. Sostanzialmente, per $u \in VMO(\Omega, Y)$ e per $p \in Y$ tale che valga la (2.3) (dove $|u(z) - p|$ è sostituita da $\mathrm{dist}(u(z), p)$), si definisce

$$deg(u, \Omega, p)$$

esattamente come nel caso euclideo considerando $u_\varepsilon = P(\overline{u}_\varepsilon)$ invece di $\overline{u}_\varepsilon$.

2.5 Mappe VMO$_\varphi$

In generale le funzioni VMO definite su un dominio Ω non hanno un traccia ben definita anche se $\partial\Omega$ è regolare. Per esempio, prendendo $\Omega = (0, 1)$ e la funzione $\cos(\log|\log(x)|)$, questa è una funzione VMO (in verità è in $H^{\frac{1}{2}}$) ma non ha traccia in 0.
Occorre allora introdurre una sottoclasse di funzioni che ammettono una traccia su $\partial\Omega$ appartenente a $VMO(\partial\Omega)$, dove Ω è un dominio limitato di $\mathbb{R}^n$ con bordo regolare.

Definizione 2.11. *$f \in VMO(\Omega)$ appartiene a $VMO_0(\Omega)$ se, estendendola identicamente* 0 *fuori da Ω, la sua estensione appartiene a $VMO(B)$ dove B è una palla aperta contenente $\overline{\Omega}$.*

Teorema 2.12. *$f \in VMO_0(\Omega) \Leftrightarrow f \in VMO(\Omega)$ e*

$$\lim_{|B| \to 0, B \in \mathcal{D}} \fint_B |f| = 0. \tag{2.10}$$

La condizione (2.10) significa che la media di $|f|$ sulle palle $B_\varepsilon(x)$ tende a 0 per $x \to \partial\Omega$ se $\varepsilon = \frac{1}{2}\mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$. Osserviamo che, per esempio, $W^{1,n}_0(\Omega) \subset VMO_0(\Omega)$.
Vogliamo ora definire VMO_φ per $\varphi \in VMO(\partial\Omega)$ come le funzioni VMO che hanno traccia φ su $\partial\Omega$. Per far ciò abbiamo bisogno del seguente:

Lemma 2.13. *Sia $\varphi \in VMO(\partial\Omega)$. Allora esiste $\tilde{\varphi}$ definita su un intorno $\tilde{\Omega}$ di $\overline{\Omega}$ tale che $\tilde{\varphi} \in VMO(\tilde{\Omega})$ e, per x vicino a $\partial\Omega$,*

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi\left(P(x)\right) \tag{2.11}$$

dove P è la proiezione sul punto più vicino su $\partial\Omega$.

Dimostrazione. Per prima cosa definiamo $\tilde{\varphi}$ in un intorno tubolare U di $\partial\Omega$ tramite la (2.11),

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) < \delta\}.$$

Ricordando che, se ψ è un diffeomorfismo C^1, $||f \circ \psi||_{BMO} \le C||f||_{BMO}$, possiamo supporre che il bordo sia $\{x_n = 0\}$, $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_n| < \delta\}$. Se Q è un cubo coi lati paralleli agli assi, allora è chiaro che

$$\fint_Q \left|\tilde{\varphi} - \fint_Q \tilde{\varphi}\right| \le ||\varphi||_{BMO(\partial\Omega)};$$

allora, se B è una palla in U, preso un cubo coi lati paralleli agli assi di lato uguale al diametro di B in modo che contenga B, si ha

$$\begin{aligned}\fint_B \left|\tilde{\varphi} - \fint_B \tilde{\varphi}\right| &\le \fint_B \left|\tilde{\varphi} - \fint_Q \tilde{\varphi}\right| + \left|\fint_Q \tilde{\varphi} - \fint_B \tilde{\varphi}\right| \\ &\le 2\fint_B \left|\tilde{\varphi} - \fint_Q \tilde{\varphi}\right| \le 2\frac{|Q|}{|B|}\fint_Q \left|\tilde{\varphi} - \fint_Q \tilde{\varphi}\right| \\ &= C\fint_Q \left|\tilde{\varphi} - \fint_Q \tilde{\varphi}\right| \le C||\varphi||_{BMO(\partial\Omega)},\end{aligned}$$

e dunque $\tilde{\varphi} \in BMO(U)$. Dallo stesso conto e mandando $|B| \to 0$, si vede inoltre che $\tilde{\varphi} \in VMO(U)$. Infine, moltiplicando $\tilde{\varphi}$ con una funzione cut-off regolare, si ha la tesi ricordando che, se χ è una funzione Lipschitziana e $f \in BMO$,

$$||\chi f||_{BMO} \le C\big(||\chi||_{C^0} + Lip(\chi)\big)||f||_{BMO} + ||\chi||_{BMO}\left|\fint f\right|. \tag{2.12}$$

$\square$

Definizione 2.14. *Siano φ come sopra e $f \in VMO(\Omega)$. Si dice che f ha traccia φ su $\partial\Omega$, e si scrive $f \in VMO_\varphi(\Omega)$, se*

$$f - \tilde{\varphi} \in VMO_0(\Omega).$$

Si vede subito che la definizione è ben posta per il semplice fatto che, se una funzione VMO è identicamente nulla vicino a $\partial\Omega$, allora appartiene a $VMO_0(\Omega)$. Osserviamo inoltre che la definizione ha senso anche se $\Omega \subset X$ con X varietà Riemanniana.

2.6 Una formula per il grado in VMO$_\varphi$

Ricordiamo che per $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ continua con $u|_{\partial\Omega} = \varphi$ e con $\varphi \ne p$ in ogni punto di $\partial\Omega$ per un certo $p \in \mathbb{R}^n$, si ha

$$deg(u, \Omega, p) = deg\left(\frac{\varphi - p}{|\varphi - p|}, \partial\Omega, S^{n-1}\right) \tag{2.13}$$

(si veda l'inizio del primo capitolo per la dimostrazione nel caso C^1 usando le formule integrali per il grado; nel caso continuo basta ragionare per approssimazione).
Vogliamo estendere questa formula a mappe in VMO_φ sotto l'ipotesi che $|\varphi - p| \geq \delta_0 > 0$ q.o. su $\partial\Omega$.

Teorema 2.15. *Sia $u \in VMO_\varphi(\Omega)$, con $\varphi \in VMO(\partial\Omega)$ tale che $|\varphi - p| \geq \delta_0 > 0$ q.o. su $\partial\Omega$. Allora esiste U intorno di $\partial\Omega$ in Ω tale che*

$$\fint |u - p| \geq \frac{\delta_0}{2} \quad \forall B \subset U,\ B \in \mathcal{D},$$

da cui $deg(u, \Omega, p)$ è definito. Inoltre vale la (2.13).

Dimostrazione. Possiamo supporre $p = 0$. Si ponga $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(Px) \in VMO(U)$ come nel lemma (2.13) e, detta ζ una funzione cutoff regolare con supporto in U tale che $\zeta \equiv 1$ vicino a $\partial\Omega$, sia $\overline{\varphi}(x) = \zeta(x)\tilde{\varphi}(x)$ in modo che $\overline{\varphi} \in VMO_\varphi(\Omega)$. Dal momento che $u \in VMO_\varphi$,

$$\lim_{|B| \to 0, B \in \mathcal{D}} \fint_B |u - \overline{\varphi}| = 0$$

e, poiché per $|B|$ piccola si ha

$$\fint_B |u - \overline{\varphi}| \geq \fint_B |\overline{\varphi}| - \fint_B |u| \geq \delta_0 - \fint_B |u|$$

(ricordiamo che $|\overline{\varphi}| \geq \delta_0$ vicino a $\partial\Omega$), si ottiene che esiste un intorno V di $\partial\Omega$ tale che

$$\fint_B |u| \geq \frac{\delta_0}{2} \quad \forall B \subset V,\ B \in \mathcal{D}.$$

Resta ora da dimostrare che vale la (2.13) e, per fare ciò, abbiamo bisogno del seguente:

Lemma 2.16. *Sia $\psi \in VMO(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$ tale che $|\psi| = 1$ q.o. su $\partial\Omega$ e sia, per $x \in \Omega$,*

$$\overline{\psi}(x) = \zeta(x)\psi(Px)$$

come sopra. Allora

$$deg(\overline{\psi}, \Omega, 0) = deg(\psi, \partial\Omega, S^{n-1}).$$

Dimostrazione. Grazie al corollario 1.7 sappiamo che esiste una successione $\psi_j \in C^\infty(\partial\Omega, S^{n-1})$ tale che $\psi_j \to \psi$ in BMO e q.o. Per la (2.13) per mappe continue, abbiamo

$$deg(\psi_j, \partial\Omega, S^{n-1}) = deg(\overline{\psi}_j, \Omega, 0)$$

dove $\overline{\psi}_j(x) = \zeta(x)\psi_j(Px)$. Notando che $\overline{\psi}_j \to \overline{\psi}$ in $L^1(\Omega)$ (grazie al teorema di convergenza dominata) e in $BMO(\Omega)$ (grazie al fatto che $\overline{\psi}_j(Px) \to \overline{\psi}(Px)$ in $BMO(V)$ e alla stima (2.12) sul prodotto) e che

$$|\overline{\psi}_j(x)| \equiv 1 \text{ in un intorno fissato uniforme di } \partial\Omega,$$

si conclude grazie alla stabilità del grado nella topologia di BMO. $\square$

Poniamo allora $\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{|\varphi(x)|}$ per $x \in \partial\Omega$. Osserviamo che $\psi \in VMO$ ($u \in VMO$, F Lipschitziana $\Rightarrow F \circ u \in VMO$) e dunque, per il lemma appena dimostrato, definita $\overline{\psi}$ come nel lemma 2.16, otteniamo

$$deg(\overline{\psi}, \Omega, 0) = deg\left(\frac{\varphi}{|\varphi|}, \partial\Omega, S^{n-1}\right).$$

Inoltre, considerando l'omotopia

$$H(t,x) = t\overline{\psi}(x) + (1-t)\overline{\varphi}(x) = \zeta(x)\varphi(Px)\left[\frac{t}{|\varphi(Px)|} + (1-t)\right]$$

e notando che, per ogni x in un fissato intorno di $\partial\Omega$,

$$|H(t,x)| \geq t + (1-t)\delta_0 \geq \min\{\delta_0, 1\} \quad \forall t \in [0,1],$$

otteniamo

$$deg(\overline{\psi}, \Omega, 0) = deg(\overline{\varphi}, \Omega, 0).$$

Rimane allora da dimostrare che

$$deg(\overline{\varphi}, \Omega, 0) = deg(u, \Omega, 0).$$

Ricordando che

$$\lim_{|B|\to 0, B\in\mathcal{D}} \fint_B |u - \overline{\varphi}| = 0,$$

l'uguaglianza dei due gradi segue subito grazie al seguente:

Lemma 2.17. *Siano $u, v \in VMO(\Omega, \mathbb{R}^n)$ tali che*

$$\lim_{|B|\to 0, B\in\mathcal{D}} \fint_B |u - v| = 0.$$

Supponiamo inoltre che, per un qualche U intorno di $\partial\Omega$ in Ω, si abbia

$$\fint |u| \geq \delta_0 \quad \forall B \subset U,\ B \in \mathcal{D},$$

in modo che $deg(u, \Omega, 0)$ sia definito. Allora esiste V intorno di $\partial\Omega$ in Ω tale che

$$\fint |v| \geq \frac{\delta_0}{2} \quad \forall B \subset V,\ B \in \mathcal{D}.$$

Inoltre

$$deg(u, \Omega, 0) = deg(v, \Omega, 0).$$

Dimostrazione. L'esistenza di V è chiara. Ricordando che, per definizione,

$$deg(u, \Omega, 0) = deg(\overline{u}_\varepsilon, \Omega_{2\varepsilon}, 0) \text{ e } deg(v, \Omega, 0) = deg(v_\varepsilon, \Omega_{2\varepsilon}, 0) \quad \text{per } \varepsilon < \varepsilon_0,$$

prendendo ε abbastanza piccolo in modo che

$$|\overline{u}_\varepsilon(x)| \geq \frac{\delta_0}{2}, \quad |\overline{v}_\varepsilon(x)| \geq \frac{\delta_0}{2} \quad \forall x \in \partial\Omega_{2\varepsilon}$$

(si veda la (2.5)) e

$$|\overline{u}_\varepsilon(x) - \overline{v}_\varepsilon(x)| \leq \frac{\delta_0}{4} \quad \forall x \in \partial\Omega_{2\varepsilon},$$

utilizzando un omotopia lineare tra le mappe continue $\overline{u}_\varepsilon$ e $\overline{v}_\varepsilon$, otteniamo

$$deg(\overline{u}_\varepsilon, \Omega_{2\varepsilon}, 0) = deg(\overline{v}_\varepsilon, \Omega_{2\varepsilon}, 0).$$

da cui la tesi. $\square$

□

Un'applicazione:

Teorema 2.18. *Si consideri l'equazione*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = \varphi & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dominio regolare limitato con $n \geq 2$. Supponiamo che

$$f \in L^{\frac{n}{2}}(\Omega, \mathbb{R}^n), \tag{2.14}$$

$$\varphi \in VMO(\partial\Omega, S^{n-1}),$$

e

$$deg(\varphi, \partial\Omega, S^{n-1}) \neq 0.$$

Allora si ha

$$ess\ R(u) \supset B_1(0).$$

Dimostrazione. (Cenno) Ci basta dimostrare che

$$u \in VMO_\varphi. \tag{2.15}$$

Infatti, in questo caso, dalla proprietà 1 nel paragrafo 2.4 e dal teorema 2.15, sappiamo che

$$deg\left(\frac{\varphi - p}{|\varphi - p|}, \partial\Omega, S^{n-1}\right) = deg(u, \Omega, p) \neq 0 \Rightarrow p \in ess\ R(u),$$

e, grazie all'omotopia ammissibile

$$[0,1] \ni t \mapsto \frac{\varphi - tp}{|\varphi - tp|}, \quad \forall p \in B_1(0),$$

abbiamo

$$deg\left(\frac{\varphi - p}{|\varphi - p|}, \partial\Omega, S^{n-1}\right) = deg(\varphi, \partial\Omega, S^{n-1}) \neq 0.$$

Per dimostrare la (2.15) occorre distinguere due casi:

(i) $n \geq 3$: in questo caso scriviamo $u = v + w$, dove v è la soluzione di

$$\begin{cases} \Delta v = f & \text{in } \Omega \\ v = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

e w è l'estensione armonica di φ in Ω. Dal momento che $v \in W^{2,\frac{n}{2}}(\Omega)$, allora $v \in W_0^{1,n}(\Omega) \subset VMO_0(\Omega)$. D'altra parte si può dimostrare che $w \in VMO_\varphi(\Omega)$, da cui $v + w \in VMO_\varphi(\Omega)$.

(ii) $n = 2$: scriviamo come prima $u = v + w$; il problema è che adesso non possiamo dire che $v \in W^{1,2}$ (non possiamo usare la teoria della regolarità per ottenere $v \in W^{2,1}(\Omega)$). Poniamo allora

$$\tilde{v} = -\frac{1}{2\pi} \log |x| * f$$

con f estesa a 0 fuori da Ω; in questo modo

$$\Delta \tilde{v} = f.$$

Si può dimostrare che $\tilde{v} \in VMO_\psi(\Omega)$ con $\psi = \tilde{v}|_{\partial\Omega} \in VMO(\partial\Omega)$, da cui

$$\begin{cases} \Delta(\tilde{v} - v) = 0 & \text{in } \Omega \\ \tilde{v} - v = \psi & \text{su } \partial\Omega; \end{cases}$$

dunque $\tilde{v} - v$ è l'estensione armonica di φ in Ω e perciò, come succede per w, $\tilde{v} - v \in VMO_\psi(\Omega)$, da cui $u = v + w = (v - \tilde{v}) + \tilde{v} + w \in VMO_\varphi(\Omega)$.

□

Osservazione: la condizione (2.14) è ottimale, nel senso che, se $f \in L^{\frac{n}{2}-\varepsilon}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ per un qualunque $\varepsilon > 0$, la tesi del teorema non vale. Per esempio, prendendo $\Omega = B_1(0)$, la funzione

$$u(x) = \frac{x}{|x|}$$

soddisfa l'equazione con

$$f = \frac{x}{|x|^3} \in L^p \quad \forall 1 \leq p < \frac{n}{2},$$

$$deg(u|_{\partial\Omega}, \partial\Omega, S^{n-1}) = deg(id, S^{n-1}, S^{n-1}) = 1,$$

ma

$$ess\ R(u) = S^{n-1}.$$

3 Questioni legate al grado di mappe da S^1 in S^1

Il concetto di grado per mappe in $H^{\frac{1}{2}}(S^1, S^1)$ è risultato molto importante per varie applicazioni. Per esempio esso è fondamentale nella dimostrazione del seguente:

Lemma 3.1. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ il disco unitario e φ una mappa regolare da $\partial\Omega = S^1$ in S^1. Allora*

$$H^1_\varphi(\Omega, S^1) \neq \emptyset \Leftrightarrow deg(\varphi) = 0.$$

Una possibile definizione alternativa di grado in $H^{\frac{1}{2}}$ è la seguente:
notiamo innanzitutto che, se $f \in C^1(S^1, \mathbb{C} \setminus \{0\})$, allora, per la formula di Cauchy,

$$deg(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S^1} \frac{f'}{f}.$$

In particolare, se $f \in C^1(S^1, S^1)$,

$$deg(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S^1} \frac{f'}{f} = \frac{1}{2\pi i} \int_{S^1} \overline{f} f' \left(= \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} det(f, f') \right) \tag{3.1}$$

(che coincide con la formula integrale per il grado (1.1)). Si può allora osservare che la (3.1) ha senso anche per $f \in H^{\frac{1}{2}}(S^1, S^1)$ interpretando il membro di destra come un prodotto scalare nella dualità $H^{\frac{1}{2}} - H^{-\frac{1}{2}}$ ($\overline{f} \in H^{\frac{1}{2}}$, $f' \in H^{-\frac{1}{2}}$) e, con un argomento di densità, si può dimostrare che il membro di destra è intero, e dunque lo si può prendere come definizione di grado. Per le osservazioni fatte nel primo capitolo, si ha subito che questa definizione di grado coincide con quella data per mappe VMO.
Ricordiamo ora che $H^{\frac{1}{2}} \left(= W^{\frac{1}{2},2} \right)$ si può definire come

$$H^{\frac{1}{2}}(S^1) = \left\{ f \in L^2(S^1) \;\middle|\; \int_{S^1} \int_{S^1} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x - y|^2} \, dx \, dy < +\infty \right\},$$

o equivalentemente, usando i coefficienti di Fourier (a_n) di f,

$$H^{\frac{1}{2}}(S^1) = \left\{ f \in L^2(S^1) \;\middle|\; \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n||a_n|^2 < +\infty \right\}.$$

Vale infatti il seguente:

Lemma 3.2. *Per ogni $f \in H^{\frac{1}{2}}(S^1)$ si ha*

$$\int_{S^1} \int_{S^1} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x - y|^2} \, dx \, dy = 4\pi^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n||a_n|^2.$$

Dimostrazione.

$$\int_{S^1} \int_{S^1} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x - y|^2} \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|\sum a_n e^{in\theta} - \sum a_n e^{in\psi}|^2}{|e^{i\theta} - e^{i\psi}|^2} \, d\theta \, d\psi$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{d\gamma}{|e^{i\gamma} - 1|^2} \int_0^{2\pi} \left| \sum a_n (1 - e^{in\gamma}) e^{in\theta} \right|^2 d\theta = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^2 \int_0^{2\pi} \frac{|e^{in\gamma} - 1|^2}{|e^{i\gamma} - 1|^2} d\gamma.$$

La tesi segue allora notando che, per $n \geq 1$,

$$\frac{|e^{in\gamma}-1|^2}{|e^{i\gamma}-1|^2} = (e^{i(n-1)\gamma}+\ldots+1)(e^{-i(n-1)\gamma}+\ldots+1),$$

da cui

$$\int_0^{2\pi} \frac{|e^{in\gamma}-1|^2}{|e^{i\gamma}-1|^2} d\gamma = 2\pi|n|.$$

□

A questo punto si può osservare che, inserendo lo sviluppo in serie di Fourier

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{in\theta}$$

nella (3.1), si ottiene

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{S^1} \overline{f}(z) f'(z)\, dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \overline{f}(\theta) f'(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{n,m} m\overline{a}_n a_m e^{i(m-n)\theta}\, d\theta,$$

da cui

$$deg(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n|a_n|^2.$$

Questa formula si dimostra facilmente se $f \in C^1(S^1, S^1)$; allora, dalla densità di $C^1(S^1, S^1)$ in $H^{\frac{1}{2}}(S^1, S^1)$ e dalla stabilità del grado per convergenza in VMO (e dunque per convergenza in $H^{\frac{1}{2}}$), si conclude:

Teorema 3.3. *Per ogni $f \in H^{\frac{1}{2}}(S^1, S^1)$ si ha*

$$deg(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n|a_n|^2. \tag{3.2}$$

Supponiamo ora che $f \in C^0(S^1, S^1) \setminus H^{\frac{1}{2}}(S^1, S^1)$. Allora la serie

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n||a_n|^2,$$

diverge e dunque, mentre il membro di sinistra della (3.2) è ben definito, quello di destra non lo è. Ci si potrebbe chiedere, allora, se il grado di f si possa comunque calcolare come valore principale della serie $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n|a_n|^2$. Per esempio ci si potrebbe chiedere se, detti

$$\sigma_N = \sum_{n=-N}^{N} n|a_n|^2$$

e

$$P_r = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n|a_n|^2 r^{|n|}, \quad 0 < r < 1,$$

è vero che, per ogni $f \in C^0(S^1, S^1)$,

$$deg(f) = \lim_{N\to+\infty} \sigma_N \quad \text{oppure} \quad deg(f) = \lim_{r\to 1} P_r.$$

Purtroppo la risposta è negativa se si suppone che f sia solo continua. Si possono infatti costruire mappe continue da S^1 in S^1 di grado 0 per le quali σ_N (risp. P_r) non ha limite per $N \to +\infty$ (risp. $r \to 1$) oppure converge ad un qualunque numero reale $\lambda \neq 0$ (anche $\lambda = \pm\infty$).
Se però si assume $f \in C^0(S^1, S^1) \cap BV(S^1, S^1)$, vale

$$deg(f) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} n|a_n|^2.$$

Una domanda più modesta potrebbe essere allora se il valore assoluto dei coefficienti di Fourier determina il grado, ossia, date $f, g \in C^0(S^1, S^1)$ e detti (a_n) e (b_n) i corrispettivi coefficienti di Fourier,

$$|a_n| = |b_n| \quad \forall n \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow deg(f) = deg(g)?$$

La stessa domanda la si potrebbe poi porre per $f, g \in VMO(S^1, S^1)$. Ovviamente, grazie al teorema 3.3, la risposta è positiva se $f, g \in H^{\frac{1}{2}}(S^1, S^1)$. In verità la risposta è positiva in una classe di funzioni ben più ampia.

Teorema 3.4. *Per ogni $f \in W^{\frac{1}{3},3}(S^1, S^1)$ si ha*

$$deg(f) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |a_n|^2 \frac{\sin^2(n\varepsilon)}{n}. \tag{3.3}$$

Teorema 3.5. *Per ogni $f \in C^0(S^1, S^1) \cap BV(S^1, S^1)$ oppure $f \in C^{0,\alpha}(S^1, S^1)$ con $\alpha > \frac{1}{3}$, si ha*

$$deg(f) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |a_n|^2 \sin(n\varepsilon). \tag{3.4}$$

Dimostrazione. (Cenno) La dimostrazione dei due teoremi è analoga e si basa sullo scrivere

$$f(\theta) = e^{i(k\theta+\varphi(\theta))} \quad \text{con } k = deg(f)$$

(si veda il paragrafo sul lifting di mappe VMO) e, grazie all'unicità del sollevamento in VMO, si può dimostrare che nel primo caso $\varphi \in W^{\frac{1}{3},3}$, mentre nel secondo $\varphi \in C^0 \cap BV$ oppure $\varphi \in C^{0,\alpha}(S^1, S^1)$ con $\alpha > \frac{1}{3}$. A questo punto, scrivendo

$$\int_0^{2\pi} f(\theta+h)\overline{f}(\theta)\, d\theta = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^2 e^{inh} = \int_0^{2\pi} e^{ikh} e^{i(\varphi(\theta+h)-\varphi(\theta))}\, d\theta \tag{3.5}$$

e sviluppando con Taylor, si ottiene

$$\left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^2 \sin(nh) - kh \right| \leq C|h|^2 + C \int_0^{2\pi} |\varphi(\theta+h) - \varphi(\theta)|^3\, d\theta. \tag{3.6}$$

Infatti

$$e^{ikh} = 1 + ikh + O(|h|^2)$$

e

$$e^{i(\varphi(\theta+h)-\varphi(\theta))} = 1 + i(\varphi(\theta+h)-\varphi(\theta)) - \frac{1}{2}(\varphi(\theta+h)-\varphi(\theta))^2 + O(|\varphi(\theta+h)-\varphi(\theta)|^3),$$

da cui

$$\begin{aligned} &\Im[e^{ikh}e^{i(\varphi(\theta+h)-\varphi(\theta))}] = \Im[(1+ikh)e^{i(\varphi(\theta+h)-\varphi(\theta))}] + O(|h|^2) \\ &= (\varphi(\theta+h)-\varphi(\theta)) + kh + O(|h|^2) + O(|h||\varphi(\theta+h)-\varphi(\theta)|^2) + O(|\varphi(\theta+h)-\varphi(\theta)|^3). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Integrando la (3.7) rispetto a θ tra 0 e 2π e ricordando la (3.5), segue dunque la (3.6).
Ora, nel primo caso si integra la (3.6) rispetto ad h su $(0, 2\varepsilon)$, ottenendo

$$\left| \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |a_n|^2 \left(\frac{1-\cos(2n\varepsilon)}{n}\right) - 2k\varepsilon^2 \right| \le C\varepsilon^3 + C\int_0^{2\varepsilon} dh \int_0^{2\pi} |\varphi(\theta+h)-\varphi(\theta)|^3\, d\theta,$$

e quindi

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |a_n|^2 \frac{\sin^2(n\varepsilon)}{n} - k \right| \\ &\qquad \le C\varepsilon + \frac{C}{\varepsilon^2}\int_0^{2\varepsilon} dh \int_0^{2\pi} |\varphi(\theta+h)-\varphi(\theta)|^3\, d\theta, \\ &\qquad\qquad \le C\varepsilon + C\int_0^{2\varepsilon}\int_0^{2\pi} \frac{|\varphi(\theta+h)-\varphi(\theta)|^3}{|h|^2}\, d\theta, \end{aligned}$$

da cui la tesi ricordando che $\varphi \in W^{\frac{1}{3},3}$.
Invece, nel secondo caso, si prende la (3.6) con $h = \varepsilon$. Allora, se $\varphi \in BV \cap C^0$, usando che

$$\int_0^{2\pi} |\varphi(\theta+\varepsilon)-\varphi(\theta)|\, d\theta \le \varepsilon ||\varphi||_{BV}$$

si ottiene

$$\left| \frac{1}{\varepsilon} \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |a_n|^2 \sin(n\varepsilon) - k \right| \le C\varepsilon + C\sup_\theta ||\varphi(\theta+\varepsilon)-\varphi(\theta)||^2_{L^\infty},$$

da cui si conclude ricordando che $\varphi \in C^0$.
Se invece $\varphi \in C^{0,\alpha}$ con $\alpha > \frac{1}{3}$, si ha subito

$$\left| \frac{1}{\varepsilon} \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |a_n|^2 \sin(n\varepsilon) - k \right| \le C\varepsilon + C\varepsilon^{3\alpha-1},$$

e quindi la tesi. □

Corollario 3.6. *Siano (a_n) e (b_n) i coefficienti di Fourier di due funzioni f e g rispettivamente tali che*

$$|a_n| = |b_n| \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Supponiamo che valga una delle seguenti ipotesi:

(i) $f, g \in W^{\frac{1}{p},p}(S^1, S^1)$ *con* $1 \leq p \leq 3$;

(ii) $f, g \in C^{0,\alpha}(S^1, S^1)$ *con* $\alpha > \frac{1}{3}$;

(iii) $f \in C^0(S^1, S^1) \cap BV(S^1, S^1)$.

Allora

$$deg(f) = deg(g).$$

Dimostrazione. Basta osservare che

$$W^{\frac{1}{p},p} \cap L^\infty \subset W^{\frac{1}{3},3} \quad \forall 1 < p \leq 3$$

e

$$W^{1,1} \subset C^0 \cap BV.$$

□

Osservazione: si può notare che, grazie all'inclusione

$$C^{0,\alpha} \subset W^{\frac{1}{3},3} \quad \forall \alpha > \tfrac{1}{3},$$

per le funzioni $C^{0,\alpha}$ valgono sia la (3.3) che la (3.4). Ci si può inoltre accorgere alquanto facilmente come l'esponente di Holderianità $\frac{1}{3}$ sia critico per passare al limite in entrambe le stime. In particolare è possibile costruire un esempio di funzione $f \in C^{0,\frac{1}{3}}(S^1, S^1)$ tale che $deg(f) = 0$, mentre

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |a_n|^2 \frac{\sin^2(n\varepsilon)}{n} = \lambda$$

dove λ può essere un qualunque numero reale.
Tornando alla formula per il grado in $H^{\frac{1}{2}}$, possiamo osservare che, per ogni $f \in C^1(S^1, S^1)$, vale

$$|deg(f)| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n||a_n|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{S^1} \int_{S^1} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x - y|^2} \, dx \, dy. \tag{3.8}$$

Questa disuguaglianza si può vedere come una stima sulla minima quantità di energia $H^{\frac{1}{2}}$ necessaria per produrre una mappa $f : S^1 \to S^1$ con grado assegnato. Più precisamente

$$\inf_{f:S^1 \to S^1, deg(f) = n} \int_{S^1} \int_{S^1} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x - y|^2} \, dx \, dy = 4\pi^2 |n|$$

e l'inf è raggiunto dalla funzione $f(\theta) = e^{in\theta}$. Una consequenza immediata della (3.8) è la stima

$$|deg(f)| \leq \frac{1}{\pi^2} \int_{S^1} \int_{S^1} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^2} \, dx \, dy \quad \forall f \in C^1(S^1, S^1), \ \forall 1 < p \leq 2. \tag{3.9}$$

Il problema della (3.9) è che la stima peggiora per $p \searrow 1$, dal momento che il membro di destra diverge a meno che f non sia costante. In verità vale una stima più fine, ma di dimostrazione ben più complicata:

$$|deg(f)| \leq C_p \int_{S^1} \int_{S^1} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^2} \, dx \, dy = C_p ||f||^p_{W^{\frac{1}{p},p}} \quad \forall f \in C^1(S^1, S^1), \ \forall p > 1,$$

con $C_p \sim p - 1$ per $p \searrow 1$. La stima si può inoltre estendere a dimensione superiore:

$$|deg(f)| \leq C(p, n) \int_{S^n} \int_{S^n} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{2n}} \, dx \, dy = C(p, n) ||f||^p_{W^{\frac{n}{p},p}} \quad \forall f \in C^1(S^n, S^n), \ \forall p > 1.$$

Riferimenti bibliografici

[BN95] H. Brezis and L. Nirenberg, *Degree theory and BMO. I. Compact manifolds without boundaries*, Selecta Math. (N.S.) **1** (1995), no. 2, 197–263.

[BN96] ______, *Degree theory and BMO. II. Compact manifolds with boundaries*, Selecta Math. (N.S.) **2** (1996), no. 3, 309–368, With an appendix by the authors and Petru Mironescu.

[Bre04] H. Brezis, *New questions related to the topological degree*, disponibile on-line: `www.ceu.hu/math/News&Ev/Brezis_Topological_Degree.pdf`, 2004.