Parte I
Teoremi di funzione implicita

1 Teoremi di funzione implicita in spazi di Banach

1.1 Il teorema della funzione implicita

Data una mappa $F : X \to Y$ tra spazi metrici, indicheremo con $\operatorname{lip} F$ la sua costante di Lipschitz:

$$\operatorname{lip} F := \sup_{x \neq y \in X} \frac{d(F(x), F(y))}{d(x, y)} \in [0, +\infty].$$

Le mappe Lipschitziane sono quelle per cui $\operatorname{lip} F < +\infty$.

1.1 LEMMA. *Sia $(Y, |\cdot|)$ uno spazio di Banach e sia $H : B_r(0) \to Y$ una mappa Lipschitziana con $\operatorname{lip} H = \theta < 1$. Se $|H(0)| < (1-\theta)r$ allora esiste unico $y \in B_r(0)$ tale che $y + H(y) = 0$.*

Dimostrazione. Si tratta di una semplice applicazione del teorema delle contrazioni. Se $y+H(y) = y' + H(y')$ allora

$$|y - y'| = |H(y) - H(y'| \leq \theta |y - y'|,$$

quindi $y = y'$, il che mostra che l'equazione $y + H(y) = 0$ ha al più una soluzione. Sia $s \in [0, r)$ tale che $|H(0)| = (1-\theta)s$. Se $y \in \overline{B_s}(0)$, allora

$$|H(y)| \leq |H(y) - H(0)| + |H(0)| \leq \theta |y| + (1-\theta)s \leq s.$$

Quindi $-H$ è una contrazione di $\overline{B_s}(0)$ in se e come tale ha un punto fisso $y \in \overline{B_s}(0) \subset B_r(0)$, che quindi risolve $y + H(y) = 0$. $\square$

1.2 ESERCIZIO. *Dimostrare che se $H : Y \to H$ è θ-Lipschitziana con $\theta < 1$, allora $I + H$ è un omeomorfismo di Y su Y, con $\operatorname{lip}(I + H)^{-1} \leq 1/(1-\theta)$. Cosa si può dire se la θ-contrazione H è definita in un aperto di Y?*

1.3 TEOREMA. (Teorema della funzione implicita) *Siano Y, Z spazi di Banach, U uno spazio topologico, $x_0 \in U$, $y_0 \in Y$, $V \subset Y$ intorno di y_0. Supponiamo che la mappa $F : U \times V \to Z$ sia continua, differenziabile rispetto alla seconda variabile, e che la mappa $(x, y) \mapsto D_2F(x, y) : U \times V \to L(Y, Z)$ sia continua. Supponiamo inoltre che $F(x_0, y_0) = 0$ e che $D_2F(x_0, y_0)$ sia un isomorfismo. Allora, esistono un intorno aperto U_0 di x_0 in U, $r > 0$ ed una mappa continua $G : U_0 \to B_r(y_0)$ tale che*

$$\{(x, y) \in U_0 \times B_r(y_0) \mid F(x, y) = 0\} = \operatorname{graf} G := \{(x, y) \in U_0 \times B_r(y_0) \mid y = G(x)\}.$$

Se inoltre U è un aperto in uno spazio di Banach X e F è di classe C^k su $U \times V$, con $1 \leq k \leq \infty$, anche G risulta di classe C^k e

$$DG(x) = -D_2F(x, G(x))^{-1} D_1F(x, G(x)) \tag{1}$$

per ogni $x \in U_0$.

Dimostrazione. A meno di traslazioni possiamo supporre che $y_0 = 0$. Poniamo $T := D_2F(x_0, 0) \in L(Y, Z)$. L'equazione $F(x, y) = 0$ è equivalente a $y + H(x, y) = 0$, dove $H(x, y) := T^{-1}F(x, y) - y$. Dato che

$$D_2H(x_0, 0) = T^{-1}D_2F(x_0, 0) - I_Y = 0,$$

per la continuità di D_2F esistono $\theta \in [0, 1)$, un intorno U_1 di x_0 e $r > 0$ tali che $|D_2H(x, y)| \leq \theta$ se $x \in U_1$ e $|y| < r$. Osserviamo per inciso che $1 > |D_2H(x, y)| = |T^{-1}D_2F(x, y) - I_Y|$ implica che $T^{-1}D_2F(x, y)$ è un automorfismo di Y, quindi

$$D_2F(x, y) \text{ è un isomorfismo per ogni } (x, y) \in U_1 \times B_r(0). \tag{2}$$

Inoltre, $|H(x,y) - H(x,y')| \le \theta |y - y'|$ su $U_1 \times B_r(0)$.

Dato che $H(x_0, 0) = 0$, per la continuità di $x \mapsto H(x, 0)$ esiste un intorno $U_0 \subset U_1$ di x_0 tale che $|H(x,0)| < (1-\theta)r$ su U_0. Sia $x \in U_0$. Per il Lemma 1.1, esiste unico $G(x) \in B_r(0)$ tale che $G(x) + H(x, G(x)) = 0$. Se $x, x' \in U_0$, da

$$G(x) + H(x, G(x)) = 0 = G(x') + H(x', G(x'))$$

e dal fatto che H è θ-Lipschitz nella seconda variabile su $U_0 \times B_r(0)$, si ha che

$$|G(x') - G(x)| = |H(x', G(x')) - H(x, G(x))| \le |H(x', G(x')) - H(x', G(x))|$$
$$+ |H(x', G(x)) - H(x, G(x))| \le \theta |G(x') - G(x)| + \|T^{-1}\| \, |F(x', G(x)) - F(x, G(x))|.$$

Quindi

$$|G(x') - G(x)| \le \frac{\|T^{-1}\|}{1-\theta} |F(x', G(x)) - F(x, G(x))| \tag{3}$$

tende a 0 per $x' \to x$, per la continuità di F, e G risulta continua.

Supponiamo ora che U sia un aperto di uno spazio di Banach X e che F sia di classe C^1. Possiamo allora supporre che $x_0 = 0$. Dimostreremo che G è differenziabile in U_0 e che vale l'identità (1). Per (2), ogni punto $(x, G(x))$, con $x \in U_0$, soddisfa le ipotesi del teorema, quindi è sufficiente dimostrare che G è differenziabile in $x_0 = 0$ e che vale (1) per $x = x_0$. Da (3) con $x = 0$ segue

$$|G(x')| \le \frac{\|T^{-1}\|}{1-\theta} |F(x', 0)| \le \frac{\|T^{-1}\|}{1-\theta} \sup_{\lambda \in [0,1]} \|D_1 F(\lambda x', 0)\| \, |x'|,$$

quindi $G(x) = O(x)$ per $x \to 0$. Per la differenziabilità di F si ha quindi

$$0 = F(x, G(x)) = D_1 F(0,0) x + D_2 F(0,0) G(x) + o(x) \quad \text{per } x \to 0,$$

da cui, applicando $D_2 F(0,0)^{-1}$,

$$G(x) = -D_2 F(0,0)^{-1} D_1 F(0,0) x + o(x) \quad \text{per } x \to 0,$$

il che dimostra la differenziabilità di G in 0 e la formula (1) per $x = 0$.

Se infine F è di classe C^k con $2 \le k \le \infty$, la formula (1) ed un argomento induttivo mostrano che G ha la stessa regolarità. □

1.4 OSSERVAZIONE. *Dalla dimostrazione segue che la tesi del teorema vale con un intorno U_0 di x_0 ed una costante r tali che $\|T^{-1} D_2 F - I_Y\| \le \theta < 1$ su $U_0 \times B_r(y_0)$ e $|F(x, y_0)| < (1-\theta) r$ su U_0.*

1.5 OSSERVAZIONE. *Supponiamo che U sia uno spazio metrico e che la F sia uniformemente continua nella prima variabile, uniformemente rispetto alla seconda. Supponiamo cioè che la F abbia un modulo di continuità ω tale che*

$$|F(x,y) - F(x', y)| \le \omega(d(x, x')) \quad \forall x, x' \in U, \ \forall y \in V.$$

La disuguaglianza (3) mostra allora che un modulo di continuità per la funzione G è $c\omega$, con $c = \|T^{-1}\|/(1-\theta)$. In particolare, se F è α-Hölderiana rispetto alla prima variabile, uniformemente rispetto alla seconda, anche la G risulta α-Hölderiana.

1.6 OSSERVAZIONE. *La dimostrazione del teorema esibisce anche uno schema iterativo per la costruzione della mappa G. Infatti $G(x)$ è il punto fisso della contrazione $y \mapsto -H(x,y) = y - T^{-1} F(x,y)$. Quindi $G(x)$ è il limite della successione definita per ricorrenza da*

$$u_0 = y_0, \quad u_{n+1} = u_n - T^{-1} F(x, u_n).$$

Torneremo su questo fatto in seguito.

1.7 Esercizio. *Per l'esistenza e continuità della mappa G è possibile indebolire l'ipotesi di differenziabilità di F. Si mostri infatti che è sufficiente assumere che esista un isomorfismo lineare $T : Y \to Z$ tale che*

$$|F(x,y) - F(x,y') - T(y-y')| \leq k|y-y'|,$$

per ogni x in un intorno di x_0, y, y' in un intorno di y_0, con $k < 1/\|T^{-1}\|$.

Risulta molto utile ridurre al minimo le ipotesi di regolarità nei teoremi di funzione implicita. Vedremo infatti che a molti problemi "lisci" sono associate mappe tra spazi di Banach che lisce non sono.

1.2 Conseguenze

Vediamo le conseguenze più importanti del teorema della funzione implicita.

1.8 Teorema. (Teorema della funzione inversa). *Siano X, Y spazi di Banach, U un intorno di x_0 in X, ed $F : U \to Y$ una mappa di classe C^k, $1 \leq k \leq \infty$. Se $DF(x_0) \in L(X,Y)$ è un isomorfismo, allora esiste un intorno aperto $V \subset U$ di x_0 in X tale che $F(V)$ è aperto, $F|_V : V \to F(V) \subset Y$ è invertibile e la mappa $F^{-1} : F(V) \to V$ è di classe C^k, con $DF^{-1}(y) = DF(F^{-1}(y))^{-1}$ per ogni $y \in F(V)$.*

In altre parole, F è un C^k-diffeomorfismo locale in x_0.

Dimostrazione. Consideriamo la mappa di classe C^k

$$G : Y \times U \to Y, \quad G(y,x) = F(x) - y.$$

Dato che $G(F(x_0), x_0) = 0$ e $D_2G(F(x_0), x_0) = DF(x_0)$ è un isomorfismo, per il teorema della funzione implicita esistono W intorno aperto di $F(x_0)$, V_0 intorno aperto di x_0, ed una mappa $H : W \to V_0$ di classe C^k tale che

$$\{(y,x) \in W \times V_0 \mid F(x) = y\} = \operatorname{graf} H. \tag{4}$$

Se $y \in W$ allora $(y, H(y)) \in \operatorname{graf} H$, quindi per (4), $F(H(y)) = y$ per ogni $y \in W$.

L'insieme $H(W)$ è la proiezione sul secondo fattore dell'insieme (4), quindi coincide con l'insieme degli $x \in V_0$ tali che $F(x) \in W$, cioè $H(W) = V_0 \cap F^{-1}(W)$, un intorno aperto di x_0 che indichiamo con V.

Se $x \in V$, la coppia $(F(x), x)$ appartiene all'insieme di sinistra in (4), quindi anche al grafico di H: dunque $x = H(F(x))$ per ogni $x \in V$. Concludiamo che la mappa C^k H è l'inversa di $F|_V$. Infine, per la formula (1),

$$DF^{-1}(y) = DH(y) = -D_2G(y, H(y))^{-1} D_1G(y, H(y)) = DF(H(y))^{-1} = DF(F^{-1}(y))^{-1},$$

come volevasi dimostrare. □

Ricordiamo che se X, Y sono spazi di Banach e le applicazioni lineari continue $L \in L(X,Y)$, $R \in L(Y,X)$ soddisfano $LR = I_Y$, L si dice *inversa sinistra*, mentre R si dice *inversa destra*. In questo caso, X si decompone in somma diretta come $X = \ker L \oplus \operatorname{ran} R$, e l'applicazione RL è la proiezione sul secondo fattore in questa decomposizione. Un'applicazione $L \in L(X,Y)$ è un inversa sinistra se e solamente se è surgettiva ed il suo nucleo possiede un complementare topologico in X. Un'applicazione $R \in L(Y,X)$ è un inversa destra se e solamente se è iniettiva e la sua immagine è un sottospazio chiuso che possiede un complementare topologico in X.

1.9 Teorema. (Criterio per le sommersioni) *Siano X, Y spazi di Banach, U un intorno di 0 in X, ed $F : U \to Y$ una mappa di classe C^k, $1 \leq k \leq \infty$, tale che $F(0) = 0$. Se $L := DF(0)$ è un inversa sinistra, allora esistono un intorno V di 0 in X ed un diffeomorfismo di classe C^k, $\Phi : V \to \Phi(V) \subset U$ tale che $\Phi(0) = 0$, $D\Phi(0) = I_X$ e*

$$F \circ \Phi(x) = Lx \quad \forall x \in V.$$

In particolare, F è una mappa localmente aperta in 0, e $F^{-1}(0) \cap V$ è una sottovarietà di classe C^k di X, il cui spazio tangente in 0 è $\ker L$.

Infatti, dato che L è un inversa sinistra, X si decompone come $X = X_1 \oplus X_2$, dove $X_1 = \ker L$ e la restrizione di L a X_2 è un isomorfismo su Y. Cerchiamo il diffeomorfismo Φ della forma

$$\Phi(x_1, x_2) = (x_1, x_2 + H(x_1, x_2)).$$

Quindi occorre trovare H che risolva l'equazione

$$F(x_1, x_2 + H(x_1, x_2)) - Lx_2 = 0.$$

Per il teorema della funzione implicita localmente esiste (unica) una mappa H di classe C^k che risolve quest'equazione, ed il suo differenziale in 0 risulta nullo. Per il teorema della funzione inversa, $\Phi = I + H$ è il diffeomorfismo locale in 0 di classe C^k che cercavamo.

1.10 TEOREMA. (Criterio per le immersioni) *Siano X, Y spazi di Banach, U un intorno di* 0 *in X, ed $F : U \to Y$ una mappa di classe C^k, $1 \leq k \leq \infty$, tale che $F(0) = 0$. Se $R := DF(0)$ è un inversa destra, allora esistono un intorno aperto V di* 0 *in Y, un intorno aperto $U \subset F^{-1}(V)$ di* 0 *in X, ed un diffeomorfismo di classe C^k, $\Psi : V \to \Psi(V) \subset Y$ tale che $\Psi(0) = 0$, $D\Psi(0) = I_Y$ e*

$$\Psi \circ F(x) = Rx \quad \forall x \in U.$$

In particolare, F è una mappa localmente iniettiva e localmente chiusa in 0*, e $F(U)$ è una sottovarietà di classe C^k di Y, il cui spazio tangente in 0 è* $\operatorname{ran} R$.

Infatti sia L un'inversa sinistra di R, e sia $Y = Y_1 \oplus Y_2$ la corrispondente decomposizione di Y, con $Y_1 = \operatorname{ran} R$, $Y_2 = \ker L$. Ponendo $F = (F_1, F_2)$ si ha dunque $DF_1(0) = R$ e $DF_2(0) = 0$. Cerchiamo il diffeomorfismo Ψ^{-1} della forma

$$\Psi^{-1}(y_1, y_2) = (y_1 + H_1(y_1), y_2 + H_2(y_1)).$$

L'equazione per Ψ è equivalente a $F(x) = \Psi^{-1}(Rx)$, e quindi alle due equazioni:

$$F_1(x) = Rx + H_1(Rx), \quad F_2(x) = H_2(Rx).$$

Dato che R è un isomorfismo da X a Y_1 con inversa la restrizione di L a Y_1, la soluzione è

$$H_1(y_1) = F_1(Ly_1) - y_1, \quad H_2(y_1) = F_2(Ly_1).$$

Dato che $DH_1(0) = RL|_{Y_1} - I_{Y_1} = 0$ e $DH_2(0) = DF_2(0)L = 0$, il teorema della funzione inversa assicura che Ψ sia un diffeomorfismo locale in 0 di classe C^k.

Esistono anche versioni deboli dei criteri per le sommersioni e per le immersioni, che non assumono che il nucleo, rispettivamente l'immagine, di $DF(0)$ abbiano complementare topologico. Si verifichi questo fatto risolvendo i seguenti esercizi.

1.11 ESERCIZIO. *Siano X, Y spazi di Banach, $U \subset X$ un intono di x_0, e $F : U \to Y$ una mappa di classe C^1 tale che l'applicazione lineare $DF(x_0)$ sia surgettiva. Dimostrare che F è localmente aperta in x_0.*

Il Teorema 15.5 in [Dei85] dimostra questo risultato sotto ipotesi di differenziabilità più deboli.

1.12 ESERCIZIO. *Siano X, Y spazi di Banach, $U \subset X$ un intono di x_0, e $F : U \to Y$ una mappa di classe C^1 tale che l'applicazione lineare $DF(x_0)$ sia iniettiva ed abbia immagine chiusa. Dimostrare che F è localmente iniettiva e localmente chiusa in x_0.*

1.13 OSSERVAZIONE. *Negli spazi di Banach esiste una teoria delle mappe analitiche. Il teorema 1.3 e le sue conseguenze valgono anche in questa categoria. Si veda [Dei85], sezione 15.1.*

2 Applicazioni

2.1 L'inviluppo di una famiglia di curve piane

Consideriamo una famiglia ad un parametro $\mathcal{C} = \{C_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ di curve nel piano. L'inviluppo della famiglia $\mathcal{C}$ è l'insieme dei punti limite di intersezioni di curve vicine. Più precisamente, diciamo che un punto $\bar{z}$ del piano appartiene a $\mathcal{E}_{\bar{\lambda}}$ se per ogni intorno Λ di $\bar{\lambda}$ e per ogni intorno U di $\bar{z}$ esistono $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \neq \bar{\lambda}$, e $z \in U$ tali che $z \in C_{\bar{\lambda}} \cap C_\lambda$. In particolare $\bar{z} \in C_{\bar{\lambda}}$, essendo $C_{\bar{\lambda}}$ un chiuso. L'inviluppo della famiglia di curve $\mathcal{C}$ è l'insieme

$$\mathcal{E} = \bigcup_{\lambda\in\mathbb{R}} \mathcal{E}_\lambda.$$

Supponiamo che la famiglia di curve $\mathcal{C}$ sia definita implicitamente da un'equazione

$$\varphi(\lambda, z) = 0,$$

dove $\varphi : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è una funzione liscia. Assumiamo inoltre che per ogni $(\lambda, z) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$ tale che $\varphi(\lambda, z) = 0$ risulti $\partial_z\varphi(\lambda, z) \neq 0$: il teorema della funzione implicita garantisce allora che ciascuna C_λ sia una curva liscia. Un esempio è costituito dalla funzione

$$\varphi(\lambda, x, y) = 2\lambda x - y - \lambda^2, \tag{5}$$

che definisce una famiglia di rette.

Cominciamo con il mostrare che se $\bar{z} \in \mathcal{E}_{\bar{\lambda}}$, allora

$$\partial_\lambda\varphi(\bar{\lambda}, \bar{z}) = 0.$$

Infatti, se $\partial_\lambda\varphi(\bar{\lambda}, \bar{z}) \neq 0$, il teorema della funzione implicita ci fornisce un intorno Λ di $\bar{\lambda}$, un intorno U di $\bar{z}$, ed una funzione $f : U \to \Lambda$ tale che

$$\{(\lambda, z) \in \Lambda\times U \mid \varphi(\lambda, z) = 0\} = \{(f(z), z) \mid z \in U\}.$$

Questa identità ci dice che ogni $z \in U$ appartiene ad un'unica curva C_λ con $\lambda \in \Lambda$ (precisamente a $C_{f(z)}$). Quindi curve C_λ distinte, con $\lambda \in \Lambda$, non hanno intersezioni in U, dunque $\bar{z}$ non appartiene a $\mathcal{E}_{\bar{\lambda}}$.

Quindi il sistema

$$\begin{cases} \varphi(\bar{\lambda}, \bar{z}) = 0, \\ \partial_\lambda\varphi(\bar{\lambda}, \bar{z}) = 0, \end{cases} \tag{6}$$

costituisce una condizione necessaria affinché $\bar{z}$ appartenga a $\mathcal{E}_{\bar{\lambda}}$. Vediamo di trovare una condizione sufficiente. Fissiamo $(\bar{\lambda}, \bar{z})$ soluzione di (6) e definiamo la funzione liscia

$$\psi(\lambda, z) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(\lambda, z) - \varphi(\bar{\lambda}, z)}{\lambda - \bar{\lambda}} & \text{se } \lambda \neq \bar{\lambda}, \\ \partial_\lambda\varphi(\bar{\lambda}, z) & \text{se } \lambda = \bar{\lambda}. \end{cases}$$

Osserviamo che $\bar{z} \in \mathcal{E}_{\bar{\lambda}}$ se e solamente se il sistema

$$\begin{cases} \varphi(\lambda, z) = 0, \\ \psi(\lambda, z) = 0, \end{cases} \tag{7}$$

ha soluzioni (λ, z) arbitrariamente vicine a $(\bar{\lambda}, \bar{z})$ e tali che $\lambda \neq \bar{\lambda}$. Per la condizione (6), questo sistema ha sempre la soluzione $(\bar{\lambda}, \bar{z})$. Supponiamo che il differenziale rispetto alla seconda variabile della mappa

$$(\lambda, z) \mapsto (\varphi(\lambda, z), \psi(\lambda, z))$$

sia invertibile, ossia che, posto $z = (x, y)$, si abbia

$$\begin{vmatrix} \partial_x \varphi(\bar\lambda, \bar z) & \partial_y \varphi(\bar\lambda, \bar z) \\ \partial^2_{x\lambda} \varphi(\bar\lambda, \bar z) & \partial^2_{y\lambda} \varphi(\bar\lambda, \bar z) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{8}$$

Il teorema della funzione implicita fornisce allora una curva $\lambda \mapsto z(\lambda)$ di soluzioni di (7), tale che $z(\bar\lambda) = \bar z$. Quindi $\bar z \in \mathcal{E}_{\bar\lambda}$. La (8) - insieme alla (6) - è la condizione sufficiente cercata.

Se torniamo all'esempio (5), la condizione (6) è

$$\begin{cases} 2\lambda x - y - \lambda^2 = 0, \\ 2x - 2\lambda = 0. \end{cases}$$

Eliminando la variabile λ, troviamo che la parabola di equazione $y = x^2$ è il luogo candidato ad essere l'inviluppo della famiglia di rette data. La condizione (8) è verificata, in quanto

$$\begin{vmatrix} 2\lambda & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Quindi la parabola $y = x^2$ è l'inviluppo della famiglia di rette (5). In effetti, questa famiglia consiste di tutte le rette tangenti alla parabola.

Riferimenti bibliografici

[Dei85] K. Deimling, *Nonlinear functional analysis*, Springer, Berlin, 1985.