

### 3.4 Un algoritmo di Newton alla Nash-Moser

Consideriamo le scale di Banach  $X_\lambda, Y_\lambda$ , parametrizzate da  $\lambda \in [0, 1]$ . Supponiamo inoltre che le immersioni  $X_\mu \hookrightarrow X_\lambda$  e  $Y_\mu \hookrightarrow Y_\lambda$ ,  $0 \leq \lambda < \mu \leq 1$ , abbiano norma 1:

$$|u|_\lambda \leq |u|_\mu \quad \text{se } 0 \leq \lambda \leq \mu \leq 1.$$

Fissato  $0 < R \leq 1$ , poniamo

$$B_\lambda = \{x \in X_\lambda \mid |x|_\lambda < R\}.$$

Consideriamo una mappa tra gli spazi più grandi

$$F : B_0 \rightarrow Y_0.$$

Facciamo le seguenti ipotesi su  $F$ , dove  $M \geq 1$ ,  $\gamma > 0$  e  $\alpha \geq 0$ .

**Continuità.**  $F : B_\lambda \rightarrow Y_\lambda$  è continua per ogni  $\lambda \in [0, 1]$ .

**Stima di Taylor.** Se  $0 \leq \lambda < \mu \leq 1$ , allora  $F : B_\mu \rightarrow Y_\lambda$  è differenziabile, e vale

$$|F(x') - F(x) - DF(x)(x' - x)|_\lambda \leq \frac{M}{(\mu - \lambda)^{2\alpha}} |x' - x|_\mu^2,$$

per ogni  $x, x' \in B_\mu$ .

**Inversa destra approssimata con perdita  $\gamma$ .** Se  $0 \leq \lambda < \mu \leq 1$ , per ogni  $x \in B_\mu$  esiste  $T(x) \in L(Y_\mu, X_\lambda)$  tale che

$$|T(x)y|_\lambda \leq \frac{M}{(\mu - \lambda)^\gamma} |y|_\mu,$$

e

$$|(DF(x)T(x) - I)y|_\lambda \leq \frac{M}{(\mu - \lambda)^{2(\alpha+\gamma)}} |F(x)|_\mu |y|_\mu,$$

per ogni  $y \in Y_\mu$ .

**3.1 OSSERVAZIONE.** *In alcuni problemi, come quello dell'immersione isometrica, è sufficiente assumere l'esistenza di una vera inversa destra di  $DF(x)$ , i.e.  $DF(x)T(x) = I$ , e l'ultima disuguaglianza è automaticamente verificata. Nei problemi di coniugio invece indebolire l'ipotesi sull'inversa destra risulta importante. Si noti che l'ultima disuguaglianza implica che  $T(x)$  è una vera inversa destra per ogni  $x$  soluzione, i.e.  $F(x) = 0$ .*

Il teorema seguente è una versione modificata del Teorema 15.8 in [Dei85], originariamente dimostrato da Edward Zehnder in [Zeh75]. Risultati di questo tipo prendono il nome di teoremi alla Nash-Moser, in quanto questo metodo fu usato per la prima volta da John Nash per risolvere il già citato problema delle immersioni isometriche [Nas56], ed esteso da Jurgen Moser [Mos66a, Mos66b] a numerosi altri problemi.

**3.2 TEOREMA.** *Nelle ipotesi precedenti, esiste  $C = C(M, \alpha, \gamma)$  tale che per ogni  $\mu \in (0, 1]$  e per ogni  $x \in B_\mu$  soluzione approssimata, nel senso che*

$$|F(x)|_\mu \leq \frac{1}{C} (R - r) \mu^{2(\alpha+\gamma)}, \quad |x|_\mu \leq r,$$

dove  $0 < r < R$ , esiste una  $\bar{x} \in B_{\mu/2} \subset X_{\mu/2}$  che è una soluzione esatta, cioè  $F(\bar{x}) = 0$ , e vale la stima

$$|\bar{x} - x|_{\mu/2} \leq C \mu^{-\gamma} |F(x)|_\mu. \quad (13)$$

*Dimostrazione.* Introduciamo le costanti  $q = 2(\alpha + \gamma)$ ,  $a = M2^{4(\alpha+\gamma)} + M^32^{6(\alpha+\gamma)}$ ,  $b = 2^{2(\alpha+\gamma)}$ , e una successione che verifica la legge ricorsiva

$$\epsilon_{n+1} = ab^n \epsilon_n^2.$$

È facile vedere che se  $\epsilon_0$  è sufficientemente piccolo questa successione converge a zero più che esponenzialmente (la convergenza è rapida). Infatti, posto  $\delta_n = ab^{n+1} \epsilon_n$  si ha  $\delta_{n+1} = \delta_n^2$ , da cui  $\delta_n = \delta_0^{2^n}$ . Perciò

$$\epsilon_n = \frac{1}{ab^n} \delta_0^{2^n} = \frac{1}{ab^n} (ab\epsilon_0)^{2^n}, \quad (14)$$

e se  $\epsilon_0 < 1/(ab)$ ,  $(\epsilon_n)$  converge a zero rapidamente. In particolare, se  $\epsilon_0$  è sufficientemente piccolo vale

$$\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n^3 < 1. \quad (15)$$

Specificheremo quanto ulteriormente piccolo deve essere  $\epsilon_0$  nel corso della dimostrazione.

Dato  $\mu \in (0, 1]$ , interpoliamo il salto da  $\mu$  a  $\mu/2$  con la successione decrescente  $\mu_n = \frac{1}{2}\mu(1+2^{-n})$ , in modo che  $\mu_0 = \mu$  ed il limite di  $(\mu_n)$  è  $\mu/2$ . Introduciamo anche la successione  $\tau_{n+1} = \frac{1}{2}(\mu_{n+1} + \mu_n)$ , che verifica  $\mu_{n+1} < \tau_{n+1} < \mu_n$ .

Useremo uno schema iterativo alla Newton, usando  $T(x)$  al posto dell'inversa di  $DF(x)$ :

$$x_0 = x, \quad x_{n+1} = x_n - T(x_n)F(x_n). \quad (16)$$

Il nostro scopo sarà dimostrare l'affermazione seguente: se  $\epsilon_0 = \epsilon_0(\alpha, \gamma, M)$  è sufficientemente piccolo, allora per ogni  $x \in X_\mu$  tale che

$$|F(x)|_\mu \leq \nu(R-r)\mu^q \epsilon_0^4, \quad (17)$$

per qualche  $\nu \in [0, 1]$ , la successione  $(x_n)$  definita da (16) soddisfa la seguente proprietà A(n), per ogni  $n \in \mathbb{N}$ :

**A(n,1)**  $x_n \in B_{\mu_n}$  e  $|F(x_n)|_{\mu_n} \leq \nu(R-r)\mu^q \epsilon_n^4$ ;

**A(n,2)**  $x_{n+1} \in X_{\tau_{n+1}}$  e  $|x_{n+1} - x_n|_{\tau_{n+1}} \leq \nu(R-r)\mu^{q-\gamma} \epsilon_n^3$ ;

**A(n,3)**  $|x_{n+1} - x|_{\tau_{n+1}} \leq (R-r)(1 - \epsilon_n)$ .

Rimandando per il momento la dimostrazione di A(n), mostriamo che questa affermazione implica la tesi del teorema. Scegliamo infatti  $C = 1/\epsilon_0^4$ , ricordando che  $\epsilon_0$  dipende solamente da  $\alpha, \gamma, M$ . Se  $x \in B_\mu$  e

$$|F(x)|_\mu \leq \frac{1}{C}(R-r)\mu^q = (R-r)\mu^q \epsilon_0^4, \quad |x|_\mu \leq r < R,$$

poniamo  $\nu = |F(x)|_\mu (R-r)^{-1} \mu^{-q} \epsilon_0^{-4} \in [0, 1]$ , così che  $x$  soddisfa la (17). Detta  $(x_n)$  la successione definita da (16), traiamo conseguenze da A(n).

Dalla A(n,1) si deduce che  $|F(x_n)|_{\mu_n}$  è infinitesima, e a maggior ragione  $F(x_n)$  tende a zero in  $Y_{\mu/2}$ . Per la A(n,2) la successione  $(x_n)$  è di Cauchy in  $X_{\mu/2}$ . Detto  $\bar{x} \in X_{\mu/2}$  il suo limite, per la continuità di  $F : B_{\mu/2} \rightarrow Y_{\mu/2}$  concludiamo che  $F(\bar{x}) = 0$ . L'affermazione A(n,3) garantisce che  $x_n$  resti sempre nel dominio di definizione, in modo che l'induzione sia ben definita. Infatti:

$$|x_{n+1}|_{\tau_{n+1}} \leq |x_{n+1} - x|_{\tau_{n+1}} + |x|_{\tau_{n+1}} \leq (R-r)(1 - \epsilon_n) + r = R - (R-r)\epsilon_n < R. \quad (18)$$

Resta da dimostrare la stima (13). Da A(n,2) e da (15) si deduce che

$$|x_n - x|_{\mu/2} \leq \sum_{j=0}^{\infty} |x_{j+1} - x_j|_{\mu/2} \leq \nu(R-r)\mu^{q-\gamma} \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon_j^3 \leq \nu(R-r)\mu^{q-\gamma}.$$

Passando al limite per  $n \rightarrow \infty$ , si trova

$$|\bar{x} - x| \leq \nu(R - r)\mu^{q-\gamma},$$

e sostituendo in questa disuguaglianza il valore di  $\nu$  si trova la (13).

Dimostriamo che se  $\epsilon_0 = \epsilon_0(\alpha, \gamma, M)$  è sufficientemente piccolo, vale l'affermazione A(n). Ragioneremo per induzione. La A(0,1) è conseguenza immediata dell'ipotesi (17). Mostriamo che se  $\epsilon_0$  è sufficientemente piccolo vale la A(0,2), cioè  $x_1 \in X_{\tau_1}$  e

$$|x_1 - x|_{\tau_1} \leq \nu(R - r)\mu^{q-\gamma}\epsilon_0^3. \quad (19)$$

Dato che  $F(x) \in Y_\mu$  e  $T(x) \in L(Y_\mu, X_{\tau_1})$ , il punto  $x_1 = x - T(x)F(x)$  appartiene a  $X_{\tau_1}$  e per la stima sulla norma dell'inversa approssimata  $T(x)$  si ha

$$|x_1 - x|_{\tau_1} = |T(x)F(x)|_{\tau_1} \leq \frac{M}{(\mu - \tau_1)^\gamma} |F(x)|_\mu.$$

Usando l'ipotesi (17) e il fatto che  $|\mu - \tau_1| = 2^{-3}\mu$ , deduciamo che

$$|x_1 - x|_{\tau_1} \leq M2^{3\gamma}\nu(R - r)\mu^{q-\gamma}\epsilon_0^4.$$

Si avrà dunque la (19) - e quindi la A(0,2) - se  $\epsilon_0$  è così piccolo che  $M2^{3\gamma}\epsilon_0 \leq 1$ . La A(0,3) si riduce invece alla stima

$$|x_1 - x|_{\tau_1} \leq (R - r)(1 - \epsilon_0),$$

che, essendo la (19) già stabilita, è implicata da  $\nu\mu^{q-\gamma}\epsilon_0^3 \leq 1 - \epsilon_0$ . Dato che  $\mu, \nu \in [0, 1]$  e  $q \geq \gamma$ , quest'ultima disuguaglianza vale se  $\epsilon_0$  è così piccolo che  $\epsilon_0^3 \leq 1 - \epsilon_0$ . Abbiamo perciò dimostrato A(0), il passo iniziale dell'argomento induttivo.

Assumiamo che valga A(j) per ogni  $j \leq n$  e dimostriamo A(n+1) (eventualmente aggiungendo ipotesi sulla piccolezza di  $\epsilon_0$ ). Dato che  $x_n \in X_{\mu_n}$ ,  $F(x_n) \in Y_{\mu_n}$ , e  $T(x_n) \in L(Y_{\mu_n}, X_{\mu_{n+1}})$ , il punto  $x_{n+1}$  appartiene a  $X_{\mu_{n+1}}$ . In effetti, per A(n,3) il punto  $x_{n+1}$  appartiene a  $B_{\mu_{n+1}}$  (si veda la (18)). Da (16) ricaviamo l'identità

$$F(x_{n+1}) = (I - DF(x_n)T(x_n))F(x_n) + F(x_{n+1}) - F(x_n) - DF(x_n)(x_{n+1} - x_n). \quad (20)$$

Usando la proprietà dell'inversa destra approssimata e la stima di Taylor, troviamo

$$\begin{aligned} |F(x_{n+1})|_{\mu_{n+1}} &\leq \frac{M}{(\mu_n - \mu_{n+1})^{2(\alpha+\gamma)}} |F(x_n)|_{\mu_n}^2 + \frac{M}{(\tau_{n+1} - \mu_{n+1})^{2\alpha}} |T(x_n)F(x_n)|_{\tau_{n+1}}^2 \\ &\leq \left( \frac{M}{(\mu_n - \mu_{n+1})^{2(\alpha+\gamma)}} + \frac{M^3}{(\tau_{n+1} - \mu_{n+1})^{2\alpha}(\mu_n - \tau_{n+1})^{2\gamma}} \right) |F(x_n)|_{\mu_n}^2. \end{aligned}$$

Dato che

$$\mu_n - \mu_{n+1} = \mu 2^{-(n+2)}, \quad \tau_{n+1} - \mu_{n+1} = \mu_n - \tau_{n+1} = \mu 2^{-(n+3)},$$

usando anche la definizione di  $a$  e  $b$  si trova

$$|F(x_{n+1})|_{\mu_{n+1}} \leq (M2^{4(\alpha+\gamma)} + M^3 2^{6(\alpha+\gamma)}) 2^{2(\alpha+\gamma)n} \mu^{-2(\alpha+\gamma)} |F(x_n)|_{\mu_n}^2 = ab^n \mu^{-2(\alpha+\gamma)} |F(x_n)|_{\mu_n}^2.$$

Dalla A(n,1) e dal fatto che  $\epsilon_{n+1} = ab^n \epsilon_n^2$  si deduce quindi

$$|F(x_{n+1})|_{\mu_{n+1}} \leq ab^n \nu^2 (R - r)^2 \mu^{2q-2(\alpha+\gamma)} \epsilon_n^8 = \nu^2 (R - r)^2 \mu^{2q-2(\alpha-\gamma)} \epsilon_{n+1}^4.$$

Dato che  $R, \nu, \mu \leq 1$  e  $q = 2(\alpha + \gamma)$ , il termine a destra si maggiora con  $\nu(R - r)\mu^q \epsilon_{n+1}^4$ , il che prova la A(n+1,1).

Dimostriamo la A(n+1,2). Il fatto che  $x_{n+1}$  appartenga a  $X_{\tau_{n+1}}$  è di nuovo conseguenza di (16), del fatto che  $x_n \in X_{\mu_n}$ ,  $F(x_n) \in Y_{\mu_n}$  e  $T(x_n) \in L(Y_{\mu_n}, X_{\tau_{n+1}})$ . Ancora per la (16) e per la stima sulla inversa approssimata  $T$ ,

$$|x_{n+2} - x_{n+1}|_{\tau_{n+2}} = |T(x_{n+1})F(x_{n+1})|_{\tau_{n+2}} \leq \frac{M}{(\mu_{n+1} - \tau_{n+2})^\gamma} |F(x_{n+1})|_{\mu_{n+1}}.$$

Usando la A(n+1,1) e il fatto che  $\mu_{n+1} - \tau_{n+2} = \mu 2^{-(n+4)}$ , si trova

$$|x_{n+2} - x_{n+1}|_{\tau_{n+2}} \leq M 2^{\gamma(n+4)} \nu (R-r) \mu^{q-\gamma} \epsilon_{n+1}^4.$$

Quindi si avrà la A(n+1,2), purchè  $\epsilon_0$  sia così piccolo che  $M 2^{\gamma(n+4)} \epsilon_{n+1} \leq 1$ .

Infine da A(n+1,2) e A(n,3)

$$\begin{aligned} |x_{n+2} - x|_{\tau_{n+2}} &\leq |x_{n+2} - x_{n+1}|_{\tau_{n+2}} + |x_{n+1} - x|_{\tau_{n+1}} \leq \nu (R-r) \mu^{q-\gamma} \epsilon_{n+1}^3 + (R-r)(1 - \epsilon_n) \\ &= (R-r)(1 - \epsilon_n + \nu \mu^{q-\gamma} \epsilon_{n+1}^3) < (R-r)(1 - \epsilon_n + \epsilon_{n+1}^3). \end{aligned}$$

Se  $\epsilon_0$  è sufficientemente piccolo, si ha  $\epsilon_{n+1} + \epsilon_{n+1}^3 < \epsilon_n$  (ciò segue facilmente da (14)), e quindi la quantità sopra si maggiora con  $(R-r)(1 - \epsilon_{n+1})$ , il che prova A(n+1,3).  $\square$

### 3.5 Il teorema di immersione isometrica di Nash

**Immersioni isometriche di tori.** Torniamo al problema di trovare un'immersione isometrica di una varietà Riemanniana  $(M, g)$  in uno spazio Euclideo  $\mathbb{R}^N$ . Qui considereremo il caso particolare in cui  $M$  sia il toro  $n$ -dimensionale  $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / (2\pi\mathbb{Z})^n$ . Una metrica  $g$  su  $\mathbb{T}^n$  è data semplicemente da una mappa

$$g : \mathbb{T}^n \rightarrow \text{Sym}^+(n, \mathbb{R}),$$

dal toro a valori nelle matrici reali  $n \times n$  simmetriche positive: alla mappa  $g$  è associata la metrica  $g(x)[\xi, \eta] = g(x)\xi \cdot \eta$ , dove  $\cdot$  indica il prodotto scalare in  $\mathbb{R}^n$ . Come abbiamo visto nella sezione 3.2, l'embedding  $u : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$  è isometrico da  $(\mathbb{T}^n, g)$  nello spazio Euclideo  $\mathbb{R}^N$  se e solamente se  $u$  risolve l'equazione alle derivate parziali del primo ordine

$$Du^T Du = g.$$

Ci occuperemo da principio del caso analitico: si suppone cioè che la metrica  $g$  sia una mappa analitica e si cerca un embedding  $u$  analitico. Quando si lavora con mappe analitiche è utile complessificare gli spazi e lavorare con mappe di variabile complessa.

**Complessificazione.** La complessificazione del toro  $\mathbb{T}^n$  è la varietà complessa  $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}^n = \mathbb{C}^n / (2\pi\mathbb{Z})^n = \mathbb{T}^n \times i\mathbb{R}^n$ . Il toro reale  $\mathbb{T}^n$  è dato dagli  $z \in \mathbb{T}_{\mathbb{C}}^n$  con parte immaginaria nulla, ed è utile considerare i seguenti intorni aperti del toro reale

$$\mathbb{T}^n(r) = \{z \in \mathbb{T}_{\mathbb{C}}^n \mid |\text{Im } z_j| < r \text{ per } 1 \leq j \leq n\}.$$

Se  $f : \mathbb{T}^n(r) \rightarrow \mathbb{C}$  è una funzione analitica (equivalentemente, olomorfa), e  $0 < s < r$ , vale la seguente formula di Cauchy, facilmente deducibile dalla analoga formula in una variabile: se  $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{N}^n$  è un multi-indice, risulta

$$D^h f(z) = \frac{h!}{(2\pi i)^n} \int_{\partial^* \mathbb{T}^n(s)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta_1 - z_1)^{h_1} \dots (\zeta_n - z_n)^{h_n}} d\zeta, \quad \forall z \in \mathbb{T}^n(s).$$

Qui  $h! = (h_1!) \dots (h_n!)$ , e  $\partial^* \mathbb{T}^n(s)$  indica la porzione del bordo di  $\mathbb{T}^n(s)$ ,

$$\partial^* \mathbb{T}^n(s) = \{z \in \mathbb{T}_{\mathbb{C}}^n \mid |\text{Im } z_j| = r \ \forall 1 \leq j \leq n\}.$$

Dalla formula di Cauchy si deduce facilmente il seguente:

**3.3 LEMMA.** *Per ogni  $k \in \mathbb{N}$  esiste  $c(k, n)$  tale che se  $0 < s < r \leq 1$  allora per ogni funzione  $f : \mathbb{T}^n(r) \rightarrow \mathbb{C}$  analitica risulta*

$$\|f\|_{C^k(\mathbb{T}^n(s))} \leq \frac{c(k, n)}{(r-s)^k} \|f\|_{\infty, r}.$$

Qui e nel seguito,  $\|f\|_{\infty,r}$  indica l'estremo superiore di  $f$  su  $\mathbb{T}^n(r)$ . Infatti, se  $z \in \mathbb{T}^n(s)$  e  $s < r' < r$ , nella formula di Cauchy

$$D^h f(z) = \frac{h!}{(2\pi i)^n} \int_{\partial^* \mathbb{T}^n(r')} \frac{f(\zeta)}{(\zeta_1 - z_1)^{h_1} \dots (\zeta_n - z_n)^{h_n}} d\zeta,$$

i numeri  $\zeta_j - z_j$  hanno tutti parte immaginaria - e quindi modulo - maggiori di  $r' - s$ . Dunque

$$|D^h f(z)| \leq \frac{c}{(r' - s)^{|h|}} \|f\|_{\infty,r}, \quad |h| = h_1 + \dots + h_n,$$

dove la costante  $c$  controlla anche il volume  $n$ -dimensionale di  $\partial^* \mathbb{T}^n(r')$  (uniformemente limitato poichè  $r \leq 1$ ), e passando al limite per  $r' \rightarrow r$  si ottiene la stima voluta.

**3.4 ESERCIZIO.** *Estendere la stima sopra al caso Hölderiano: dimostrare che per ogni  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ , esiste  $c(k, \alpha, n)$  tale che se  $0 < s < r \leq 1$  allora per ogni funzione  $f : \mathbb{T}^n(r) \rightarrow \mathbb{C}$  analitica risulta*

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}(\mathbb{T}^n(s))} \leq \frac{c(k, \alpha, n)}{(r - s)^{k+\alpha}} \|f\|_{\infty,r}.$$

Ogni funzione analitica  $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$  - o mappa analitica  $f : \mathbb{T}^n \rightarrow V$  in uno spazio vettoriale reale - si estende in modo unico ad una funzione analitica  $f : \mathbb{T}^n(r) \rightarrow \mathbb{C}$  - o ad una mappa analitica  $f : \mathbb{T}^n(r) \rightarrow V \otimes \mathbb{C}$  - se  $r$  è sufficientemente piccolo. Il fatto che  $f$  fosse a valori reali si traduce nel fatto che la sua estensione soddisfa  $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ . Funzioni - o mappe - con questa proprietà si dicono analitiche reali. In particolare, estenderemo la nostra metrica analitica  $g : \mathbb{T}^n \rightarrow \text{Sym}(n, \mathbb{R})$  ad una mappa analitica reale  $g : \mathbb{T}^n(r) \rightarrow \text{Sym}(n, \mathbb{C})$ . Qui  $\text{Sym}(n, \mathbb{C})$  indica lo spazio delle matrici complesse  $n \times n$  simmetriche (non lo spazio delle matrici Hermitiane).

Siano  $X(r)$  e  $Y(r)$  gli spazi vettoriali reali

$$\begin{aligned} X(r) &= \{u : \mathbb{T}^n(r) \rightarrow \mathbb{C}^N \mid u \text{ analitica reale limitata}\}, \\ Y(r) &= \{g : \mathbb{T}^n(r) \rightarrow \text{Sym}(n, \mathbb{C}) \mid g \text{ analitica reale limitata}\}. \end{aligned}$$

Sono entrambi spazi di Banach con la norma dell'estremo superiore  $\|\cdot\|_{\infty,r}$  (anche questa è una conseguenza della formula di Cauchy). La mappa  $F(u) = Du^T Du$  si estende a questi spazi: per ogni  $s < r$  abbiamo una mappa

$$F : X(r) \rightarrow Y(s).$$

La restrizione  $s < r$  è necessaria perchè le mappe  $u \in X(r)$  non hanno necessariamente derivata limitata in  $\mathbb{T}^n(r)$ . È semplice verificare che  $F$  risulta di classe  $C^\infty$  tra questi spazi, e

$$DF(u)h = Dh^T Du + Du^T Dh.$$

In effetti, la quadraticità della mappa  $F$  implica che

$$F(u + v) = F(u) + DF(u)v + F(v). \quad (21)$$

**Inversa destra di  $DF(u)$ .** Sia  $u \in X(r)$ . Dato  $w \in Y(s)$ , vorremmo saper trovare  $h$  tale che  $DF(u)h = w$ . La mappa  $h$  deve dunque risolvere l'equazione

$$Dh^T Du + Du^T Dh = w.$$

Come abbiamo visto nella sezione 3.2, questa equazione risulta più semplice da risolvere se imponiamo un'ulteriore restrizione su  $h$ , chiedendo che in ogni punto  $h$  sia ortogonale all'immagine di  $Du$ . Otteniamo così un sistema di equazioni lineari differenziali in  $h$ , che in coordinate si scrive come

$$\begin{cases} \partial_i u^\nu h^\nu = 0, \\ \partial_i h^\nu \partial_j u^\nu + \partial_i u^\nu \partial_j h^\nu = w_{ij}, \end{cases}$$

che risulta equivalente al sistema di equazioni lineari algebriche in  $h$ ,

$$\begin{cases} \partial_i u^\nu h^\nu = 0, \\ -2\partial_{ij} u^\nu h^\nu = w_{ij}, \end{cases} \quad (22)$$

Si tratta di un sistema in  $N$  incognite e  $n + n(n+1)/2 = (n^2 + 3n)/2$  equazioni (tenendo conto della simmetria). Questo sistema è cioè della forma

$$E(z)h(z) = \hat{w}(z),$$

dove  $E(z)$  è una matrice con  $(n^2+3n)/2$  righe e  $N$  colonne, i cui coefficienti sono funzioni analitiche reali che dipendono dalle derivate prime e seconde di  $u$ , e  $\hat{w}(z)$  è il vettore composto da  $n$  zeri seguiti dagli  $n(n+1)/2$  coefficienti  $w_{ij}(z)$ ,  $i \leq j$ .

**3.5 DEFINIZIONE.** *Diciamo che la mappa  $u : \mathbb{T}^n(r) \rightarrow \mathbb{C}^N$  è non-degenere (su  $\mathbb{T}^n(r)$ ) se per ogni  $z \in \mathbb{T}^n(r)$  la matrice  $E(z)$  ha rango  $(n^2 + 3n)/2$ .*

In altre parole, stiamo chiedendo che l'operatore  $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{(n^2+3n)/2}$  definito da  $E(z)$  sia surgettivo. Chiaramente, questo è possibile soltanto se  $N \geq (n^2 + 3n)/2$ . Inoltre, se  $u : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$  è non degenere e  $v : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^M$  è qualsiasi, allora

$$u \oplus v : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^{N+M}, \quad x \mapsto (u(x), v(x)),$$

è non-degenere. Si osservi anche che se  $u : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$  è analitica e non-degenere, allora anche la sua estensione  $u : \mathbb{T}^n(r) \rightarrow \mathbb{C}^N$  resta non-degenere per  $r$  sufficientemente piccolo (la condizione di non-degenerazione è aperta per la topologia  $C^2$ ). Se  $u$  è non-degenere, il sistema (22) è risolubile per ogni  $w$ : possiamo infatti prendere

$$h(z) = E(z)^T (E(z)E(z)^T)^{-1} \hat{w}(z).$$

Si noti che nello spazio affine delle soluzioni di (22), quella definita sopra è la soluzione di norma euclidea minima. Quindi possiamo definire un'inversa destra  $R(u)$  di  $DF(u)$  tramite

$$R(u)w = E(z)^T (E(z)E(z)^T)^{-1} \hat{w}(z).$$

La linearità è immediata. Dato che  $u \in X(r)$ , le sue derivate prime e seconde non saranno necessariamente limitate su  $\mathbb{T}^n(r)$ , però lo saranno su  $\mathbb{T}^n(s)$  per  $s < r$ . Quindi i coefficienti di  $E(z)^T (E(z)E(z)^T)^{-1}$  risultano limitati su  $\mathbb{T}^n(s)$ , e l'operatore  $R(u)$  risulta continuo da  $Y(s)$  a  $X(s)$ :

$$R(u) \in L(Y(s), X(s)), \quad \forall s < r.$$

Anzi, per il Lemma 3.3 la norma  $C^2$  di  $u$  su  $\mathbb{T}^n(s)$  si controlla con l'estremo superiore di  $u$  su  $\mathbb{T}^n(r)$ . Finchè  $s$  è discosto da  $r$ , i coefficienti di  $E(z)^T (E(z)E(z)^T)^{-1}$  restano uniformemente limitati in  $\mathbb{T}^n(s)$  e se  $v \in X(s)$  è una perturbazione  $C^2$  piccola di  $u$  in  $\mathbb{T}^n(s)$  i coefficienti di  $E_v(z)^T (E_v(z)E_v(z)^T)^{-1}$  sono anch'essi uniformemente limitati. Riassumiamo queste informazioni nel seguente:

**3.6 LEMMA.** *Siano  $0 < r_1 < r_0$ , e sia  $u \in X(r_0)$  un embedding non-degenere. Allora esistono  $\epsilon > 0$  e  $C \geq 0$  tali che per ogni  $s \in (0, r_1]$  e  $v \in X(s)$  con  $\|v - u\|_{C^2(\mathbb{T}^n(s))} < \epsilon$ ,  $v$  è un embedding non-degenere su  $\mathbb{T}^n(s)$  e*

$$\|R(v)w\|_{\infty, s} \leq C\|w\|_{\infty, s}.$$

Infatti, la proprietà di embedding si mantiene per perturbazioni  $C^1$ -piccole.

Mostriamo adesso che esistono effettivamente embedding analitici  $\mathbb{T}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^N$  non-degeneri. Partiamo da un embedding analitico qualsiasi  $u_0$ , ad esempio

$$u_0 : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto (\cos x_1, \sin x_1, \dots, \cos x_n, \sin x_n).$$

Questo embedding non è sicuramente non-degenere, ad esempio perchè la dimensione dello spazio di arrivo è troppo bassa. Definiamo poi l'embedding analitico

$$v_k : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{(k^2+3k)/2}, \quad (y_1, \dots, y_k) \mapsto (y_1, \dots, y_k, y_1^2, y_1 y_2, \dots, y_i y_j \ (i \leq j), \dots, x_k^2).$$

L'embedding  $v_k$  è non-degenere. Infatti la matrice  $E$  ad esso associata è della forma

$$E = \begin{pmatrix} I & * \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad (23)$$

dove il blocco in alto a sinistra è  $k \times k$ , quello in basso a destra è  $k(k+1)/2 \times k(k+1)/2$ . Si noti che la dimensione dello spazio di arrivo in questo caso è la minima consentita per l'esistenza di una mappa non-degenere. Si noti inoltre che se  $\mathbb{R}^h$  è un sottospazio di  $\mathbb{R}^k$  composto da  $h$  delle  $k$  coordinate, allora la restrizione di  $v_k$  a  $\mathbb{R}^h$  è data da  $v_h$ , composto con l'opportuna immersione di  $\mathbb{R}^{(h^2+3h)/2}$  in  $\mathbb{R}^{(k^2+3k)/2}$ .

Affermiamo che l'embedding  $v_{2n} \circ u_0 : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n^2+3n}$  è non-degenere. Infatti, fissato  $x \in \mathbb{T}^n$  esistono  $n$  indici  $i_1 < \dots < i_n$  tra 1 e  $2n$  tali che la mappa

$$\mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto (u_0^{i_1}(x), \dots, u_0^{i_n}(x)),$$

sia un diffeomorfismo locale in  $x$ . Se componiamo questa mappa con  $v_n$  troviamo un embedding non-degenere in un intorno di  $x$  (se pensiamo alle  $u^{i_j}$  come coordinate locali su  $\mathbb{T}^n$ , la matrice  $E$  ha ancora la forma (23)). Quindi un sottoinsieme delle componenti della mappa  $v_{2n} \circ u_0$  definisce un embedding non-degenere in un intorno di  $x$ , e a maggior ragione  $v_{2n} \circ u_0$  è non-degenere in tale intorno. L'arbitrarietà di  $x$  permette di concludere.

**Perturbazioni analitiche.** Mostriamo che se una metrica analitica  $g_0$  è realizzata da un embedding analitico non-degenere  $u_0$  (cioè  $F(u_0) = g_0$ ), allora tutte le metriche analitiche sufficientemente vicine a  $g_0$  sono realizzabili da qualche embedding, anche se con dominio di analiticità più piccolo. Più precisamente, vale il seguente:

**3.7 TEOREMA.** *Sia  $u_0 \in X(r_0)$  una mappa non-degenere, con  $F(u_0) = g_0$ . Allora esiste  $\delta = \delta(u_0) > 0$  tale che per ogni  $g \in Y(3r_0/4)$  con  $\|g - g_0\|_{\infty, 3r_0/4} < \delta$  esiste  $u \in X(r_0/2)$  che realizza  $F(u) = g$ . Se inoltre  $u_0$  è un embedding, anche  $u$  risulterà un embedding.*

*Dimostrazione.* Vorremmo trovare la  $u$  come limite della successione definita ricorsivamente dall'algoritmo di Newton

$$u_{k+1} = u_k - R(u_k)(F(u_k) - g) \quad (24)$$

a partire dalla mappa  $u_0$ . Dato che l'inversa destra  $R(v)$  è definita soltanto per le  $v$  non-degeneri, è necessario preoccuparsi, oltre che della convergenza, anche della buona definizione di questa successione.

Definiamo la successione decrescente  $\mu_k = r_0/2(1 + 2^{-k})$ :  $\mu_0 = r_0$ ,  $\mu_1 = 3r_0/4$ , e  $(\mu_k)$  tende a  $r_0/2$ . Dimostriamo per induzione su  $k$  le seguenti affermazioni:

**A(k):**  $u_j$  è non degenere su  $\mathbb{T}^n(\mu_{j+1})$ , per  $0 \leq j \leq k-1$ ;

**B(k):**  $u_j \in X(\mu_j)$ , per  $0 \leq j \leq k$ ;

**C(k):**  $\|u_j - u_{j-1}\|_{\infty, \mu_j} \leq \lambda 2^{-3j}$ , per  $1 \leq j \leq k$ .

Qua  $\lambda$  è un numero positivo piccolo, la cui grandezza sarà stabilita nel corso della dimostrazione.

Per  $k=0$  le uniche affermazioni da verificare sono la  $A(0)$  e la  $B(0)$ , che valgono per ipotesi. Supponiamo che le  $A(k)$ ,  $B(k)$ ,  $C(k)$  valgano per un certo  $k \in \mathbb{N}$ . Mostriamo che  $u_k$  è ancora non-degenere, come richiesto da  $A(k+1)$ . Dal Lemma 3.6 sappiamo che esistono  $\epsilon > 0$  e  $C \geq 0$  tali che

$$\begin{aligned} u \in X(r), \text{ con } r \leq 3r_0/4, \\ \|u - u_0\|_{C^2(\mathbb{T}^n(r))} < \epsilon, \end{aligned} \quad \implies \quad \begin{aligned} u \text{ non-degenere, e} \\ \|R(u)w\|_{\infty, r} \leq C\|w\|_{\infty, r}. \end{aligned} \quad (25)$$

Dobbiamo quindi stimare la distanza  $C^2$  tra  $u_k$  e  $u_0$  su  $\mathbb{T}^n(\mu_{k+1})$ . Indicheremo con  $C_1, C_2, \dots$  quelle costanti che non ci interesserà specificare ulteriormente. Per il Lemma 3.3,

$$\begin{aligned} \|u_k - u_0\|_{C^2(\mathbb{T}^n(\mu_{k+1}))} &\leq \sum_{j=1}^k \|u_j - u_{j-1}\|_{C^2(\mathbb{T}^n(\mu_{k+1}))} \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{C_1}{(\mu_j - \mu_{j+1})^2} \|u_j - u_{j-1}\|_{\infty, \mu_k} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{C_1}{r_0^2} 2^{2(j+2)} \|u_j - u_{j-1}\|_{\infty, \mu_k}. \end{aligned}$$

Quindi, per l'ipotesi induttiva C(k),

$$\|u_k - u_0\|_{C^2(\mathbb{T}^n(\mu_{k+1}))} \leq C_2 \lambda \sum_{j=1}^k 2^{2j} 2^{-3j} \leq 2C_2 \lambda,$$

e questo numero è minore di  $\epsilon$  se  $\lambda$  è sufficientemente piccolo. Questo prova A(k+1).

Il fatto che  $u_k$  sia non-degenere assicura l'esistenza di  $R(u_k)$ , e dunque  $u_{k+1}$  è ben definito. Dato che  $u_k \in X(\mu_k)$ ,  $F(u_k) - g$  appartiene a  $Y(\mu_{k+1})$ , perciò  $R(u_k)(F(u_k) - g)$  e quindi  $u_{k+1}$  appartengono a  $X(\mu_{k+1})$ . Questo prova B(k+1).

Per la (25),  $\|R(u_k)\|_{L(Y(\mu_{k+1}), X(\mu_{k+1}))} \leq C$ , quindi

$$\|u_{k+1} - u_k\|_{\infty, \mu_{k+1}} = \|R(u_k)(F(u_k) - g)\|_{\infty, \mu_{k+1}} \leq C \|F(u_k) - g\|_{\infty, \mu_{k+1}}. \quad (26)$$

Dimostriamo prima C(k+1) per  $k \geq 1$ , lasciando alla fine il compito di provare la stima C(1). Dalla quadraticità di  $F$  (21) segue che

$$F(u_k) = F(u_{k-1} + (u_k - u_{k-1})) = F(u_{k-1}) + DF(u_{k-1})(u_k - u_{k-1}) + F(u_k - u_{k-1}).$$

Dalla definizione dell'algorithm di Newton (24) e dal fatto che  $R$  è un'inversa destra di  $DF$ , si ha  $DF(u_{k-1})(u_k - u_{k-1}) = g - F(u_{k-1})$ , perciò

$$F(u_k) - g = F(u_k - u_{k-1}).$$

Dato che  $F(u)$  è quadratica nelle derivate prime di  $u$ , vale la stima

$$\|F(u_k - u_{k-1})\|_{\infty, \mu_{k+1}} \leq C_3 \|u_k - u_{k-1}\|_{C^1(\mathbb{T}^n(\mu_{k+1}))}^2.$$

Quindi (26) e il Lemma 3.3 implicano

$$\begin{aligned} \|u_{k+1} - u_k\|_{\infty, \mu_{k+1}} &\leq C_4 \|u_k - u_{k-1}\|_{C^1(\mathbb{T}^n(\mu_{k+1}))}^2 \\ &\leq \frac{C_5}{(\mu_k - \mu_{k+1})^2} \|u_k - u_{k-1}\|_{\infty, \mu_k}^2 = \frac{C_5}{r_0^2} 2^{2(k+2)} \|u_k - u_{k-1}\|_{\infty, \mu_k}^2. \end{aligned}$$

Dalla C(k) ricaviamo allora

$$\|u_{k+1} - u_k\|_{\infty, \mu_{k+1}} \leq C_6 2^{2k} \lambda^2 2^{-6k} = C_6 \lambda^2 2^{-4k}.$$

Per avere C(k+1) si vuole che l'ultimo numero non superi  $\lambda 2^{-3k}$ , e questo vale se  $\lambda$  è sufficientemente piccolo.

Avendo finalmente fissato quanto piccolo deve essere  $\lambda$ , verifichiamo che se  $g$  è abbastanza vicino a  $g_0$  vale C(1). Infatti per (26)

$$\|u_1 - u_0\|_{\infty, \mu_1} \leq C \|F(u_0) - g\|_{\infty, \mu_1} = C \|g_0 - g\|_{\infty, 3r_0/4},$$

e se  $\delta > 0$  è sufficientemente piccolo  $\|g - g_0\|_{\infty, 3r_0/4} < \delta$  implica  $\|u_1 - u_0\| \leq \lambda 2^{-3}$ .

Se  $u_0 \in X(r_0)$  è un embedding e  $u \in X(r_0/2)$  è sufficientemente vicino a  $u_0$  in norma  $C^1(\mathbb{T}^n(r_0/2))$ , allora anche  $u$  è un embedding. Allora l'ultima affermazione del teorema segue

dal fatto che, prendendo eventualmente  $\lambda$  - e conseguentemente  $\delta$  - ancora più piccolo, la  $C(k)$  e il Lemma 3.3 ci dicono che la  $u$  è vicina a  $u_0$  in norma  $C^1$  quanto vogliamo:

$$\begin{aligned} \|u - u_0\|_{C^1(\mathbb{T}^n(r_0/2))} &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \|u_j - u_{j-1}\|_{C^1(\mathbb{T}^n(r_0/2))} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{C_7}{\mu_j - r_0/2} \|u_j - u_{j-1}\|_{\infty, \mu_j} \\ &= \frac{C_7}{r_0} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{j+1} \|u_j - u_{j-1}\|_{\infty, \mu_j} \leq \frac{C_7}{r_0} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{j+1} \lambda 2^{-3j} \leq C_8 \lambda. \end{aligned}$$

Questo conclude la dimostrazione del teorema.  $\square$

**3.8 OSSERVAZIONE.** *Nonostante questo teorema sia molto simile al Teorema di iterazione alla Nash-Moser astratto 3.2, non risulta agevole farlo seguire direttamente da quel risultato. Infatti nel Teorema 3.2 si supponeva che l'inversa destra - o anche soltanto un'inversa approssimata - esistesse in tutta una palla il cui raggio non dipendeva da quale spazio si stesse considerando nella scala di Banach. Qui invece per avere l'esistenza dell'inversa destra in  $u$  serve che  $u - u_0$  abbia norma  $C^2$  minore di  $\epsilon$ , e traducendo questa richiesta in termini della norma degli spazi  $X(r)$  (grazie al Lemma 3.3) non si ottiene una palla di raggio fissato in cui l'esistenza dell'inversa destra sia assicurata.*

Il teorema appena dimostrato fornisce una proprietà di apertura dell'insieme delle metriche analitiche realizzabili da embedding. Per dimostrare che effettivamente tutte le metriche analitiche sono realizzabili sono necessari argomenti geometrici che qui non tratteremo. Si veda [GJ71] per una dimostrazione completa del fatto che ogni varietà compatta munita di una metrica analitica si immerge analiticamente in qualche spazio Euclideo.

**Perturbazioni di classe  $C^{k,\alpha}$ .** Accenniamo qui, senza dimostrazioni, a come sia possibile estendere il Teorema 3.7 a metriche di classe  $C^{k,\alpha}$ ,  $k \geq 2$  e  $\alpha \in (0, 1)$ . Si veda [Jac72]. Il caso  $C^k$ ,  $k \geq 3$ , è trattato invece, ma in maniera più complicata, nell'articolo originale di Nash [Nas56].

Il punto di partenza è costituito dal seguente risultato sull'approssimazione di funzioni  $C^{k,\alpha}$  mediante funzioni analitiche:

**3.9 TEOREMA.** *Esiste una mappa  $H : C^0(\mathbb{T}^n) \rightarrow \prod_{j=0}^{\infty} X(2^{-j})$  che a  $f \in C^0(\mathbb{T}^n)$  associa  $H(f) = (f_0, f_1, f_2, \dots)$ ,  $f_j \in X(2^{-j})$ , con le seguenti proprietà:  $f_0 = 0$ ,  $f_j \rightarrow f$  in  $C^0(\mathbb{T}^n)$ , e se  $f \in C^{k,\alpha}(\mathbb{T}^n)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ , allora*

$$\|f_j - f_{j-1}\|_{\infty, 2^{-j}} \leq \frac{C(k, \alpha)}{2^{j(k+\alpha)}} \|f\|_{C^{k,\alpha}(\mathbb{T}^n)}.$$

*Viceversa, se una successione  $(f_j)$  verifica  $f_j \in X(2^{-j})$  e*

$$\|f_j - f_{j-1}\|_{\infty, 2^{-j}} \leq \frac{K}{2^{j(k+\alpha)}},$$

*allora esiste  $f \in C^{k,\alpha}(\mathbb{T}^n)$  tale che  $f_j \rightarrow f$  in  $C^{k,\alpha-\epsilon}(\mathbb{T}^n)$ , per ogni  $\epsilon \in (0, \alpha]$ .*

**3.10 ESERCIZIO.** *Dimostrare la seconda parte (il viceversa) del teorema sopra.*

Combinando questo risultato di approssimazione con l'argomento di iterazione alla Nash-Moser utilizzato nel Teorema 3.7 (ma con stime quantitative analoghe a quelle viste nel Teorema 3.2), si dimostra la seguente estensione del Teorema 3.7 al caso  $C^{k,\alpha}$ :

**3.11 TEOREMA.** *Sia  $u_0 : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$  un embedding analitico non-degenere, e sia  $g_0 = F(u_0)$ . Per ogni  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$ , e  $\alpha \in (0, 1)$ , esiste un  $\delta = \delta(k, \alpha) > 0$  tale che per ogni metrica  $g$  di classe  $C^{k,\alpha}(\mathbb{T}^n)$  con  $\|g - g_0\|_{C^{k,\alpha}(\mathbb{T}^n)} < \delta$ , esiste un embedding  $u \in C^{k,\alpha}(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}^N)$  tale che  $F(u) = g$ .*

L'idea è quella di approssimare la metrica  $g$  con una successione di metriche analitiche  $(g_j)$ , grazie al Teorema 3.9, di usare la vicinanza di  $g_j$  a  $g_0$  per trovare embedding analitici  $u_j$  (con domini sempre più piccoli) tali che  $F(u_j) = g_j$ , ed infine di ottenere  $u$  come limite di  $(u_j)$ .

Il Teorema 3.11 contiene più o meno tutta l'analisi necessaria a dimostrare il teorema di immersione di Nash. Gli argomenti necessari per concludere sono di natura geometrica. L'osservazione importante è che se gli embedding  $u : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$  e  $v : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^M$  realizzano le metriche  $g$  e  $h$ , allora l'embedding

$$u \oplus v : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^{N+M}, \quad x \mapsto (u(x), v(x)),$$

realizza la metrica  $g + h$ . In altre parole,  $F(u \oplus v) = F(u) + F(v)$ .

Sia  $g$  la metrica che vogliamo realizzare con un embedding. Si parte da un qualsiasi embedding analitico non-degenere  $u_0$ , che realizza la metrica  $g_0$ . A meno di riscaldamenti, possiamo supporre che  $g_0$  sia così piccola che  $g - g_0$  sia ancora una metrica. A questo punto si trova un embedding  $u_1$  tale che  $F(u_1) + g_0$  sia vicino a  $g$ . Qua si usa un risultato dello stesso Nash [Nas54] (ma vedi anche [Kui55]) sull'esistenza di embedding isometrici di classe  $C^1$ . Infine, grazie al fatto che  $u_0$  è non-degenere, si usa il Teorema 3.11 per perturbare l'embedding  $u_0 \oplus u_1$  - che realizza la metrica  $F(u_1) + g_0$  - in modo da realizzare  $g$ . Il risultato finale è il seguente:

**3.12 TEOREMA.** *Sia  $g$  una metrica di classe  $C^{k,\alpha}$  su  $\mathbb{T}^n$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ . Se  $N$  è sufficientemente grande,  $g$  è realizzata da un embedding  $u \in C^{k,\alpha}(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}^N)$ .*

Questo teorema vale in realtà per varietà qualsiasi, anche non compatte. Lavorare con varietà qualsiasi porta ad alcune complicazioni tecniche (le metriche non sono più mappe a valori in uno spazio vettoriale, ma sezioni di un fibrato, la complessificazione della varietà richiede una costruzione più laboriosa, ecc.), ma le idee sono sostanzialmente le stesse.

La stima sulla dimensione dello spazio Euclideo trovata da Nash nel caso compatto è  $n/2(3n + 11)$ . Nel lavoro di Nash si trova anche una stima (peggiore) per il caso non compatto, ma l'argomento contiene un errore (sistemabile). Il lavoro di Gromov [Gro86] ha però mostrato come ottenere nel caso non compatto la stessa stima sulla dimensione del caso compatto.

## Riferimenti bibliografici

- [Dei85] K. Deimling, *Nonlinear functional analysis*, Springer, Berlin, 1985.
- [GJ71] R. Greene and H. Jacobowitz, *Analytic isometric embeddings*, Ann. of Math. **93** (1971), 189–204.
- [Gro86] M. Gromov, *Partial differential relations*, Springer, New York, 1986.
- [Jac72] H. Jacobowitz, *Implicit function theorems and isometric embeddings*, Ann. of Math **95** (1972), 191–225.
- [Kui55] N. H. Kuiper, *On  $C^1$  isometric imbeddings*, Proc. Kon. Ac. Wet. Amsterdam A **58** (1955), 545–556, (Indagationes Mathematicae).
- [Mos66a] J. Moser, *A rapidly convergent iteration method and non-linear partial differential equations - I*, Ann. Scuola Normale Sup. **20** (1966), 265–315.
- [Mos66b] ———, *A rapidly convergent iteration method and non-linear partial differential equations - II*, Ann. Scuola Normale Sup. **20** (1966), 499–535.
- [Nas54] J. Nash,  *$C^1$  isometric imbeddings*, Ann. of Math. **60** (1954), 383–396.
- [Nas56] ———, *The imbedding problem for Riemannian manifolds*, Ann. of Math. **63** (1956), 20–63.
- [Zeh75] E. Zehnder, *Generalized implicit function theorems with applications to some small divisor problem, I*, Comm. Pure Appl. Math. **28** (1975), 91–140.