3 Il metodo di iterazione di Nash e Moser

3.1 Il metodo di Newton

Ricordiamo qual era lo schema iterativo da cui scaturiva il Teorema della funzione implicita 1.3 (si veda l'Osservazione 1.6). Siano $F : U \times V \to Z$ e $(x_0, y_0) \in U \times V$ tale che $F(x_0, y_0) = 0$ e $D_2F(x_0, y_0)$ invertibile. Dato x in U si cercava $y = y(x)$ in V che risolvesse $F(x, y) = 0$, e tale y poteva essere trovato (con opportune ipotesi sulla F), come limite della successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} u_0 = y_0, \\ u_{n+1} = u_n - D_2F(x_0, y_0)^{-1}F(x, u_n). \end{cases} \tag{1}$$

Che velocità di convergenza possiamo aspettarci? Usiamo la seguente terminologia: parliamo di *convergenza di ordine* p se $|u_{n+1} - y| \leq c|u_n - y|^p$. La convergenza di ordine 1 con $c < 1$ si dirà anche convergenza lineare (ma si noti che in questo caso $|u_n - y|$ tende a zero esponenzialmente), quella di ordine 2 convergenza quadratica (e vedremo che in questo caso $|u_n - y|$ tende a zero più che esponenzialmente, si ha la cosiddetta convergenza rapida). Dato che si supponeva D_2F continua, si avrà

$$|F(x, y') - F(x, y) - D_2F(x_0, y_0)^{-1}(y' - y)| \leq \epsilon|y' - y|,$$

se (x, y) e (x, y') sono sufficientemente vicini a (x_0, y_0). Da questa stima con $y' = u_n$ e y il limite di (u_n), cioè la soluzione di $F(x, y) = 0$, si trova

$$|F(x, u_n) - D_2F(x_0, y_0)^{-1}(u_n - y)| \leq \epsilon|u_n - y|,$$

da cui

$$|u_{n+1} - y| = |D_2F(x_0, y_0)^{-1}(D_2F(x_0, y_0)(u_n - y) - F(x, u_n))| \leq \epsilon\|D_2F(x_0, y_0)^{-1}\||u_n - y|.$$

Quindi abbiamo una convergenza lineare.

Confrontiamo lo schema iterativo appena visto con il classico metodo di Newton. In questo caso, si tratta di cercare gli zeri di una mappa $F : X \to Y$ partendo da una quasi soluzione, cioè da un $x_0 \in X$ per cui $F(x_0)$ è piccolo, e cercando un $x_1 = x_0 + h$ tale che $F(x_1)$ sia ancora più piccolo. Dallo sviluppo

$$F(x_0 + h) = F(x_0) + DF(x_0)h + o(h),$$

si vede che per avere $F(x_0 + h)$ il più piccolo possibile conviene prendere h tale che $F(x_0) + DF(x_0)h = 0$. Quindi è bene avere $DF(x_0)$ invertibile e scegliere $h = -DF(x_0)^{-1}F(x_0)$. Si arriva quindi allo schema iterativo

$$x_{n+1} = x_n - DF(x_n)^{-1}F(x_n),$$

che prede il nome di algoritmo di Newton. Si osservi che si tratta di una formula molto simile a (1): la differenza è che invece di invertire il differenziale sempre nello stesso punto, nell'algoritmo di Newton si opera questa inversione in tutti i punti della successione. Da un punto di vista numerico non è detto che questa scelta sia conveniente (invertire un operatore, o anche una matrice, costa in termini di calcolo), ma vedremo che si guadagna considerevolmente in termini di velocità di convergenza (e quindi sono necessari meno passi per arrivare vicino alla soluzione con la precisione desiderata). Infatti si ha il seguente:

3.1 TEOREMA. (Algoritmo di Newton) *Siano X, Y spazi di Banach, $B_r(x_0)$ la palla di raggio r centrata in $x_0 \in X$, ed $F : B_r(x_0) \to Y$ una mappa di classe C^1 tale che:*

(i) $DF(x_0)$ è invertibile, e si ponga $\alpha = |DF(x_0)^{-1}F(x_0)|$, $\beta = \|DF(x_0)^{-1}\|$;

(ii) la mappa DF è k-Lipschitziana in $B_r(x_0)$;

(iii) $2k\alpha\beta < 1$ *e* $2\alpha \leq r$.

Allora F *ha un unico zero* $\overline{x}$ *in* $\overline{B_{2\alpha}}(x_0)$*, e l'algoritmo di Newton*

$$x_{n+1} = x_n - DF(x_n)^{-1}F(x_n),$$

converge quadraticamente verso $\overline{x}$*, con*

$$|x_n - \overline{x}| \leq \frac{\alpha}{2^{n-1}} q^{2^n - 1}, \quad \textit{dove } q = 2k\alpha\beta < 1.$$

Dimostrazione. Osserviamo subito che

$$DF(x) = DF(x_0)[I + DF(x_0)^{-1}(DF(x) - DF(x_0))], \tag{2}$$

e per (ii), se $|x - x_0| \leq 2\alpha$,

$$\|DF(x_0)^{-1}(DF(x) - DF(x_0)\| \leq \beta k |x - x_0| \leq 2k\alpha\beta,$$

che è minore di 1 per (iii), da cui concludiamo che $DF(x)$ è invertibile per ogni $x \in \overline{B_{2\alpha}}(x_0)$.

Sempre da (ii), deduciamo che se $x, x' \in B_r(x_0)$, si ha

$$\begin{aligned} |F(x') - F(x) - DF(x)(x' - x)| &= \left| \int_0^1 (DF(x + t(x' - x) - DF(x))(x' - x)\, dt \right| \\ &\leq k|x' - x|^2 \int_0^1 t\, dt = \frac{k}{2}|x' - x|^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Poniamo $\alpha_n = |x_{n+1} - x_n|$, $\beta_n = \|DF(x_n)^{-1}\|$, in modo che $\alpha_0 = \alpha$ e $\beta_0 = \beta$. Poniamo anche $\gamma_n = k\alpha_n\beta_n$. Dalla (3) ricaviamo

$$\alpha_n = |DF(x_n)^{-1}F(x_n)| \leq \beta_n |F(x_n)| = \beta_n |F(x_n) - F(x_{n-1}) - DF(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})| \leq \frac{k}{2}\alpha_{n-1}^2 \beta_n.$$

Dalla formula (2) con $x = x_n$ e x_0 rimpiazzato da x_{n-1}, ricaviamo che

$$\|DF(x_n)^{-1}\| \leq \frac{\|DF(x_{n-1})^{-1}\|}{1 - \|DF(x_{n-1})^{-1}(DF(x_n) - DF(x_{n-1}))\|},$$

da cui, usando ancora (ii),

$$\beta_n \leq \frac{\beta_{n-1}}{1 - \beta_{n-1}k\alpha_{n-1}} = \frac{\beta_{n-1}}{1 - \gamma_{n-1}}, \tag{4}$$

purché γ_{n-1} sia minore di 1. Quindi

$$\alpha_n \leq \frac{k}{2}\alpha_{n-1}^2 \beta_n \leq \frac{k}{2} \frac{\beta_{n-1}}{1 - \gamma_{n-1}} \alpha_{n-1}^2 = \frac{1}{2} \frac{\gamma_{n-1}}{1 - \gamma_{n-1}} \alpha_{n-1}, \tag{5}$$

$$\gamma_n = k\alpha_n\beta_n \leq k \frac{1}{2} \frac{\gamma_{n-1}}{1 - \gamma_{n-1}} \alpha_{n-1} \frac{\beta_{n-1}}{1 - \gamma_{n-1}} = \frac{1}{2} \frac{\gamma_{n-1}^2}{(1 - \gamma_{n-1})^2}. \tag{6}$$

Poiché $s < 1/2$ è equivalente a $s^2/(1 - s)^2 < 1$, il fatto che $\gamma_0 = k\alpha\beta$ sia minore di $1/2$ implica che $\gamma_n < 1/2$ per ogni n. Ma allora da (5), $\alpha_n < \alpha_{n-1}/2$ per ogni n, da cui $\alpha_n \leq \alpha 2^{-n}$ e

$$|x_{n+1} - x_0| = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \leq \alpha \sum_{j=0}^{n} 2^{-j} < 2\alpha \leq r.$$

Da queste stime, insieme al fatto che $DF(x)$ è invertibile per ogni $x \in \overline{B_{2\alpha}}(x_0)$, deduciamo che la successione (x_n) è ben definita, assume valori in $B_{2\alpha}(x_0)$, ed è una successione di Cauchy, con limite $\overline{x} \in \overline{B_{2\alpha}}(x_0)$. Si ha ovviamente $F(\overline{x}) = 0$.

Dalla (3) segue che

$$|x_{n+1}-\overline{x}| = |DF(x_n)^{-1}(DF(x_n)(x_n-\overline{x}) - F(x_n) + F(\overline{x})| \leq \beta_n \frac{k}{2}|x_n-\overline{x}|^2,$$

Osservando che $\sup \beta_n$ è finito poiché $DF(\overline{x})$ è invertibile, si ha dunque

$$|x_{n+1}-\overline{x}| \leq c|x_n-\overline{x}|^2, \quad \text{dove } c = \frac{k}{2}\sup \beta_n,$$

è la convergenza è quadratica.

Se $\overline{x}'$ è un altro zero di F in $\overline{B_{2\alpha}}(x_0)$, si ha

$$\begin{aligned}|\overline{x}'-\overline{x}| \leq \beta|F(\overline{x}') - F(\overline{x}) - DF(x_0)(\overline{x}'-\overline{x})| &\leq \left|\int_0^1 (DF(\overline{x}+t(\overline{x}'-\overline{x})) - DF(x_0))(\overline{x}'-\overline{x})\,dt\right| \\ &\leq \beta k|\overline{x}'-\overline{x}| \int_0^1 |\overline{x}-x_0+t(\overline{x}'-\overline{x})|\,dt \leq 2\alpha\beta k|\overline{x}'-\overline{x}|,\end{aligned}$$

e dunque $\overline{x}' = \overline{x}$.

Per stimare la velocità di convergenza, poniamo $\delta_n = \gamma_n/(1-\gamma_n)$, ed osserviamo che (6) e il fatto che $\gamma_n < 1/2$ implicano che

$$\delta_n \leq \frac{1}{2}\frac{\gamma_{n-1}^2}{(1-\gamma_{n-1})^2}\frac{1}{1-\gamma_n} \leq \frac{\gamma_{n-1}^2}{(1-\gamma_{n-1})^2} = \delta_n^2.$$

Allora $\delta_n \leq \delta_0^{2^n}$. Per (5) si ha quindi

$$\alpha_n \leq \frac{1}{2}\delta_{n-1}\alpha_{n-1} \leq \frac{1}{2}\delta_0^{2^{n-1}}\alpha_{n-1},$$

che iterata produce

$$\alpha_n \leq 2^{-n}\delta_0^{2^n-1}\alpha.$$

Dato che $\delta_0 = \gamma_0/(1-\gamma_0) \leq 2\gamma_0 = 2k\alpha\beta = q$, si ha anche $\alpha_n \leq 2^{-n}q^{2^n-1}\alpha$. Perciò

$$|x_n-\overline{x}| \leq \sum_{j=n}^{\infty}\alpha_j \leq \alpha\sum_{j=n}^{\infty}2^{-j}q^{2^j-1} \leq \alpha q^{2^n-1}\sum_{j=n}^{\infty}2^{-j} = \alpha 2^{-n+1}q^{2^n-1},$$

come volevamo dimostrare. □

3.2 Due problemi in cui il teorema della funzione implicita classico non risulta sufficiente

Immersioni isometriche. Siano M ed N due varietà. Se g è una metrica su N e $u : M \to N$ è una mappa differenziabile, la metrica u^*g indotta su M è definita da

$$u^*g(x)[\xi,\eta] = g(u(x))[Du(x)\xi, Du(x)\eta], \quad \forall x \in M,\ \xi,\eta \in T_xM.$$

Indichiamo con $\overline{g}$ la metrica standard $\overline{g}(x)[\xi,\eta] = \xi\cdot\eta$ dello spazio euclideo $\mathbb{R}^N$. Un problema classico in geometria Riemanniana è il seguente: data una varietà Riemanniana (M,g), è possibile trovare un embedding u di M in qualche spazio euclideo $\mathbb{R}^N$ che risulti isometrico, cioè tale che $u^*(\overline{g}) = g$? A questo problema è stata data risposta affermativa negli anni cinquanta da John Nash [Nas56].

Vediamo come è possibile impostare questo problema nel caso particolare in cui $M = \Omega$ sia un aperto di $\mathbb{R}^n$. Una metrica g su Ω è associata ad una mappa $g : \Omega \to C^\infty(\Omega, \mathrm{Sym}(n,\mathbb{R}))$, dove $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ indica lo spazio vettoriale delle matrici reali $n\times n$ simmetriche, tramite

$$g(x)[\xi,\eta] = g(x)\xi\cdot\eta, \quad \forall x\in\Omega,\ \xi,\eta\in\mathbb{R}^n.$$

La positività della metrica si traduce nel fatto che g prende valori nel cono $\mathrm{Sym}^+(n,\mathbb{R})$ delle matrici simmetriche definite positive. Vogliamo trovare un embedding $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$, per qualche N sufficientemente grande, tale che $u^*(\overline{g}) = g$, ossia

$$u^*(\overline{g})(x)[\xi,\eta] = Du(x)\xi \cdot Du(x)\eta = Du(x)^T Du(x)\xi \cdot \eta = g(x)\xi \cdot \eta, \quad \forall x \in \Omega,\ \xi,\eta \in \mathbb{R}^n,$$

o equivalentemente

$$Du(x)^T Du(x) = g(x), \quad \forall x \in \Omega. \tag{7}$$

In coordinate, indicando con le lettere latine gli indici in $\mathbb{R}^n$ e con le lettere greche gli indici in $\mathbb{R}^N$ (e adottando l'usuale convenzione sulla somma degli indici ripetuti), l'equazione (7) assume la forma

$$\partial_i u^\alpha(x) \partial_j u^\alpha(x) = g_{ij}(x).$$

Si tratta di un sistema di equazioni differenziali non lineari del primo ordine, con N funzioni incognite e n^2 equazioni (ma la simmetria riduce questo numero a $n(n+1)/2$ equazioni indipendenti). Si noti che le soluzioni u di questa equazione hanno automaticamente differenziale iniettivo, cioè sono delle immersioni. Per essere degli emebedding manca l'iniettività e il fatto che siano omeomorfismi con l'immagine. Qui non ci preoccuperemo della proprietà di embedding, limitandoci a considerare il problema dell'esistenza di soluzioni di (7). Sembra naturale considerare la seguente impostazione funzionale: vorremmo dimostrare che la mappa

$$F : C^*(\Omega,\mathbb{R}^N) \to C^{*-1}(\Omega, \mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})), \quad F(u) = u^*(\overline{g}) = Du^T Du,$$

ha nella sua immagine tutto $C^{*-1}(\Omega, \mathrm{Sym}^+(n,\mathbb{R}))$. Al solito, indichiamo con C^* uno spazio di funzioni la cui regolarità non è ben definita. Differenziando formalmente F in un certo $u \in C^*(\Omega,\mathbb{R}^N)$ otteniamo

$$DF(u)h = Dh^T Du + Du^T Dh, \quad \forall h \in C^*(\Omega,\mathbb{R}^N).$$

Vorremmo almeno poter dimostrare che se u è una mappa fissata (magari un embedding di classe C^∞), allora per ogni metrica g vicina a $u^*(\overline{g})$, esiste una mappa $v \in C^*(\Omega,\mathbb{R}^N)$ vicina a u tale che $v^*(\overline{g})$. Questo seguirebbe dal teorema della funzione implicita se riuscissimo a dimostrare che $DF(u)$ ammette un'inversa destra. In altre parole, data $w \in C^{*-1}(\Omega, \mathrm{Sym}(n,\mathbb{R}))$, vorremmo trovare una $h \in C^*(\Omega,\mathbb{R}^N)$ tale che

$$Dh^T Du + Du^T Dh = w,$$

insieme ad una stima $\|h\|_{C^*} \leq c\|w\|_{C^{*-1}}$. In coordinate, vogliamo risolvere il sistema di equazioni

$$\partial_i h^\alpha \partial_j u^\alpha + \partial_j h^\alpha \partial_i u^\alpha = w_{ij}. \tag{8}$$

Questo sistema diventa più semplice da risolvere se imponiamo che $h(x)$ sia ortogonale all'immagine di $Du(x)$ (cioè al tangente in x dell'immagine di u):

$$h^\alpha \partial_i u^\alpha = 0. \tag{9}$$

In effetti, differenziando la (9) ed usando (8) si vede che il sistema (8,9) è equivalente al sistema (9,10), dove la (10) è

$$-2\,\partial_{ij} u^\alpha\, h^\alpha = w_{ij}. \tag{10}$$

Il vantaggio del sistema (9,10) è che non si tratta più di equazioni differenziali, ma di un sistema lineare di equazioni algebriche nelle incognite h^α. Le incognite sono N, mentre le equazioni (tenuto conto della simmetria) sono $n + n(n+1)/2 = (n^2+3n)/2$. È quindi ragionevole aspettarsi che se $N \geq (n^2+3n)/2$ e se la u è in qualche senso generica, il sistema (9,10) risulta risolubile.

Supponiamo che sia questo il caso, e inoltre che la u sia di classe C^∞. Le funzioni w_{ij} appartengono a C^{*-1}, quindi da (10) dobbiamo aspettarci che anche le h^α siano di classe C^{*-1}, e non più regolari. Perciò h appartiene a $C^{*-1}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ e non a $C^*(\Omega,\mathbb{R}^N)$ come avremmo voluto. In altri termini, abbiamo una stima $\|h\|_{C^{*-1}} \leq c\|w\|_{C^{*-1}}$, e non la stima $\|h\|_{C^*} \leq c\|w\|_{C^{*-1}}$ di cui avremmo bisogno. L'operatore $DF(x)$ ammette in un certo senso un'inversa destra, ma quest'inversa destra è un operatore non limitato tra gli spazi che ci interessano. Si noti che il problema svanirebbe se fossimo autorizzati a lavorare in spazi C^∞, che però non sono spazi di Banach.

Linearizzazione di funzioni olomorfe. Sia B_r la palla di raggio r centrata in 0 in $\mathbb{C}$, e sia $f : B_r \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa tale che $f(0) = 0$ e $f'(0) = \alpha \neq 0$. Vorremmo studiare il problema seguente: è vero che f è olomorficamente coniugata in 0 alla sua parte lineare? In altre parole, ci stiamo chiedendo se esiste una funzione olomorfa $h : B_s \to \mathbb{C}$ tale che $h(0) = 0$, $h'(0) \neq 0$ e

$$h^{-1} \circ f \circ h(z) = \alpha z, \quad \forall z \in B_s. \tag{11}$$

A meno di scambiare $h(z)$ con $h(\lambda z)$, possiamo supporre che $h'(0) = 1$. Poniamo

$$f(z) = \alpha z + a(z), \;\; a(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad h(z) = z + b(z), \;\; b(z) = \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n.$$

I coefficienti a_n sono assegnati, e si tratta di trovare i coefficienti b_n e dimostrare che la serie b ha raggio di convergenza positivo. L'equazione (11) è equivalente a $f \circ h(z) = h(\alpha z)$, cioè a

$$\alpha b(z) + a(z + b(z)) = b(\alpha z), \tag{12}$$

ossia a

$$\alpha \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left(z + \sum_{m=2}^{\infty} b_m z^m \right)^n = \sum_{n=2}^{\infty} b_n \alpha^n z^n,$$

o anche

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \left(1 + \sum_{m=2}^{\infty} b_m z^{m-1} \right)^n = \sum_{n=2}^{\infty} (\alpha^n - \alpha) b_n z^n.$$

Se indichiamo con $\sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n$ la serie di sinistra, è facile vedere che la dipendenza di c_n dai coefficienti b_j coinvolge solamente i coefficienti fino all'$(n-1)$-esimo (anzi fino ad un indice ancora più basso, ma questo ci basta): $c_n = c_n(b_2, \dots, b_{n-1})$. Questa osservazione permette di risolvere l'equazione sopra induttivamente:

$$b_2 = \frac{a_2}{\alpha^2 - \alpha}, \quad b_n = \frac{c_n(b_2, \dots, b_{n-1})}{\alpha^n - \alpha}.$$

L'equazione è dunque risolubile formalmente per ogni scelta dei coefficienti a_n se e solamente se i denominatori non si annullano mai, ossia se e solamente se α non è una radice n-esima di 1, per nessun $n \in \mathbb{N}$. In particolare, se $|\alpha| \neq 1$. In questo caso la soluzione formale h ha raggio di convergenza positivo:

3.2 Esercizio. *Supponiamo che $f(0) = 0$ e $f'(0) = \alpha \neq 0$ abbia modulo diverso da 1. Dimostrare che esiste unica una funzione olomorfa $h : B_s \to \mathbb{C}$, per qualche $s > 0$, tale che $h(0) = 0$, $h'(0) = 1$, e $h^{-1} \circ f \circ h(z) = \alpha z$.*

Quando α ha modulo unitario ma non è una radice di 1, la convergenza della serie b diventa problematica, poichè i denominatori $\alpha^n - \alpha$, pur essendo sempre diversi da zero, si avvicinano a zero frequentemente. Infatti:

3.3 Esercizio. *Supponiamo che il numero complesso α di modulo unitario non sia radice di 1. Dimostrare che l'insieme $\{\alpha^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ è denso nel cerchio unitario.*

Questa difficoltà prende il nome di problema dei piccoli denominatori. Nonostante la soluzione formale qui sia più o meno esplicita, ed il problema sia la sua convergenza, risulta utile impostare questo problema come una questione di funzione implicita. Premettiamo il seguente:

3.4 Esercizio. *Sia $A(r)$ l'insieme delle funzioni olomorfe e limitate su B_r. Dimostrare che la norma dell'estremo superiore rende $A(r)$ uno spazio di Banach.*

Indichiamo con $A_2(r)$ il sottospazio di $A(r)$ composto da quelle funzioni che si annullano in 0 assieme alla loro derivata prima, e scelto $s < r$ consideriamo la mappa

$$F : A_2(r) \times \{b \in A_2(s) \mid \|b\|_\infty < r - s\} \to A_2(s), \quad F(a, b) = \alpha \circ b - b \circ \alpha + a \circ (\mathrm{id} + b),$$

dove con α indichiamo anche la funzione lineare $z \mapsto \alpha z$. Si ha $F(0, 0) = 0$, e (12) mostra che il nostro problema si traduce in: data $a \in A_2(r)$ trovare $b \in \{b \in A_2(s) \mid \|b\|_\infty < r - s\}$ tale che $F(a, b) = 0$. Si tratta dunque della tipica formulazione da teorema della funzione implicita. Il differenziale rispetto alle seconda variabile di F in $(0, 0)$ è l'operatore lineare

$$D_2F(0, 0) : A_2(s) \to A_2(s), \quad D_2F(0)u = \alpha \circ u - u \circ \alpha.$$

Data $v = \sum_{n=2}^\infty v_n z^n \in A_2(s)$, la soluzione formale u di

$$\alpha \circ u - u \circ \alpha = v$$

è data da

$$u(z) = \sum_{n=2}^\infty \frac{v_n}{\alpha - \alpha^n} z^n.$$

Di nuovo, i piccoli denominatori rendono problematica la convergenza: se u ha raggio di convergenza s, la v avrà in generale raggio di convergenza minore. Per ben che vada (cioè imponendo ulteriori condizioni sul numero di modulo unitario α), potremmo sperare di avere un inversa destra continua da $A_2(s)$ in un $A_2(s')$ con $s' < s$. Come prima, il teorema della funzione implicita classico non è applicabile a causa di un'inversa destra illimitata. Il problema risulterebbe semplificato se potessimo lavorare contemporaneamente con spazi di funzioni olomorfe di raggio di convergenza arbitrario.

3.5 Esercizio. *Si consideri la mappa*

$$F : C^\infty([-1, 1]) \to C^\infty([-1, 1]), \quad F(u)(x) = u(x) - xu(x)u'(x).$$

Si verifichi che il differenziale di F in 0 è l'identità (differenziale formale, o per chi conosce la definizione di differenziale di una mappa tra spazi di Frechet, differenziale vero). Si mostri però che la mappa F non è localmente aperta in 0: le funzioni $v_n(x) = 1/n + x^n/n!$ tendono uniformemente a 0 con tutte le derivate in $[-1, 1]$, ma v_n non appartiene all'immagine di F.

3.6 Esercizio. *Provare a dare un'impostazione funzionale al problema seguente: dato un diffeomorfismo $\varphi : B_{r_0}(0) \to \varphi(B_{r_0}(0)) \subset \mathbb{R}^n$ di una palla di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$ tale che $\varphi(0) = 0$ e $D\varphi(0) = I$, cercare un campo $X : B_{r_1}(0) \to \mathbb{R}^n$, $r_1 \leq r_0$, il cui flusso a tempo 1 coincida con φ in un intorno di 0. In altre parole, si vuole che la soluzione del problema di Cauchy*

$$\partial_t \psi(t, x) = X(\psi(t, x)), \quad \psi(0, x) = x, \quad \forall x \in B_{r_1}(0),$$

verifichi $\psi(1, x) = \varphi(x)$ per ogni $x \in B_{r_2}(0)$, se $r_2 \leq r_1$ è sufficientemente piccolo. Quali sono le difficoltà?

3.7 Esercizio. *(i) Dimostrare che il problema sopra ha soluzione se si ammette che il campo X dipenda dal tempo. In altre parole, si cerca $X : [0, 1] \times B_{r_1}(0) \to \mathbb{R}^n$ tale che la soluzione del problema di Cauchy non autonomo*

$$\partial_t \psi(t, x) = X(t, \psi(t, x)), \quad \psi(0, x) = x, \quad \forall x \in B_{r_1}(0),$$

verifichi $\psi(1, x) = \varphi(x)$ per ogni $x \in B_{r_2}(0)$, se $r_2 \leq r_1$ è sufficientemente piccolo. (ii) Al posto di $D\varphi(0) = I$ assumiamo $D\varphi(0) = A \in GL(n, \mathbb{R})$. Per quali $A \in GL(n, \mathbb{R})$ è ancora possibile risolvere questo problema?

3.8 Esercizio. *Sia $\varphi : S^1 \to S^1$ un diffeomorfismo, vicino in qualche senso all'identità. Ci si chiede se possiamo ottenere φ come flusso a tempo 1 di un campo sul cerchio, $X : S^1 \to TS^1$. (i) Dare un'impostazione funzionale a questo problema, ed individuare le difficoltà. (i) Supponiamo che un diffeomorfismo $\varphi : S^1 \to S^1$ non abbia punti fissi e sia il flusso a tempo 1 di un campo $X : S^1 \to TS^1$. Dimostrare che φ è coniugato ad una rotazione: esiste un diffeomorfismo $h : S^1 \to S^1$ tale che $\varphi = h^{-1} \circ R_\alpha \circ h$, dove $R_\alpha : S^1 \to S^1$ è la rotazione $e^{i\theta} \mapsto e^{i(\theta+\alpha)}$. (iii) Dimostrare che esistono diffeomorfismi $\varphi : S^1 \to S^1$ arbitrariamente vicini all'identità nella topologia C^k, $k \in \mathbb{N}$, che non sono topologicamente coniugati ad una rotazione.*

3.3 Scale di Banach

Gli esempi della sezione precedente suggeriscono di estendere il setting di mappe tra due spazi di Banach ad un setting più ampio, che preveda la possibilità di lavorare con infiniti spazi di Banach in un colpo solo. Uno dei modi per formalizzare questa idea è introdurre il concetto di scale di Banach.

Sia $(\Lambda, \leq)$ un insieme totalmente ordinato. Una famiglia di spazi di Banach $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ tale che per ogni $\lambda \leq \mu$ lo spazio X_μ si immerga con continuità in X_λ si dice *scala di Banach*. Vediamo alcuni esempi.

Spazi di mappe differenziabili. Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$. Consideriamo $\Lambda = [0, +\infty)$ e se $\lambda = k + \alpha$, con $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in [0, 1)$, sia

$$X_\lambda = C^{k,\alpha}(\Omega, \mathbb{R})$$

lo spazio delle funzioni con derivata k-esima uniformemente α-Hölderiana. Si verifica facilmente che $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ è una scala di Banach.

Spazi di successioni pesate. Sia $\Lambda \subset \mathbb{R}^+$ un intervallo chiuso, e per $\lambda \in \Lambda$ poniamo

$$X_\lambda = \left\{ x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid |x|_\lambda := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\lambda n}}{\sqrt{n!}} |x(n)| < +\infty \right\}.$$

Si verifica facilmente che $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ è una scala di Banach.

Spazi di funzioni olomorfe. Sia $\Lambda = [r_0, r_1]$, con $0 < r_0 < r_1 < +\infty$, e sia $A(r)$ lo spazio delle funzioni olomorfe e limitate in B_r, munito della norma dell'estremo superiore. La famiglia $\{A(r)\}_{r\in[r_0,r_1]}$ è una scala di Banach.

Riferimenti bibliografici

[Dei85] K. Deimling, *Nonlinear functional analysis*, Springer, Berlin, 1985.

[Mos66a] J. Moser, *A rapidily convergent iteration method and non-linear partial differential equations - I*, Ann. Scuola Normale Sup. **20** (1966), 265–315.

[Mos66b] ———, *A rapidily convergent iteration method and non-linear partial differential equations - II*, Ann. Scuola Normale Sup. **20** (1966), 499–535.

[Nas56] J. Nash, *The imbedding problem for Riemannian manifolds*, Ann. of Math. **63** (1956), 20–63.

[Zeh75] E. Zehnder, *Generalized implicit function theorems with applications to some small divisor problem, I*, Comm. Pure Appl. Math. **28** (1975), 91–140.