2.4 Proprietà del grado di Leray-Schauder

Elenchiamo le principali proprietà del grado di Leray-Schauder. Le dimostrazioni seguono per lo più in maniera immediata dalle corrispondenti proprietà del grado finito-dimensionale, oppure si dimostrano in modo analogo.

Esistenza di soluzioni. Se $\deg(f,\Omega,y) \neq 0$ allora l'equazione $f(x) = y$ ha almeno una soluzione $x \in \Omega$. Infatti se $f(\overline{\Omega})$ non contiene y, essendo questo insieme un chiuso possiamo trovare $\delta > 0$ tale che $B_\delta(y)$ sia disgiunto da $f(\overline{\Omega})$. Se scegliamo ora l'approssimante g nella definizione del grado in modo che $\|g - f\|_\infty < \delta$, si ha che $y \notin g(\overline{\Omega})$, da cui

$$\deg(f,\Omega,y) = \deg(g|_{\Omega\cap X_0}, \Omega \cap X_0, y) = 0.$$

Locale costanza in y. La funzione

$$y \mapsto \deg(f,\Omega,y)$$

è localmente costante in $X \setminus f(\partial\Omega)$. Pertanto, se Γ è una componente connessa di $X \setminus f(\partial\Omega)$, è ben definito l'intero

$$\deg(f,\Omega,\Gamma) := \deg(f,\Omega,y), \quad \forall y \in \Gamma.$$

Dato che una perturbazione compatta dell'identità manda limitati in limitati, $X \setminus f(\partial\Omega)$ ha esattamente una componente connessa illimitata Γ, e vale

$$\deg(f,\Omega,\Gamma) = 0.$$

Invarianza per omotopia. Se

$$h : [0,1] \times \overline{\Omega} \to X$$

è una mappa continua della forma

$$h(t,x) = x + K(t,x),$$

con $K : [0,1] \times \overline{\Omega} \to X$ mappa compatta, allora dato $y \in X \setminus h([0,1] \times \partial\Omega)$ il grado di $h(t,\cdot)$ su Ω rispetto a y non dipende da t,

$$\deg(h(t,\cdot),\Omega,y) = \deg(h(0,\cdot),\Omega,y), \quad \forall t \in [0,1].$$

Addittività numerabile. Sia $\Omega_1, \Omega_2, \dots$ una successione di aperti disgiunti contenuti in Ω, e supponiamo $y \notin f(\overline{\Omega} \setminus \bigcup_{j=1}^\infty \Omega_j)$. Allora $\deg(f,\Omega_j,y)$ è nullo eccetto al più per un numero finito di indici j, e

$$\deg(f,\Omega,y) = \sum_{j=1}^\infty \deg(f,\Omega_j,y).$$

Mappe prodotto. Siano X e Y spazi di Banach, $\Omega \subset X$ e $\Gamma \subset Y$ aperti limitati, e

$$f : \overline{\Omega} \to X, \quad g : \overline{\Gamma} \to Y,$$

perturbazioni compatte dell'identità tali che $z_1 \notin f(\partial\Omega)$ e $z_2 \notin g(\partial\Gamma)$. Si consideri la mappa:

$$f \times g : \overline{\Omega} \times \overline{\Gamma} \to X \times Y, \quad (x,y) \mapsto (f(x), g(y)).$$

Allora

$$\deg(f \times g, \Omega \times \Gamma, (z_1,z_2)) = \deg(f,\Omega,z_1) \cdot \deg(g,\Gamma,z_2).$$

Dipendenza dai valori al bordo. Se due perturbazioni compatte dell'identità $f, g : \overline{\Omega} \to X$ coincidono su $\partial\Omega$, allora
$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(g, \Omega, y).$$
Più in generale: se le restrizioni di f e g a $\partial\Omega$ sono omotope tramite un omotopia
$$h : [0,1] \times \partial\Omega \to X \setminus \{y\},$$
della forma $h(t,x) = x + K(t,x)$ con $K : [0,1] \times \partial\Omega \to X$ mappa compatta, allora
$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(g, \Omega, y).$$

Formula di Leray per il grado di una composizione. Siano Ω e Γ aperti limitati di X. Siano $f : \overline{\Omega} \to \overline{\Gamma}$ e $g : \overline{\Gamma} \to X$ perturbazioni compatte dell'identità. Siano Γ_j, $j \in J$, le componenti connesse di $X \setminus f(\partial\Omega)$ aventi chiusura limitata in X. Allora per ogni $z \in X \setminus g(f(\partial\Omega))$,
$$\deg(g \circ f, \Omega, z) = \sum_{j \in J} \deg(f, \Omega, \Gamma_j) \cdot \deg(g, \Gamma_j, z),$$
e la somma di destra contiene un numero finito di termini non nulli.

Teorema di separazione di Jordan-Brower generalizzato. Siano F, G due chiusi limitati di uno spazio di Banach X, tra loro omeomorfi tramite un omeomorfismo $f : F \to G$ della forma $f(x) = x + K(x)$, con K mappa compatta. Allora $X \setminus F$ e $X \setminus G$ hanno lo stesso numero di componenti connesse. Si osservi infatti che in queste ipotesi anche f^{-1} risulta una perturbazione compatta dell'identità.

Teorema di Borsuk generalizzato. Sia $\Omega \subset X$ un aperto limitato simmetrico rispetto a 0 e contenente lo 0. Sia $f : \overline{\Omega} \to X$ una perturbazione compatta dell'identità, dispari, e tale che $0 \notin f(\partial\Omega)$. Allora $\deg(f, \Omega, 0)$ è un numero dispari.

Teorema di invarianza del dominio generalizzato. Sia $\Omega \subset X$ un aperto e sia $f : \Omega \to X$ una perturbazione compatta dell'identità localmente iniettiva. Allora la mappa f è aperta.

2.5 Formula del grado per mappe di classe C^1

Abbiamo visto che se la perturbazione compatta dell'identità f è differenziabile, allora $Df(x) = I + T(x)$, con $T(x)$ operatore compatto su X. Gli operatori lineari del tipo identità più compatto non posseggono un determinante. Mostreremo però che il *segno del determinante* risulta ben definito. Questo permetterà di estendere agli spazi di Banach l'usuale formula del grado nel caso di un valore regolare di una mappa di classe C^1.

Sia dunque $T \in L_c(X)$ un operatore compatto e sia $L = I - T$. Per l'alternativa di Fredholm, L è un isomorfismo se e solamente se il suo nucleo è (0). Se L non è un isomorfismo poniamo
$$\operatorname{sign} \det L := 0.$$
Se $L = I - T$ è un isomorfismo, 1 non appartiene allo spettro di T. Dato che lo spettro di un operatore compatto meno lo 0 consiste di autovalori di molteplicità algebrica finita che hanno al più lo 0 come punto di accumulazione, T possiede un insieme finito $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ di autovalori reali maggiori di 1, ciascuno dei quali ha molteplicità algebrica finita
$$m(\lambda_j) := \dim \bigcup_{i=1}^{\infty} \ker(\lambda_j I - T)^i < +\infty.$$

Definiamo allora

$$\text{sign det}\, L = \text{sign det}(I - T) = (-1)^m, \quad \text{dove } m = \sum_{j=1}^{k} m(\lambda_j). \tag{9}$$

La proposizione seguente giustifica questa definizione:

2.1 Proposizione. *Valgono i seguenti fatti:*

(i) Se $X = \mathbb{R}^n$, il numero definito in (9) coincide con l'usuale segno del determinante di L.

(ii) Se $L = I - T$ con $T \in L_c(X)$ è un isomorfismo e $B \subset X$ è una palla centrata in 0, si ha

$$\deg(L, B, 0) = \text{sign det}\, L.$$

(iii) La funzione $L \mapsto \text{sign det}\, L$ è localmente costante su $GL_c(X)$, il sottogruppo di $GL(X)$ che consiste degli isomorfismi che sono perturbazioni compatte dell'identità.

(iv) Il sottogruppo $GL_c(X)$ ha esattamente due componenti connesse, su cui la funzione sign det *assume valori opposti.*

Dimostrazione. (i) Sia $L = I - T$ un operatore lineare invertibile su $\mathbb{R}^n$. Dato che il determinante è il prodotto degli autovalori complessi contati con molteplicità algebrica, se λ è un autovalore reale di T di molteplicità algebrica $m(\lambda)$ risulta

$$\text{sign det}(\lambda + \epsilon - T) = (-1)^{m(\lambda)} \text{sign det}(\lambda - \epsilon - T),$$

per ogni $\epsilon > 0$ piccolo. Se λ è reale e molto grande, il determinante di $\lambda I - T$ è positivo. Facciamo decrescere λ fino ad arrivare ad 1. Il segno del determinante può cambiare solamente quando λ coincide con uno degli autovalori di T reali e maggiori di 1, ed in questo caso il segno cambia se e solamente se l'autovalore in questione ha molteplicità dispari. Questo dimostra (i).

Per dimostrare (ii), decomponiamo X in somma diretta di sottospazi chiusi T-invarianti $X = X_1 \oplus X_2$, dove X_1 è l'autospazio generalizzato corrispondente agli autovalori di T reali e maggiori di 1, e dove X_2 è l'autospazio generalizzato corrispondente alla rimanente parte dello spettro di T. Per la formula del grado per mappe prodotto si ha

$$\deg(L, B, 0) = \deg(L, (B \cap X_1) \times (B \cap X_2), 0) = \deg(L|_{X_1}, B \cap X_1, 0) \cdot \deg(L|_{X_2}, B \cap X_2, 0).$$

La restrizione di L a $X_2 \cap \overline{B}$ è omotopa all'identità tramite l'omotopia della forma identità più mappa compatta

$$(\lambda, x) \mapsto x - \lambda T x.$$

Questa omotopia è ammissibile poichè $x - \lambda T x = 0$ con $\lambda \in [0, 1]$ implica $x = 0$. Quindi

$$\deg(L|_{X_2}, B \cap X_2, 0) = 1.$$

D'altra parte X_1 ha dimensione finita, e per il punto (i),

$$\deg(L|_{X_1}, B \cap X_1, 0) = \text{sign det}\, L|_{X_1} = \text{sign det}\, L,$$

il che conclude la dimostrazione di (ii).

L'enunciato (iii) segue dal punto (ii), insieme alla proprietà di omotopia del grado di Leray-Schauder (ma si potrebbe anche darne una dimostrazione diretta usando i risultati sulla continuità degli autovalori).

Per dimostrare (iv), iniziamo con l'osservare che $\text{sign det}\, I = 1$, e che se L è una *riflessione rispetto ad un iperpiano*, cioè se è un isomorfismo del tipo

$$Lx = x - Tx, \quad Tx = 2\langle \eta, x \rangle y,$$

dove $y \in X$ e $\eta \in X^*$ sono tali che $\langle \eta, y \rangle = 1$, allora sign det $L = -1$. Ricordiamo inoltre che le componenti connesse di $GL(n, \mathbb{R})$ sono il sottogruppo ed il suo laterale

$$GL^+(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det A > 0\}, \quad GL^-(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det A < 0\}.$$

Sia ora $L = I - T \in GL_c(X)$. Decomponendo X come nella dimostrazione di (ii), si trova che $L|_{X_2}$ può essere connesso all'identità su X_2 tramite una curva continua di operatori in $GL_c(X_2)$. Se sign det $L =$ sign det $L|_{X_1} = 1$, dal fatto che $GL^+(n, \mathbb{R})$ è connesso, deduciamo che $L|_{X_1}$ può essere connesso all'identità su X_1 tramite una curva continua di operatori in $GL(X_1) = GL_c(X_1)$. Quindi se sign det $L = 1$, L sta nella stessa componente connessa dell'identità di $GL_c(X)$.

Se sign det $L =$ sign det $L|_{X_1} = -1$, dal fatto che anche $GL^-(n, \mathbb{R})$ è connesso, deduciamo che possiamo connettere $L|_{X_1}$ ad una riflessione rispetto ad un iperpiano di X_1 in $GL(X_1) = GL_c(X_1)$,

$$\tilde{L}x = x - 2\langle \eta, x \rangle y,$$

con $y \in X_1$ e $\eta \in X_1^*$, $\langle \eta, y \rangle = 1$. Estendendo η ad un elemento di X^* ponendolo uguale a 0 su X_2, troviamo che $\tilde{L}$ è la restrizione di una riflessione su X rispetto ad un iperpiano che contiene X_2. Quindi nella componente connessa di $GL_c(X)$ contenente L troviamo una riflessione rispetto ad un iperpiano. Per concludere ci basta verificare che due riflessioni rispetto ad iperpiani stanno sempre nella stessa componente connessa di $GL_c(X)$. Consideriamo prima due riflessioni rispetto allo stesso iperpiano,

$$L_0 x = x - 2\langle \eta, x \rangle y_0, \quad L_1 x = x - 2\langle \eta, x \rangle y_1,$$

con $\langle \eta, y_0 \rangle = \langle \eta, y_1 \rangle = 1$. Possiamo connetterle in $GL_c(X)$ tramite il cammino di riflessioni

$$L_t x = x - 2\langle \eta, x \rangle (t y_1 + (1-t) y_0).$$

Analogamente, due riflessioni aventi lo stesso autovettore y,

$$L_0 x = x - 2\langle \eta_0, x \rangle y, \quad L_1 x = x - 2\langle \eta_1, x \rangle y,$$

sono connesse in $GL_c(X)$ dal cammino

$$L_t x = x - 2\langle t\eta_1 + (1-t)\eta_0, x \rangle y.$$

Questo mostra che due riflessioni qualsiasi sono connesse in $GL_c(X)$ da un cammino di riflessioni.

□

Supponiamo che y sia un valore regolare di una mappa $f \in C^1(\Omega, X)$ che sia una perturbazione compatta dell'identità. Dato che $Df(x)$ è una perturbazione lineare compatta dell'identità, deduciamo che $Df(x)$ è un isomorfismo per ogni $x \in f^{-1}(\{y\})$. Quindi $f^{-1}(\{y\})$ è un sottoinsieme discreto di Ω. Dato che f è propria, questo insieme è pre-compatto in $\overline{\Omega}$. Se supponiamo $y \notin f(\partial\Omega)$, concludiamo che $f^{-1}(\{y\})$ è un insieme finito.

2.2 Proposizione. *Sia $f \in C^0(\overline{\Omega}, X) \cap C^1(\Omega, X)$ una perturbazione compatta dell'identità, e sia $y \in X \setminus f(\partial\Omega)$ un valore regolare di f. Allora*

$$\deg(f, \Omega, y) = \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \text{sign det}\, Df(x).$$

Dimostrazione. Sia $\epsilon > 0$ tale che le palle $B_\epsilon(x)$ per $x \in f^{-1}(\{y\})$ siano contenute in Ω e risultino due a due disgiunte. Per la proprietà di addittività del grado, è sufficiente dimostrare che per ogni $x \in f^{-1}(\{y\})$ si ha

$$\deg(f, B_\epsilon(x), y) = \text{sign det}\, Df(x).$$

Possiamo assumere $x = y = 0$. Usando l'omotopia

$$h(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{t} f(tx) & \text{per } t \in (0, 1], \\ Df(0)x & \text{per } t = 0, \end{cases}$$

si trova che

$$\deg(f, B_\epsilon(0), 0) = \deg(Df(0), B_\epsilon(0), 0).$$

La conclusione segue dal punto (ii) della Proposizione 2.1. □