1.5 Il teorema di separazione di Jordan-Brower.

Il classico teorema di seprzione di Jordan afferma che una curva chiusa semplice divide il piano in esattamente due componenti connesse. In effetti, vale la seguente generalizzazione, dovuta a Brower:

1.1 TEOREMA. *Siano H, K due compatti di $\mathbb{R}^n$, tra loro omeomorfi. Allora $\mathbb{R}^n \setminus H$ e $\mathbb{R}^n \setminus K$ hanno lo stesso numero di componenti connesse.*

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che il complementare di un compatto in $\mathbb{R}^n$ ha esattamente una componente connessa illimitata. Quindi ci basterà considerare le componenti connesse limitate. Indichiamo con $\Xi(K)$ l'insieme delle componenti connesse limitate di $\mathbb{R}^n \setminus K$.

Sia $\mathcal{K}_n$ la categoria i cui oggetti sono i compatti di $\mathbb{R}^n$ e i cui morfismi sono le mappe continue tra di loro. Definiremo un funtore controvariante Γ da $\mathcal{K}_n$ in $\mathcal{GA}$, la categoria dei gruppi abeliani.

Se K è un oggetto di $\mathcal{K}_n$, definiamo $\Gamma(K)$ come il gruppo libero generato dagli elementi di $\Xi(K)$. Se $f : H \to K$ è una mappa continua, definiamo

$$\Gamma(f) = f^* : \Gamma(K) \to \Gamma(H)$$

tramite

$$f^*(Y) = \sum_{X \in \Xi(H)} \deg(\tilde{f}, X, Y)\, X,$$

dove $Y \in \Xi(K)$ e $\tilde{f}$ è una estensione continua di f a tutto $\mathbb{R}^n$. Dato che

$$\tilde{f}(\partial X) \subset \tilde{f}(H) = f(H) \subset K,$$

il grado $\deg(\tilde{f}, X, Y)$ è ben definito e non dipende dalla scelta dell'estensione $\tilde{f}$. Inoltre fissata Y, $\deg(\tilde{f}, X, Y)$ è non nullo soltanto per un numero finito di componenti connesse X. Infatti, a meno di approssimazione possiamo assumere $\tilde{f}$ di classe C^1, e scegliendo un valore regolare $y \in Y$ si ha che $f^{-1}(\{y\})$ è finito, e dunque interseca un numero finito delle componenti connesse di $\mathbb{R}^n \setminus H$.

Dobbiamo dimostrare che Γ è un funtore controvariante. Consideriamo quindi una composizione di mappe continue tra compatti di $\mathbb{R}^n$

$$H \xrightarrow{f} K \xrightarrow{g} L.$$

Se $Z \in \Xi(L)$, per la formula di Leray sul grado di una composizione si ha

$$\begin{aligned}(g \circ f)^*(Z) &= \sum_{X \in \Xi(H)} \deg(\tilde{g} \circ \tilde{f}, X, Z)\, X \\ &= \sum_{X \in \Xi(H)} \sum_{Y \in \Xi(f(\partial X))} \deg(\tilde{f}, X, Y) \cdot \deg(\tilde{g}, Y, Z)\, X.\end{aligned} \tag{8}$$

Fissiamo $X \in \Xi(H)$, e sia $Y \in \Xi(f(\partial X))$. Siano $Y_1, Y_2, \dots$ le componenti connesse limitate di $\mathbb{R}^n \setminus K$ che hanno intersezione non vuota con Y. Dato che $\mathbb{R}^n \setminus K \subset \mathbb{R}^n \setminus f(\partial X)$, ogni Y_j è contenuta in Y, e $Y \setminus \bigcup_j Y_j \subset K$, da cui $f(\overline{Y} \setminus \bigcup_j Y_j) \cap Z = \emptyset$. Ma allora, usando l'addittività numerabile del grado,

$$\deg(\tilde{f}, X, Y) = \deg(\tilde{f}, X, Y_j) \quad \text{e} \quad \deg(\tilde{g}, Y, Z) = \sum_j \deg(\tilde{g}, Y_j, Z),$$

quindi la sommatoria interna in (8) può essere sostituita da una somma sulle componenti connesse limitate di $\mathbb{R}^n \setminus K$, ottenendo

$$(g \circ f)^*(Z) = \sum_{X \in \Xi(H)} \sum_{Y \in \Xi(K)} \deg(\tilde{f}, X, Y) \cdot \deg(\tilde{g}, Y, Z)\, X = f^*(g^*(Z)).$$

Insieme al fatto che $\mathrm{id}^* = \mathrm{id}$, questo implica che Γ è un funtore controvariante. Dalla funtorialità segue che se $f : H \to K$ è un omeomorfismo, allora $f^* : \Gamma(K) \to \Gamma(H)$ è un isomorfismo di gruppi. Dato che due gruppi abeliani liberi sono isomorfi se e solamente se hanno lo stesso numero di generatori, la tesi segue. $\square$

1.2 Osservazione. *Il teorema di separazione di Jordan-Brower è in effetti un caso particolare della più generale dualità di Alexander: se $K \subset \mathbb{R}^n$ è un compatto,*

$$\tilde{H}_{j-1}(\mathbb{R}^n \setminus K) \cong \check{H}^{n-j}(K),$$

dove $\tilde{H}_*$ indica l'omologia singolare ridotta e $\check{H}^*$ la coomologia di Čech. Si veda [Dol80], VIII.§8.15.

1.6 Il teorema di Borsuk

1.3 Teorema. (Teorema di Borsuk) *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato simmetrico rispetto a 0 e contenente lo 0. Sia $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ una mappa continua, dispari (cioè $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in \overline{\Omega}$), e tale che $0 \notin f(\partial\Omega)$. Allora $\deg(f, \Omega, 0)$ è un numero dispari.*

Dimostrazione. Dato che f è dispari, $f(0) = 0$, e se x è soluzione di $f(x) = 0$ anche $-x$ lo è. Se f è di classe $C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e 0 è un valore regolare di f, si ha

$$\deg(f, \Omega, 0) = \text{sign det}\, Df(0) + \sum_{\substack{x \in \Omega \setminus \{0\} \\ f(x)=0}} \text{sign det}\, Df(x).$$

L'ultima sommatoria contiene un numero pari di termini, ciasuno dei quali vale 1 o -1. Quindi il numero sopra è dispari[1].

Grazie alla continuità del grado nella topologia di $C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, il teorema sarà dimostrato se riusciremo a provare che è possibile approssimare f uniformemente con funzioni C^1, dispari, ed aventi 0 come valore regolare.

Non ci sono problemi ad approssimare f con funzioni C^1 dispari. Infatti se g_1 è un'approssimante C^1 di f, la mappa

$$g_2(x) := \frac{1}{2}\left(g_1(x) - g_1(-x)\right)$$

è ancora un'approssimante C^1 di f ed è dispari. È anche facile rendere 0 un punto regolare: basta perturbare ulteriormente g_2,

$$g_3(x) := g_2(x) - ax,$$

per $|a|$ piccolo, tale che a non sia un autovalore di $Df_2(0)$.

Supponiamo dunque f di classe $C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e 0 punto regolare. Il nostro scopo sarà mostrare che f è approssimabile uniformemente da mappe che in più hanno 0 come valore regolare. Poniamo

$$\Omega_k = \left\{x \in \Omega \mid x^i \neq 0 \text{ per qualche } i \leq k\right\},$$

per ogni $k = 1, \dots, n$. Quindi $\Omega_1 \subset \cdots \subset \Omega_n = \Omega \setminus \{0\}$. Realizzeremo l'approssimazione voluta in n passi, costruendo $f_k \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ dispari, con $\|f_k - f\|_\infty < k\epsilon$, e tale che $f_k|_{\Omega_k}$ abbia 0 come valore regolare.

Ponendo $f_0 = f$, possiamo assumere di aver costruito la funzione f_k, per un certo $0 \leq k \leq n-1$, e dobbiamo mostrare come si costruisce f_{k+1}. Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞, dispari, tale che $\varphi'(0) = 0$ e $\varphi(s) \neq 0$ per ogni $s \neq 0$ (ad esempio, $\varphi(s) = s^3$). Consideriamo la mappa

$$g : \left\{x \in \Omega \mid x^{k+1} \neq 0\right\} \to \mathbb{R}^n, \quad g(x) = \frac{f_k(x)}{\varphi(x^{k+1})}.$$

Dato $y \in \mathbb{R}^n$ valore regolare di g, poniamo

$$f_{k+1}(x) := f_k(x) - \varphi(x^{k+1})y.$$

Scegliendo il valore regolare y di norma piccola, possiamo assumere che $\|f_{k+1} - f_k\|_\infty < \epsilon$.

[1] Si noti anche che da f dispari segue Df pari, da cui $\text{sign det}\, Df(x) = \text{sign det}\, Df(-x)$, quindi il grado di f può assumere qualunque valore dispari.

Affermiamo che 0 è un valore regolare per la restrizione di f_{k+1} all'aperto

$$\left\{x \in \Omega \mid x^{k+1} \neq 0\right\}.$$

Infatti, se x è un punto di tale aperto tale che $f_{k+1}(x) = 0$, risulta $g(x) = y$, quindi $Dg(x)$ è invertibile. D'altra parte

$$Dg(x) = \frac{1}{\varphi(x^{k+1})} Df_k(x) + f_k(x) D(1/\varphi(x^{k+1})) = \frac{1}{\varphi(x^{k+1})} \left(Df_k(x) - \frac{\varphi'(x^{k+1})}{\varphi(x^{k+1})} f_k(x) dx^{k+1} \right)$$
$$= \frac{1}{\varphi(x^{k+1})} \left(Df_k(x) - \varphi'(x^{k+1}) y dx^{k+1} \right) = \frac{1}{\varphi(x^{k+1})} Df_{k+1}(x),$$

quindi anche $Df_{k+1}(x)$ è invertibile, come volvamo dimostrare.

Per verificare che 0 è un valore regolare per la restrizione di f_{k+1} ad Ω_{k+1}, ci restano da esaminare le soluzioni $x \in \Omega_{k+1}$ di $f_{k+1}(x) = 0$ tali che $x^{k+1} = 0$. Se x è un punto siffatto, necessariamente x appartiene a Ω_k e $f_k(x) = f_{k+1}(x) = 0$. Quindi per le proprietà di f_k, $Df_k(x)$ è invertibile. D'altra parte

$$Df_{k+1}(x) = Df_k(x) - \varphi'(x^{k+1}) y dx^{k+1} = Df_k(x) - \varphi'(0) y dx^{k+1} = Df_k(x),$$

dunque $Df_{k+1}(x)$ è invertibile, e f_{k+1} ha le proprietà richieste. $\square$

Invarianza del dominio. Il teorema di Borsuk può essere usato per dimostrare il classico teorema sull'invarianza del dominio:

1.4 Teorema. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una mappa continua e localmente iniettiva. Allora la mappa f è aperta.*

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare che per ogni $x_0 \in \Omega$, $f(x_0)$ è interno a $f(\Omega)$. A meno di comporre a destra e a sinistra con traslazioni, possiamo suppporre che $x_0 = f(x_0) = 0$.

Sia $r > 0$ tale che $f|_{\overline{B_r(0)}}$ è iniettiva. Se dimostriamo che

$$\deg(f, B_r(0), 0) \neq 0,$$

abbiamo concluso. Infatti, in questo caso

$$\deg(f, B_r(0), y) \neq 0,$$

per ogni $|y|$ piccolo - diciamo $|y| < \delta$ - il che implica che $B_\delta(0) \subset f(B_r(0))$.

Definiamo l'omotopia

$$h(t, x) = f\left(\frac{x}{1+t}\right) - f\left(-\frac{tx}{1+t}\right), \quad t \in [0,1],\ x \in \overline{B_r}(0).$$

Risulta $h(0, \cdot) = f$, $h(1, \cdot)$ mappa dispari. Se esistesse $(t, x) \in [0,1] \times \partial B_r(0)$ tale che $h(t,x) = 0$, per l'iniettività di f su $\overline{B_r}(0)$ si avrebbe

$$\frac{x}{1+t} = -\frac{tx}{1+t},$$

ossia $x = 0$, assurdo. Quindi possiamo applicare l'invarianza del grado per omotopie, ottenendo

$$\deg(f, B_r(0), 0) = \deg(h(1, \cdot), B_r(0), 0),$$

e per il Teorema di Borsuk 1.3 questo grado è non zero. $\square$

1.5 Esercizio. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato simmetrico rispetto a 0 e non contenente lo 0. Sia $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ una funzione continua, dispari e tale che $0 \notin f(\partial\Omega)$. Dimostrare che $\deg(f, \Omega, 0)$ è un numero pari.*

1.6 Esercizio. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, simmetrico rispetto a 0 e contenente lo 0.*

(i) Siano $k < n$ e $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}^k$ una mappa continua dispari. Dimostrare che esiste $x \in \partial\Omega$ tale che $f(x) = 0$.

(ii) Siano $k < n$ e $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}^k$ una mappa continua. Dimostrare che esiste $x \in \partial\Omega$ tale che $f(x) = f(-x)$.

(iii) Supponiamo che $\partial\Omega$ sia ricoperto da n chiusi $X_1, \dots, X_n$. Allora almeno uno di essi contiene due punti antipodali x e $-x$.

1.7 Esercizio. *Siano $A_1, \dots, A_n$ sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che esiste un iperpiano che divide ciascun A_j in due sottoinsiemi di ugual misura.*

1.8 Esercizio. *Supponiamo che $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sia una mappa continua, iniettiva, e propria (cioè, $f^{-1}(K)$ è compatto per ogni K compatto). Dimostrare che f è un omeomorfismo (surgettivo).*

Sia $p \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ un polinomio di grado k, e consideriamo l'operatore differenziale di ordine k con coefficienti costanti

$$P = p\left(\frac{\partial}{\partial z^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z^n}\right).$$

Ricordiamo che l'operatore P si dice *ellittico* se, indicando con p_k la parte omogenea di grado k del polinomio p, si ha $p(x^1, \dots, x^n) \neq 0$ per ogni $x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

1.9 Esercizio. *Dimostrare che se $n \geq 3$, ogni operatore differenziale con coefficienti costanti ellittico ha ordine pari.*

2 Il grado topologico in dimensione infinita

2.1 Mappe compatte

Il grado topologico e le sue applicazioni - quali ad esempio il teorema di punto fisso di Brower - non si estendono alla classe di tutte le mappe continue su spazi di Banach infinito-dimensionali. Ad esempio, se B indica la palla unitaria dello spazio di Hilbert ℓ_2 munito della norma $|x|_2 = \left(\sum_{j=0}^{\infty} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$, la mappa continua

$$f : \overline{B} \to \overline{B}, \quad (x_0, x_1, x_2, \dots) \mapsto (\sqrt{1 - |x|_2}, x_0, x_1, \dots),$$

manda $\overline{B}$ in sé, ma non possiede alcun punto fisso: infatti $f(\overline{B}) \subset \partial B$, ma la restrizione di f a ∂B è lo shift iniettivo.

È anche possibile dimostrare che se X è uno spazio vettoriale normato di dimensione infinita e B è la sua palla unitaria, ∂B è sempre un retratto di $\overline{B}$, cioè esiste una mappa continua $r : \overline{B} \to \partial B$ la cui restrizione a ∂B è l'identità (si veda [Dei85], Remark 8.7). Allora la mappa continua $f : \overline{B} \to \overline{B}$, $f(x) = -r(x)$, non ha punti fissi. Ciò mostra che il teorema di Brower non vale mai in spazi vettoriali normati di dimensione infinita.

L'esistenza di una retrazione $r : \overline{B} \to \partial B$ mostra anche che su spazi vettoriali normati di dimensione infinita non può esistere una teoria del grado che goda delle buone proprietà viste nel caso finito dimensionale. Si consideri infatti l'omotopia

$$h : [0,1] \times \overline{B} \to \overline{B}, \quad h(t,x) = \lambda r(x) + (1-\lambda)x.$$

Se $x \in \partial B$, $h(\lambda, x) = x$, quindi $h([0,1] \times \partial B)$ non contiene 0. D'altra parte, $h(0,\cdot) = \mathrm{id}$, il cui grado rispetto allo 0 dovrebbe valere 1, mentre $h(1,\cdot) = r$, il cui grado rispetto allo 0 dovrebbe valere 0, dato che l'equazione $r(x) = 0$ non ha soluzione in $\overline{B}$.

Per poter generalizzare il teorema di punto fisso di Brower e la teoria del grado occorrerà restringersi ad opportune sottoclassi dello spazio di tutte le mappe continue.

2.1 DEFINIZIONE. *Siano X uno spazio metrico, Y uno spazio di Banach. Una mappa continua $K : X \to Y$ si dice* compatta *se manda sottoinsiemi limitati in sottoinsiemi pre-compatti.*

Nel caso di operatori lineari tra spazi di Banach, questa definizione coincide con l'usuale nozione di compattezza. Vediamo le principali proprietà delle mappe compatte.

Ogni mappa $R : X \to Y$ continua, limitata, e di rango finito (cioè tale che $R(X) \subset Y_0$, con $Y_0 \subset Y$ sottospazio vettoriale di dimensione finita) è compatta. Infatti i limitati di Y_0 sono pre-compatti.

Limite uniforme di mappe compatte è compatto. Infatti se la successione di mappe $K_n : X \to Y$ converge uniformemente ad una mappa $K : X \to Y$ e $A \subset X$,

$$K(A) \subset K_n(A) + \overline{B}_{\|K_n - K\|_\infty}(0),$$

il che mostra che se $K_n(A)$ è pre-compatto per ogni n, l'insieme $K(A)$ è totalmente limitato, e dunque pre-compatto.

Supponiamo che X sia limitato. Allora $K \in C^0(X, Y)$ è compatta se e solamente se K è limite unforme di mappe continue e limitate di rango finito. Queste mappe si possono prendere a valori in $\operatorname{conv} K(A)$. Per quanto visto sopra, se K è limite uniforme di mappe continue e limitate di rango finito allora K è compatta. Se K è compatta e $\epsilon > 0$, dalla compattezza di $\overline{K(X)}$ segue che esistono $y_1, \dots, y_n \in K(X)$ tali che

$$\overline{K(X)} \subset \bigcup_{j=1}^{n} B_\epsilon(y_j).$$

Sia $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ una partizione dell'unità su $\overline{K(X)}$ subordinata al ricoprimento $\{B_\epsilon(y_j)\}_{j=1}^n$: le φ_j sono funzioni continue a valori in $[0, 1]$ tali che $\operatorname{supp} \varphi_j \subset B_\epsilon(y_j)$ e $\sum_{j=1}^n \varphi_j = 1$ su $\overline{K(X)}$. La mappa

$$R(x) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(K(x)) y_j,$$

è continua, limitata, ed ha rango finito, prendendo valori nel sottospazio vettoriale generato dai vettori $y_1, \dots, y_n$. Inoltre se $x \in X$,

$$\|K(x) - R(x)\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(K(x))(K(x) - y_j) \right\| < \epsilon,$$

dato che nella somma compare una combinazione convessa di vettori di norma minore di ϵ. La mappa R è l'approssimante voluta. Si noti che R prende valori in $\operatorname{conv} K(X)$.

2.2 OSSERVAZIONE. *In generale, un operatore lineare compatto tra spazi di Banach non è approssimabile in norma con operatori lineari di rango finito (questo è vero ad esempio se lo spazio di arrivo è un Hilbert). La proprietà appena dimostrata mostra che è comunque possibile approssimarlo uniformemente sui limitati con operatori* nonlineari *di rango finito.*

Sia $\Omega \subset X$ un aperto di uno spazio di Banach, e sia $K : \Omega \to Y$ una mappa compatta. Se K è differenziabile in $x_0 \in \Omega$ allora l'operatore $DK(x_0) \in L(X, Y)$ è compatto. Infatti

$$DK(x_0)\xi = \lim_{h \to 0} \frac{K(x_0 + h\xi) - K(x_0)}{h},$$

ed il limite è uniforme per $\|\xi\| \leq 1$. Quindi la restrizione di $DK(x_0)$ alla palla unitaria è limite uniforme di mappe (nonlineari) compatte, ed è dunque compatta.

Sia A un sottoinsieme chiuso e limitato di uno spazio metrico X, e sia $K : A \to Y$ una mappa compatta. Allora esiste un'estensione continua $\tilde{K} : X \to Y$ di K che risulta ancora compatta. Ricordiamo infatti il seguente teorema di Dugundji:

2.3 Teorema. ([Dug78], capitolo IX.6) *Sia X uno spazio metrico, $A \subset X$ un chiuso, e Y uno spazio vettoriale normato. Ogni mappa continua $f : A \to Y$ ammette un'estensione continua $\tilde{f} : X \to Y$ a valori in* $\operatorname{conv} f(A)$.

Inoltre è facile dimostrare che in uno spazio vettoriale normato il convessificato di un insieme totalmente limitato è totalmente limitato. Metendo assieme questi fatti si ottiene il risultato di estensione voluto.

Sia A un sottoinsieme chiuso limitato di uno spazio di Banach X, e sia $K : A \to X$ una mappa compatta. Allora la mappa $F = I + K$ è propria e chiusa. Infatti, se la successione $(F(x_n)) = (x_n + K(x_n))$ è compatta, dalla compattezza di $K(x_n)$ segue la compattezza di (x_n).

2.2 Il teorema di punto fisso di Schauder

Possiamo ora generalizzare il teorema di punto fisso di Brower agli spazi di Banach di dimensione infinita:

2.4 Teorema. (Teorema di punto fisso di Schauder) *Siano X uno spazio di Banach e sia $C \subset X$ un sottoinsieme convesso, chiuso, e limitato. Se $K : C \to C$ è una mappa compatta, allora K possiede almeno un punto fisso.*

Dimostrazione. Sia $K_n : C \to X$ una successione di mappe continue tali che $K_n(C) \subset X_n$ con X_n sottospazio vettoriale di dimensione finita di X, e $K_n \to K$ uniformemente. Possiamo anche assumere che $K_n(C) \subset \operatorname{conv} K(C) \subset \operatorname{conv} C = C$. Quindi K_n manda il convesso $C \cap X_n$ in sé, e dato che X_n ha dimensione finita per il teorema di Brower la mappa K_n ha un punto fisso $x_n \in C \cap X_n$. Dato che K è compatta, a meno di sottosuccessioni $K(x_n)$ converge a $x \in C$. Dato che $K_n \to K$ uniformemente, anche $x_n = K_n(x_n)$ converge a x, da cui $K(x) = x$. □

Come prima applicazione del teorema di Schauder, dimostriamo il celebre risultato di Peano sull'esistenza di soluzioni dei problemi di Cauchy.

2.5 Teorema. (Teorema di Peano) *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto, e sia $f : [t_0, t_1) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ una mappa continua. Per ogni $y_0 \in \Omega$ esiste $\tau > 0$ ed una curva $u \in C^1([t_0, t_0 + \tau), \Omega)$ che risolve il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), \\ u(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Dato che stiamo studiando un problema locale, ci interessa solamente il germe di f in (t_0, y_0). Possiamo quindi modificare f fuori da un intorno di (t_0, y_0), e dedurre il teorema di Peano dal seguente risultato di esistenza globale:

2.6 Teorema. *Sia $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una mappa continua tale che*

$$|f(t, x)| \leq c(1 + |x|), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Allora per ogni $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ esiste $u \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ che risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), \\ u(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Dimostrazione. Possiamo supporre $t_0 = 0$. Fissato $T > 0$, il problema di Cauchy su $[-T, T]$ è equivalente a trovare un punto fisso della mappa

$$F : C^0([-T, T]) \to C^0([-T, T]), \quad F(u)(t) = y_0 + \int_0^t f(s, u(s))\, ds.$$

Dalla stima di crescita per f segue che se $\|y\|_\infty \leq R$ allora

$$\|F(u)\|_\infty \leq |y_0| + cT(1 + \|u\|_\infty) \leq |y_0| + cT(1 + R).$$

Se scegliamo $T < 1/c$ e $R := (|y_0| + cT)/(1 - cT)$, deduciamo che F manda $\overline{B}_R$, la palla chiusa di raggio R di $C^0([-T, T])$, in sé.

Se $u \in \overline{B}_R$,

$$|F(u)(t) - F(u)(t')| = \left| \int_{t'}^{t} f(s, u(s))\, ds \right| \leq |t - t'|(1 + cR),$$

quindi l'insieme $F(\overline{B}_R)$ è equi-Lipschitz. Essendo anche equilimitato (da R), per il teorema di Ascoli-Arzelà l'insieme $F(\overline{B}_R)$ è pre-compatto in $C^0([-T, T])$. Quindi la mappa F è compatta, e per il teorema di Schauder F ha un punto fisso in $\overline{B}_R$.

Pertanto esiste soluzione del problema di Cauchy in $[-T, T]$. Dato che la costante T non dipende dalla condizione iniziale y_0, è possibile iterare il procedimento ed ottenere una soluzione globale. □

2.3 Il grado di Leray-Schauder

Estenderemo la teoria del grado alla classe di mappe su aperti di spazi di Banach che siano perturbazioni compatte dell'identità. Premettiamo il seguente risultato di riduzione per il grado finito-dimensionale:

2.7 Proposizione. *Siano $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \oplus \mathbb{R}^{n_2}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ una mappa della forma*

$$f(x) = x + g(x),$$

con $g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^{n_1}$. Sia $y \in \mathbb{R}^{n_1} \setminus f(\overline{\Omega})$. Allora

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(f|_{\Omega \cap \mathbb{R}^{n_1}}, \Omega \cap \mathbb{R}^{n_1}, y).$$

Dimostrazione. Possiamo assumere che f sia di classe C^1 e che $y = 0$. Siano $a_i \in C^\infty(\mathbb{R}^{n_i})$, $i = 1, 2$, funzioni con integrale 1 e supporto contenuto in un piccolo intorno di 0. Per definizione,

$$\deg(f, \Omega, 0) = \int_{\mathbb{R}^n} a_1(x_1 + g(x_1, x_2)) a_2(x_2) |\det Df(x_1, x_2)|\, dx_1\, dx_2.$$

Dalla forma di f segue che

$$\det Df(x_1, x_2) = \det(I + D_1 g(x_1, x_2)).$$

Quindi,

$$\deg(f, \Omega, 0) = \int_{\mathbb{R}^n} a_1(x_1 + g(x_1, x_2)) a_2(x_2) |\det D_1 g(x_1, x_2)|\, dx_1\, dx_2.$$

Facendo tendere la funzione a_2 verso la distribuzione δ concentrata in 0, si ottiene

$$\deg(f, \Omega, 0) = \int_{\mathbb{R}^{n_1}} a_1(x_1 + g(x_1, 0)) |\det(I + D_1 g(x_1, 0))|\, dx_1 = \deg(f|_{\Omega \cap \mathbb{R}^{n_1}}, \Omega \cap \mathbb{R}^{n_1}, 0),$$

come si voleva dimostrare. □

Sia X uno spazio di Banach, sia $\Omega \subset X$ un aperto limitato, e sia $f : \overline{\Omega} \to X$ una mappa continua della forma

$$f(x) = x + K(x),$$

con $K : \overline{\Omega} \to X$ mappa compatta. Sotto la consueta ipotesi $y \notin f(\partial\Omega)$, vorremmo definire l'intero

$$\deg(f, \Omega, y),$$

generalizzando il grado topologico. Dato che f è una perturbazione compatta dell'identità, $f(\partial\Omega)$ è un chiuso. Quindi possiamo trovare $\epsilon > 0$ tale che $B_\epsilon(y) \cap f(\partial\Omega) = \emptyset$. Sia $R : \overline{\Omega} \to X_0 \subset X$

una mappa continua a valori nel sottospazio di dimensione finita X_0 tale che $\|R - K\|_\infty < \epsilon/2$. Possiamo supporre che X_0 contenga il vettore y. La mappa

$$g(x) = x + R(x)$$

manda $\overline{\Omega} \cap X_0$ in X_0 e

$$g(\partial(\Omega \cap X_0)) \subset f(\partial(\Omega \cap X_0)) + B_{\epsilon/2}(0) \subset f(\partial\Omega) + B_{\epsilon/2}(0),$$

non contiene y, quindi possiamo definire il *grado di Leray-Schauder* di f su Ω rispetto a y come

$$\deg(f, \Omega, y) := \deg(g|_{\Omega\cap X_0}, \Omega \cap X_0, y).$$

Verifichiamo che questa definizione non dipende dalla scelta dell'approssimante di rango finito.

La Proposizione 2.7 implica che se rimpiazziamo X_0 con un sottospazio X_1 che lo contiene si ha

$$\deg(g|_{\Omega\cap X_0}, \Omega \cap X_0, y) = \deg(g|_{\Omega\cap X_1}, \Omega \cap X_1, y).$$

Se ora R' è un'altra approssimante a meno di $\epsilon/2$ di K a valori in X_0' e $g'(x) = x+R'(x)$, scegliendo $X_1 = X_0 + X_0'$ si ha

$$\deg(g|_{\Omega\cap X_0}, \Omega \cap X_0, y) = \deg(g|_{\Omega\cap X_1}, \Omega \cap X_1, y),$$
$$\deg(g'|_{\Omega\cap X_0'}, \Omega \cap X_0', y) = \deg(g'|_{\Omega\cap X_1}, \Omega \cap X_1, y).$$

Infine, posto

$$h(\lambda, x) = \lambda g(x) + (1-\lambda)g'(x),$$

dato che le stime $\|g - f\|_\infty < \epsilon/2$ e $\|g' - f\|_\infty < \epsilon/2$ implicano

$$y \notin h([0,1] \times \partial(\Omega \cap X_1)),$$

per l'invarianza per omotopia si conclude

$$\deg(g'|_{\Omega\cap X_1}, \Omega \cap X_1, y) = \deg(g|_{\Omega\cap X_1}, \Omega \cap X_1, y),$$

come volevamo mostrare.

Riferimenti bibliografici

[Dei85] K. Deimling, *Nonlinear functional analysis*, Springer, Berlin, 1985.

[Dol80] A. Dold, *Lectures on algebraic topology*, Springer, Berlin, 1980.

[Dug78] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon Inc., Boston, Mass., 1978, Reprinting of the 1966 original, Allyn and Bacon Series in Advanced Mathematics.

[Nir70] L. Nirenberg, *Topics in nonlinear functional analysis*, Courant lecture notes, Amer. Math. Soc., New York, 1970.