Proposte seminari

Operatori di Fredholm: teoria generale su spazi di Banach, teoria Hilbertiana e C*-algebre. Un'esposizione concisa della teoria generale si può trovare in [KG83], Capitolo III.§2.3 (è molto utile anche affrontare gli esercizi relativi a questo capitolo). Una presentazione più articolata è contenuta in [Kat80], Capitolo IV.§4 e 5. Per la teoria Hilbertiana e per le relazioni con la teoria delle C^*-algebre si veda il quinto capitolo di [Dou98].

Teoria di Schauder per operatori lineari ellittici del secondo ordine. Si presentino le dimostrazioni dei risultati enunciati nella sezione 2.7 (escludendo il Teorema 2.8). Una presentazione completa è contenuta nel Capitolo 6 di [GT83] (sono usati però anche risultati dei capitoli precedenti). Per una presentazione più concisa si veda [LU68], Capitolo III, sezioni 1 e 2.

Teoremi di inversione globale. Si presentino le dimostrazione del Teorema di inversione globale di Hadamard ([Dei85], Teorema 15.4) e di Caccioppoli ([PA73], Capitolo I, sezione 7, o edizione aggiornata [AP95]).

Teoremi di coniugio per diffeomorfismi del cerchio. Il problema di stabilire se un diffeomorfismo del cerchio è coniugato ad una rotazione [Arn61] è per molti versi simile al problema di linearizzare una funzione olomorfa, studiato nella sezione 3.6. Usando la *derivata Schwarziana* è però possibile evitare l'uso di teoremi di inversione alla Nash-Moser, riconducendosi al teorema di inversione classico. Si presenti la dimostrazione di Michel Herman del teorema di Arnold, contenuta nella prima parte di [Her85].

Il teorema di immersione isometrica di Nash. Si presentino le dimostrazione dei Teoremi 3.9 e 3.11 enunciati nelle dispense. Si segua [Jac72].

Calcolo differenziale in spazi di Frechet. Uno spazio di Frechet è uno spazio vettoriale topologico localmente convesso, completo, e metrizzabile. La non metrizzabilità del duale fa sí che il calcolo differenziale su spazi di Frechet sia sostanzialmente diverso dal calcolo in spazi di Banach. Si presentino le sezioni I.1, I.2, e I.3 di [Ham82] (si consiglia di guardare anche la sezione I.4 ed i controesempi in I.5.5).

Il teorema della funzione implicita in spazi di Frechet. Gli argomenti alla Nash-Moser visti nel capitolo 3 permettono di dimostrare un teorema di funzione implicita per mappe di una certa classe tra spazi di Frechet. La formulazione più elegante, e più categoriale, è dovuta a Richard Hamilton. Si presentino i risultati della Parte II e della Parte III.1 di [Ham82].

Embedding di superfici con curvatura positiva. Si presenti la dimostrazione di un classico risultato di Louis Nirenberg: ogni superficie compatta orientabile con curvatura strettamente postiva può essere immersa (embedded) isometricamente in $\mathbb{R}^3$ come bordo di un aperto convesso. La dimostrazione originale è in [Nir53]. In alternativa, si può presentare questo risultato come applicazione del teorema di inversione in spazi di Frechet di Hamilton (seminario precedente), seguendo [Ham82], sezione III.2.1.

Teoria KAM. In un sistema Hamiltoniano completamente integrabile, lo spazio delle fasi è foliato da tori invarianti, su cui il flusso è una traslazione di un vettore (frequenza) $\omega \in \mathbb{R}^n$. La teoria KAM (dai nomi dei matematici Kolmogorov, Arnold e Moser), studia perturbazioni piccole di sistemi Hamiltoniani completamente integrabili: se ω soddisfa una condizione di tipo diofantino (l'equivalente multi-dimensionale della condizione vista nella sezione 3.6), il toro di frequenza ω sopravvive. Si presenti la dimostrazione nel formalismo Lagrangiano, contenuta in [SZ89].

Grado topologico per classi di mappe non continue. In alcuni problemi del calcolo delle variazioni, ad esempio nello studio delle mappe armoniche, è utile disporre di una teoria del grado in spazi di mappe non necessariemente continue. Si presenti la teoria del grado per mappe VMO, sviluppata da Brezis e Nirenberg in [BN95] (si veda anche [BN96] per il caso di varietà con bordo). In alternativa, si tratti il caso delle mappe di Sobolev di classe $W^{1,n}$, [BLMN99].

Riferimenti bibliografici

[AP95] A. Ambrosetti and G. Prodi, *A primer of nonlinear analysis*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 34, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[Arn61] V. I. Arnold, *Small denominators. I. Mapping the circle onto itself*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **25** (1961), 21–86.

[BLMN99] Haïm Brezis, Yanyan Li, Petru Mironescu, and Louis Nirenberg, *Degree and Sobolev spaces*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **13** (1999), 181–190.

[BN95] H. Brezis and L. Nirenberg, *Degree theory and BMO. I. Compact manifolds without boundaries*, Selecta Math. (N.S.) **1** (1995), 197–263.

[BN96] Haïm Brezis and Louis Nirenberg, *Degree theory and BMO. II. Compact manifolds with boundaries*, Selecta Math. (N.S.) **2** (1996), 309–368.

[Dei85] K. Deimling, *Nonlinear functional analysis*, Springer, Berlin, 1985.

[Dou98] R. G. Douglas, *Banach algebra techniques in operator theory*, Springer, Berlin, 1998.

[GT83] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer, New York, 1983.

[Ham82] R. Hamilton, *The inverse funtion theorem of Nash and Moser*, Boll. Amer. Math. Soc. **7** (1982), 65–222.

[Her85] M. R. Herman, *Simple proofs of local conjugacy theorems for diffeomorphisms of the circle with almost every rotation number*, Bol. Soc. Bras. Mat. **16** (1985), 45–83.

[Jac72] H. Jacobowitz, *Implicit function theorems and isometric embeddings*, Ann. of Math **95** (1972), 191–225.

[Kat80] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer, Berlin, 1980.

[KG83] A. A. Kirillov and A. D. Gvišiani, *Teoremi e problemi dell'analisi funzionale*, Edizioni Mir, Mosca, 1983.

[LU68] O. A. Ladyženskaja and N. N. Ural'ceva, *Équations aux dérivées partielles de type elliptique*, Dunod, Paris, 1968.

[Nir53] L. Nirenberg, *The Weyl and Minkowski problems in differential geometry in the large*, Comm. Pure Appl. Math. **6** (1953), 337–394.

[PA73] G. Prodi and A. Ambrosetti, *Analisi non lineare*, Pubbl. Classe Scienze, Quaderni, Scuola Normale Superiore, Edizioni tecniche Scientifiche, Pisa, 1973.

[SZ89] D. Salamon and E. Zehnder, *KAM theory in configuration space*, Comment. Math. Helv. **64** (1989), no. 1, 84–132.