2.2 Criterio di differenziabilità

Siano X, Y spazi di Banach e sia $U \subset X$ un aperto. Se $F \in C^k(U, Y)$, la formula di Taylor con resto di Lagrange mostra che, ponendo

$$R(x,h) = F(x+h) - \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} DF^j(x) h^j,$$

si ha

$$\lim_{(x,h)\to(x_0,0)} \frac{R(x,h)}{|h|^k} = 0 \quad \forall x_0 \in U.$$

Per studiare la differenziabilità di mappe tra spazi di Banach è utile sfruttare una sorta di viceversa di questo fatto. Ricordiamo che $L^j(X,Y)$ indica lo spazio di Banach delle applicazioni j-lineari e continue $A : X^j \to Y$, munito della norma

$$\|A\| = \sup_{\substack{(x_1,\dots,x_j)\in X^j \\ |x_1|\leq 1,\dots,|x_j|\leq 1}} |A[x_1,\dots,x_k]|.$$

Il sottospazio chiuso delle applicazioni j-lineari simmetriche viene indicato con $L^j_s(X,Y)$.

2.1 Teorema. *Siano X, Y spazi di Banach, $U \subset X$ un aperto, $F : U \to Y$ una mappa continua. Siano $A_j : U \to L^j_s(X,Y)$ mappe continue, $j = 0, 1, \dots, k$, e supponiamo che posto*

$$R(x,h) = F(x+h) - \sum_{j=0}^{k} A_j(x) h^j,$$

si abbia

$$\lim_{(x,h)\to(x_0,0)} \frac{R(x,h)}{|h|^k} = 0 \quad \forall x_0 \in U.$$

Allora F è di classe C^k e $DF^j = A_j$ per ogni $j = 0, 1, \dots, k$.

Usando questo criterio, è facile dimostrare il seguente risultato sulla differenziabilità di operatori di composizione:

2.2 Proposizione. *Sia K uno spazio topologico compatto, e sia $f : K \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una mappa continua, differenziabile k volte rispetto alla seconda variabile, e tale che le funzioni*

$$\partial_2^j f : K \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, k,$$

siano continue. Allora la mappa

$$F : C^0(K,\mathbb{R}) \to C^0(K,\mathbb{R}), \quad F(u)(x) = f(x, u(x)) \;\; \forall x \in K,$$

risulta di classe C^k e

$$DF^j(u)[h_1, \dots, h_j](x) = \partial_2^j f(x, u(x)) h_1(x) \dots h_j(x), \quad \forall j = 1, \dots, k.$$

2.3 Esercizio. *Generalizzare questo risultato all'operatore*

$$F : C^0(K,X) \to C^0(K,Y), \quad F(u)(x) = f(x, u(x)),$$

dove $f : K \times X \to Y$, X, Y spazi di Banach.

2.4 Esercizio. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, sia $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e sia $k \in \mathbb{N}$. Discutere la buona definizione e la differenziabilità della mappa*

$$F : C^k(\overline{\Omega},\mathbb{R}) \to C^k(\overline{\Omega},\mathbb{R}), \quad F(u)(x) = f(x, u(x)),$$

in termini della differenziabilità della f.

2.5 Esercizio. *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato. Supponiamo che la funzione $k : I \times I \to \mathbb{R}$ sia continua, che $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia continua, differenziabile rispetto alla seconda variabile, e tale che $\partial_2 f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia continua. Dimostrare che la mappa*

$$F : C^0(I, \mathbb{R}) \to C^0(I, \mathbb{R}), \quad F(u)(t) = \int_I k(t, s) f(s, u(s))\, ds$$

è di classe C^1 e che

$$DF(u)h(t) = \int_I k(t, s)\partial_2 f(s, u(s))h(s)\, ds.$$

2.6 Esercizio. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato. Si dice che*

$$f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x, s) \mapsto f(x, s),$$

è una funzione di Caratheodory se è continua in s per quasi ogni $x \in \Omega$, e misurabile in x, per ogni $s \in \mathbb{R}$. Data $u : \Omega \to \mathbb{R}$, si ponga

$$F(u) : \Omega \to \mathbb{R}, \quad F(u)(x) = f(x, u(x)).$$

(i) Dimostrare che se u è misurabile su Ω, allora $F(u)$ è misurabile su Ω.

(ii) Dimostrare che se (u_n) converge a u in musura, allora $(F(u_n))$ converge a $F(u)$ in misura.

(iii) Supponiamo inoltre che, dati $p, q \in [1, +\infty)$, esista $a \in L^q(\Omega)$ e $b \geq 0$ tali che

$$|f(x, s)| \leq a(x) + b|s|^{p/q}, \quad \text{per q.o. } x \in \Omega, \ \forall s \in \mathbb{R}.$$

Dimostrare che $F : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$ è ben definita e continua.

(iv) Nelle stesse ipotesi di (iii), assumendo inoltre che $1/p+1/q = 1$, dimostrare che il funzionale

$$\varphi(u) = \int_\Omega \left(\int_0^{u(x)} f(x, s)\, ds \right) dx$$

è ben definito e di classe C^1 su $L^p(\Omega)$, e che $D\varphi(u) = F(u)$.

(v) Sia ora $p > 2$ e sia q tale che $1/p + 1/q = 1$. Supponiamo che f sia derivabile rispetto a s, e che tanto f quanto $\partial_s f$ siano funzioni di Caratheodory. Supponiamo inoltre che esistano $a \in L^{p/(p-2)}(\Omega)$ e $b \geq 0$ tali che

$$|\partial_s f(x, s)| \leq a(x) + b|s|^{p-2}.$$

Dimostrare che la mappa $F : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$ è ovunque differenziabile, e che

$$DF(u)h(x) = \partial_s f(x, u(x))h(x).$$

(vi) Consideriamo infine il caso $p = 2$. Supponiamo che f sia derivabile rispetto a s, che tanto f quanto $\partial_s f$ siano funzioni di Caratheodory, e che $|\partial_s f(x, s)| \leq c$. Dimostrare che F è differenziabile in un punto u_0 se e solamente se f è lineare in s.

2.3 Un problema di Dirichlet

Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tale che $f(0) = 0$. Allora il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} u''(x) + f(u(x)) = 0, & \forall x \in (0, \pi), \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{cases} \tag{9}$$

ammette la soluzione banale $u \equiv 0$. Ci proponiamo di rispondere alla seguente domanda: sotto quali condizioni possiamo escludere l'esistenza di altre soluzioni "piccole"?

Diamo questo problema un'impostazione funzionale. Consideriamo il sottospazio chiuso di $C^2([0,\pi],\mathbb{R})$,

$$X = \left\{ u \in C^2([0,\pi],\mathbb{R}) \mid u(0) = (\pi) = 0 \right\},$$

e la mappa

$$F : X \to Y := C^0([0,\pi],\mathbb{R}), \quad F(u) = u'' + f \circ u.$$

Risulta $F(0) = 0$, e desideriamo poter escludere l'esistenza di funzioni $u \in X$ con $\|u\|_{C^2}$ arbitrariamente piccola tali che $F(u) = 0$. Si osservi che dall'equazione segue che ogni soluzione u (necessariamente differenziabile due volte) è di classe C^∞, dunque possiamo tranquillamente lavorare in spazi di funzioni C^2 ed ottenere risposte valide per funzioni C^∞.

La mappa $u \mapsto u''$ è lineare e limitata da C^2 a C^0, quindi è differenziabile infinite volte. La mappa $u \to f \circ u$ da C^2 a C^0 si fattorizza mediante l'inclusione (lineare e continua) $C^2 \hookrightarrow C^0$, quindi è differenziabile infinite volte per la Proposizione 2.2. Qui ci interessa che F sia di classe C^1 (e dunque sarebbe stato sufficiente supporre $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$), e che

$$DF(u)h = h'' + f'(u)h, \quad \forall (u,h) \in X \times X.$$

In particolare,

$$DF(0)h = h'' + ah,$$

dove $a = f'(0)$. Studiamo le proprietà dell'operatore lineare

$$T_a : X \to Y, \quad Th = h'' + ah.$$

Il nucleo dell'operatore T_a consiste delle soluzioni del problema di Dirichlet lineare

$$\begin{cases} h'' + ah = 0 \\ h(0) = h(\pi) = 0. \end{cases}$$

Le soluzioni dell'equazione $h'' + ah = 0$ sono:

$$h(x) = \begin{cases} \alpha \sin \omega x + \beta \cos \omega x, & \text{se } a = \omega^2 > 0, \\ \alpha x + \beta, & \text{se } a = 0, \\ \alpha e^{\omega x} + \beta e^{-\omega x}, & \text{se } a = -\omega^2 < 0. \end{cases}$$

Troviamo quindi soluzioni non banali che si annullano sia in 0 che in π se e solo se $a = \omega^2$ con $\omega \in \mathbb{Z}^+$. Quindi T_a non è iniettivo se e solamente se

$$a \in \left\{ \omega^2 \mid \omega \in \mathbb{Z}^+ \right\}.$$

In questo caso, il nucleo di $T_a = T_{\omega^2}$ è generato dalla funzione $x \mapsto \sin \omega x$.

Verifichiamo che se $a \notin \left\{ \omega^2 \mid \omega \in \mathbb{Z}^+ \right\}$, l'operatore T_a risulta anche surgettivo. Data una funzione $v \in C^0([0,\pi],\mathbb{R})$, dobbiamo risolvere il problema di Dirichlet lineare non omogeneo

$$\begin{cases} h'' + ah = v \\ h(0) = h(\pi) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Sia h_1 la soluzione del problema di Cauchy non omogeneo

$$\begin{cases} h'' + ah = v \\ h(0) = 0, \ h'(0) = 1, \end{cases}$$

e sia h_0 la soluzione del problema di Cauchy omogeneo

$$\begin{cases} h'' + ah = 0 \\ h(0) = 0, \ h'(0) = 1. \end{cases}$$

Dato che $\ker T_a = (0)$, $h_0(\pi) \neq 0$, quindi $h = h_1 - ch_0$ risolve (10) per $c = h_1(\pi)/h_0(\pi)$.

2.7 Esercizio. *Trovare una formula integrale per la soluzione u di (10), per $a \notin \{\omega^2 \mid \omega \in \mathbb{Z}^+\}$.*

Riassumiamo i risultati ottenuti nel seguente:

2.8 Lemma. *Sia $a \in \mathbb{R}$. L'operatore*

$$T_a : \{u \in C^2([0,\pi],\mathbb{R}) \mid u(0) = u(\pi) = 0\} \to C^0([0,\pi],\mathbb{R}), \quad T_a h = h'' + ah,$$

è un isomorfismo se e solamente se a non è il quadrato di un intero non nullo.

Dunque $DF(0)$ è un isomorfismo se e solamente se

$$f'(0) \notin \{\omega^2 \mid \omega \in \mathbb{Z}^+\}.$$

Il teorema della funzione inversa garantisce in questo caso l'esistenza di un $\epsilon > 0$ tale che $u \equiv 0$ sia l'unica soluzione di (9) con norma C^2 minore di ϵ. Condizione necessaria affiché esistano soluzioni di (9) arbitrariamente piccole in norma C^2 ma non nulle è che $f'(0)$ sia il quadrato di un intero non nullo.

Supponiamo che $f'(0)$ sia il quadrato di un intero non nullo. In questo caso è certamente possibile l'esistenza di soluzioni non nulle arbitrariamente piccole: ad esempio se f è lineare troviamo un sottospazio lineare di dimensione uno di soluzioni. In generale però non possiamo aspettarci l'esistenza di queste soluzioni piccole. Quello che possiamo aspettarci è il fenomeno seguente: sia $g \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tale che $g(0) = 0$ e $g'(0) = 0$. Consideriamo la famiglia ad un parametro di problemi di Dirichlet

$$\begin{cases} u''(x) + g(u(x)) + \lambda u(x) = 0, & \forall x \in (0,\pi), \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Se ω è un intero non nullo, esistono soluzioni (λ, u) di (11) con λ arbitrariamente vicino a ω^2 e u C^2-piccolo ma non nullo. Si verifichino questi fatti risolvendo gli esercizi seguenti.

2.9 Esercizio. *Determinare l'immagine di T_a, nel caso $a \in \{\omega^2 \mid \omega \in \mathbb{Z}^+\}$.*

2.10 Esercizio. *Supponiamo che $f(0) = 0$, $f'(0) = \omega^2$ con ω intero non nullo, e $f''(0) \neq 0$. Dimostrare che esiste $\epsilon > 0$ tale che il problema (9) non ha soluzioni non nulle con norma C^2 minore di ϵ.*

2.11 Esercizio. *Supponiamo che $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$, e sia ω un intero non nullo. Dimostrare che per ogni $\epsilon > 0$ esistono $\lambda \in (\omega^2 - \epsilon, \omega^2 + \epsilon)$ e $u \in X$, $u \neq 0$, $\|u\|_{C^2} < \epsilon$ tali che (λ, u) sia soluzione di (11).*

2.4 Cenni su operatori di Fredholm

Elenchiamo, senza dimostrazioni, le definizioni e i risulati principali che riguardano gli operatori di Fredholm. Le dimostrazioni si possono trovare ad esempio in [KG83], Capitolo III.§2.3. Si vedano anche [Kat80], Capitolo IV.§5 per risultati più fini sulla stabilità degli operatori di Fredholm, e [Dou98], Capitolo 5, per la teoria Hilbertiana.

Siano X, Y spazi di Banach reali. Un'applicazione lineare e continua $T \in L(X,Y)$ si dice *semi-Fredholm* se la sua immagine è chiusa, ed almeno uno degli spazi vettoriali $\ker T$ e $\operatorname{coker} T := Y/\operatorname{ran} T$ ha dimensione finita. In questo caso è ben definito *l'indice di Fredholm* di T,

$$\operatorname{ind} T = \dim \ker T - \dim \operatorname{coker} T \in \overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Se $\operatorname{ind} T \in \mathbb{Z}$, T si dice *Fredholm.*

2.12 Esercizio. *Dimostrare che se $T \in L(X,Y)$ ha nucleo e conucleo di dimensione finita allora è Fredholm (in altre termini, la chiusura dell'immagine segue da queste ipotesi).*

Se X e Y hanno dimensione finita, ogni $T \in L(X,Y)$ è Fredholm di indice $\dim X - \dim Y$. E' semplice esibire molti esempi di operatori di Fredholm nello spazio di Hilbert

$$\ell^2 = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid |x|_2 < \infty\}, \quad |x|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle_2}, \ \ \langle x, y\rangle_2 = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)y(n).$$

Sia $k \in \mathbb{N}$. L'operatore $L \in L(\ell^2)$, $(Lx)(n) = x(n+k)$ ha nucleo di dimensione k ed è surgettivo, quindi è Fredholm di indice k. L'operatore $R \in L(\ell^2)$, $Rx(n) = x(n-k)$ per $n \geq k$ e $Rx(n) = 0$ per $n < k$, è iniettivo ed ha immagine chiusa di codimensione k, quindi è Fredholm di indice $-k$. In effetti, $LR = I$.

L'operatore $L \in L(\ell^2)$, $(Lx)(n) = x(2n)$ ha nucleo infinito dimensionale ed è surgettivo, quindi è semi-Fredholm di indice $+\infty$. L'operatore $R \in L(\ell^2)$, $(Rx)(n) = x(n/2)$ per n pari e $(Rx)(n) = 0$ per n dispari, è iniettivo ed ha immagine chiusa di codimensione infinita, quindi è semi-Fredholm di indice $-\infty$. Anche qui, $LR = I$.

Sia $\tilde{\Phi}(X,Y)$ il sottoinsieme di $L(X,Y)$ costituito dagli operatori semi-Fredholm, e sia $\Phi(X,Y)$ il sottoinsieme dei Fredholm. I seguenti teoremi sono risultati di stabilità degli operatori di semi-Fredholm per perturbazioni piccole e per perturbazioni compatte.

2.13 TEOREMA. *Gli insiemi $\tilde{\Phi}(X,Y)$ e $\Phi(X,Y)$ sono aperti in $L(X,Y)$, e la funzione indice $\mathrm{ind} : \tilde{\Phi}(X,Y) \to \overline{\mathbb{Z}}$ è localmente costante (quindi è costante su ogni componente connessa).*

Ricordiamo che un operatore $K \in L(X,Y)$ si dice compatto se K manda insiemi limitati in insiemi pre-compatti. L'insieme degli operatori compatti è un sottospazio chiuso di $L(X,Y)$, e si indica con $L_c(X,Y)$.

2.14 TEOREMA. *Se $T \in \tilde{\Phi}(X,Y)$ e $K \in L_c(X,Y)$, allora $T+K \in \tilde{\Phi}(X,Y)$ e $\mathrm{ind}\,(T+K) = \mathrm{ind}\,T$.*

Composizione di operatori di Fredholm è Fredholm, e l'indice si comporta addittivamente:

2.15 TEOREMA. *Siano $T \in \Phi(X,Y)$ e $S \in \Phi(Y,Z)$. Allora $ST \in \Phi(X,Z)$ e $\mathrm{ind}\,ST = \mathrm{ind}\,S + \mathrm{ind}\,T$.*

Nella pratica, è spesso utile ridurre la verifica di proprietà di Fredholm a stime, come mostrano gli esercizi seguenti.

2.16 ESERCIZIO. *Sia $T \in L(X,Y)$. Mostrare che T è iniettiva ed ha immagine chiusa se e solamente se esiste $c > 0$ tale che*

$$|x|_X \leq c|Tx|_Y \quad \forall x \in X.$$

2.17 ESERCIZIO. *Sia $T \in L(X,Y)$. Mostrare che T è semi-Fredholm con indice minore di $+\infty$ se e solamente se esistono $c > 0$ e $K \in L_c(X,Z)$ (con Z spazio di Banach) tali che*

$$|x|_X \leq c(|Tx|_Y + |Kx|_z) \quad \forall x \in X.$$

2.5 Soluzioni periodiche di un'equazione del primo ordine

Indichiamo con $C^k_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle funzioni 2π-periodiche di classe C^k:

$$C^k_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \left\{u \in C^k(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid u(x+2\pi) = u(x)\ \forall x \in \mathbb{R}\right\}.$$

In altri termini, $C^k_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ è lo spazio delle funzioni C^k sul cerchio $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. La norma C^k lo rende uno spazio di Banach.

Sia f un diffeomorfismo crescente della retta reale: $f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $f' > 0$, e $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Data $g \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, cerchiamo le soluzioni 2π-periodiche dell'equazione

$$u'(x) + f(u(x)) = g(x). \tag{12}$$

Mostriamo innanzitutto che questo problema ha al più una soluzione. Infatti, se u e v sono soluzioni 2π-periodiche di (12), si ha

$$u'(x) - v'(x) + f(u(x)) - f(v(x)) = 0.$$

Sia $\bar{x}$ un punto di massimo per $u - v$. Allora $(u - v)'(\bar{x}) = 0$, quindi $f(u(\bar{x})) = f(v(\bar{x}))$. Per l'iniettività di f, $u(\bar{x}) = v(\bar{x})$ e dunque $u - v \leq 0$. Scambiando il ruolo di u e v (oppure considerando un punto di minimo), otteniamo che $u = v$.

Per studiare l'esistenza di soluzioni diamo a questo problema un'impostazione funzionale. Consideriamo dunque la mappa

$$F : C^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad F(u) = u' + f \circ u.$$

L'argomento appena esibito mostra che F è iniettiva (in quell'argomento era infatti sufficiente assumere che le soluzioni fossero differenziabili). Se riusciremo a dimostrare che F è anche surgettiva, avremo mostrato che per ogni $g \in C^0_{2\pi}(\mathbb{R}, R)$ l'equazione (12) possiede una ed una sola soluzione $u \in C^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Dato che l'equazione stessa mostra che se g è C^k allora la u è C^{k+1}, avremo anche dimostrato che per ogni $g \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'equazione (12) possiede una ed una sola soluzione $u \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

La mappa F risulta differenziabile infinite volte, e

$$F(u)h = h' + f'(u)h.$$

Si tratta dunque di studiare l'operatore

$$S_\varphi : C^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad S_\varphi v = v' - \varphi v,$$

nel caso $\varphi = -f' \circ u$. Studiamo questo operatore nel caso generale di una $\varphi \in C^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. L'equazione

$$v' - \varphi v = 0$$

ha soluzione generale $v(x) = ce^{\Phi(x)}$, con $c \in \mathbb{R}$ e $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)\, dt$. Tale soluzione è 2π-periodica se e solamente se $\int_0^{2\pi} \varphi(t)\, dt = 0$. Quindi S_φ è iniettiva se e solamente se la media di φ su $[0, 2\pi]$ è non nulla.

Studiamo l'immagine di S_φ. Se $w \in C^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, cerchiamo soluzioni 2π-periodiche di

$$v' - \varphi v = w.$$

Le soluzioni generali di questa equazione si ottengono moltiplicando ambo i membri per il fattore integrante $e^{-\Phi}$, ottenendo

$$e^{-\Phi}(v' - \varphi v) = e^{-\Phi} w,$$

o equivalentemente

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-\Phi(x)} v(x)\right) = e^{-\Phi(x)} w(x).$$

Quindi

$$e^{-\Phi(x)} v(x) = \int_0^x e^{-\Phi(t)} w(t)\, dt + c,$$

ossia

$$v(x) = e^{\Phi(x)} \left(\int_0^x e^{-\Phi(t)} w(t)\, dt + c \right).$$

Dato che v risolve un'equazione del primo ordine con coefficienti 2π-periodici, v è 2π-periodica se e solamente se $v(0) = v(2\pi)$, cioè se e solamente se

$$e^{\Phi(2\pi)} \left(\int_0^{2\pi} e^{-\Phi(t)} w(t)\, dt + c \right) = c,$$

ossia

$$(1-e^{\Phi(2\pi)})c = e^{\Phi(2\pi)}\int_0^{2\pi} e^{-\Phi(t)}w(t)\,dt.$$

Dato che esiste qualche $w \in C^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ per cui il secondo membro è non nullo, questa equazione in c ha soluzione per ogni w se e solamente se $e^{\Phi(2\pi)} \neq 1$, ossia $\Phi(2\pi) \neq 0$. Abbiamo quindi dimostrato che S_φ è surgettiva se e solamente se la media di φ su $[0,2\pi]$ è non nulla.

Si osservi che una volta caratterizzata l'iniettività degli operatori S_φ avremmo anche potuto ragionare come segue: (i) dimostrare che uno di essi, ad esempio S_c con c costante, è Fredholm di indice 0 (essenzialmente con i conti sopra, ma con qualche semplificazione), (ii) verificare che la differenza $S_\varphi - S_\psi$ è l'operatore di moltiplicazione per la funzione $\psi-\varphi$, e che tale operatore risulta compatto da $C^1_{2\pi}$ a $C^0_{2\pi}$, (iii) conlcudere che S_φ è sempre Fredholm di indice 0, e quindi che è iniettivo se e solo se surgettivo. Appellarsi alla teoria di Fredholm è superfluo per operatori semplici come questo, ma risulta importante per operatori più complicati, per i quali la determinazione del conucleo può essere delicata.

Riassumiamo i risultati ottenuti nel seguente:

2.18 Lemma. *Sia $\varphi \in C^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Allora l'operatore lineare e continuo*

$$S_\varphi : C^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to C^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \quad S_\varphi v = v' - \varphi v,$$

è un isomorfismo se e solamente se $\int_0^{2\pi}\varphi(t)\,dt \neq 0$.

2.19 Esercizio. *Supponiamo che $\varphi \in C^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ abbia media nulla su $[0,2\pi]$. Determinare l'immagine di S_φ.*

Torniamo allo studio del differenziale $DF(u) = S_{-f'\circ u}$. Dato che per ipotesi $f' > 0$, la funzione $f' \circ u$ ha integrale positivo, e $DF(u)$ è un isomorfismo per ogni $u \in C^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Il teorema della funzione inversa implica che F è localmente invertibile.

Quindi l'immagine di F è aperta: per dimostrare che F è surgettiva ci basterà dimostrare che l'immagine di F è anche chiusa. Insieme all'iniettività di F, questo implicherà che F è un diffeomorfismo di $C^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ su $C^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Sia $(g_n) \subset F(C^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R}))$, $g_n = F(u_n)$, una successione che converge a g in $C^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Quindi

$$u_n' + f\circ u_n \to g \quad \text{uniformemente.} \tag{13}$$

Sia x_n un punto di massimo per u_n. Allora $u_n'(x_n) = 0$, da cui $|f(u_n(x_n)) - g(x_n)| \to 0$. In particolare $(f(u_n(x_n)))$ è limitata. Dato che f è un omeomorfismo di $\mathbb{R}$ su $\mathbb{R}$, anche $(u_n(x_n))$ è limitata, e dunque la successione (u_n) è superiormente equilimitata. Un analogo ragionamento con i punti di minimo permette di concludere che (u_n) è equilimitata. Dalla (13) segue che anche la successione (u_n') è equilimitata. Perciò (u_n) è equilimitata ed equicontinua, e il teorema di Ascoli-Arzelà implica che a meno di sottosuccessioni (u_n) converge uniformemente ad una funzione $u \in C^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Da (13) segue che (u_n') converge uniformemente a $g - f\circ u$. Quindi u è di classe C^1 e $u' = g - f\circ u$. Abbiamo quindi trovato $u \in C^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tale che $F(u) = g$, e quindi l'immagine di F è chiusa, come volevamo dimostrare. Riassumiamo i risultati di questa sezione nella seguente:

2.20 Proposizione. *Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $f' > 0$, e $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Per ogni $g \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, l'equazione*

$$u'(x) + f(u(x)) = g(x)$$

possiede una ed una sola soluzione $u \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

2.6 Il problema di Plateau: introduzione

Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare orientata (in altre parole è stabilito un verso per la normale alla superficie in ogni punto). Ricordiamo la definizione di *curvatura media* di S in un punto p. Il vettore di curvatura di una curva C in $\mathbb{R}^3$ è la derivata del suo vettore tangente unitario. Siano

$p \in S$ e $v \in T_pS$, lo spazio tangente di S in p, con $|v| = 1$. Consideriamo una curva $C \subset S$ passante per p e tangente a v: la proiezione della suo vettore di curvatura in p sulla retta normale alla superficie non dipende dalla scelta della curva C, ed insieme al verso della normale definisce la quantità $k_p(v) \in \mathbb{R}$, che si dice curvatura di S in p lungo v. Questa funzione di v si estende ad una forma quadratica su T_pS, e gli autovalori di tale forma sono detti curvature principali di S in p, indicate con $k_1(p)$ e $k_2(p)$. In altri termini, $k_1(p)$ e $k_2(p)$ sono il minimo e il massimo della curvatura di S nel punto p. La media di questi due numeri è detta curvatura media di S in p, indicata con $H(p) = 1/2(k_1(p) + k_2(p))$. Invertendo l'orientazione, la curvatura media cambia segno. Se la superficie non è orientabile, la curvatura media è definita soltanto a meno del segno. Osserviamo che la curvatura media è non è una quantità intrinseca della superficie, ma dipende da come questa è immersa in $\mathbb{R}^3$: ad esempio un piano e il cilindro $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = r^2\right\}$ sono localmente isometrici, ma il primo ha curvatura media nulla, mentre la curvatura media del secondo è $1/(2r)$. Il prodotto delle curvature principali, cioè la curvatura Gaussiana $K(p) = k_1(p)k_2(p)$ è invece una quantità ben definita anche per superfici non orientabili, e non dipende dall'immersione della superficie in $\mathbb{R}^3$ (questo è il contenuto del *Teorema Egregium* di Gauss).

Le superfici che hanno in ogni punto curvatura media nulla si dicono *superfici minime*. Se una superficie compatta S con bordo Γ minimizza l'area tra tutte le superfici aventi bordo Γ, allora è una superficie minima (si veda l'esercizio 2.21 più avanti). Il viceversa non è vero: le superfici minime sono in generale soltanto punti critici del funzionale area (in un senso opportuno, visto che questo funzionale non è differenziabile).

Il *problema di Plateau* consiste nel trovare una superficie minima che abbia per bordo una curva chiusa assegnata $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ (più in generale, si possono cercare le superfici minime aventi per bordo un insieme finito di curve chiuse). Studieremo questo problema nel caso particolare in cui Γ sia il grafico di una mappa $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$, dove $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è un aperto limitato del piano avente per bordo una curva regolare, e cercheremo superfici minime che siano grafici di mappe $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$. Quindi

$$\Gamma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = g(x, y),\ (x, y) \in \partial\Omega\right\},$$

e

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = u(x, y),\ (x, y) \in \overline{\Omega}\right\}.$$

La curvatura media della curva graf u nel punto $(x, y, u(x, y))$ è data dall'espressione

$$H(x, y, u(x, y)) = \frac{1}{2}\partial_x \left(\frac{u_x}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}\right) + \frac{1}{2}\partial_y \left(\frac{u_y}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}\right).$$

I simboli u_x, u_y, u_{xx}, ecc. indicano le derivate parziali. Sviluppando le derivate, si trova l'espressione

$$H(x, y, u(x, y)) = \frac{(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy}}{2(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}}.$$

Indicando con C^* uno spazio di funzioni di regolarità ancora da stabilire, possiamo dare al problema di Plateau l'impostazione funzionale seguente. Date le mappe

$$F : C^*(\overline{\Omega}, \mathbb{R}) \to C^{*-2}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}), \quad F(u) = (1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy},$$

e

$$G : C^*(\overline{\Omega}, \mathbb{R}) \to C^{*-2}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}) \times C^*(\partial\Omega, \mathbb{R}), \quad G(u) = (F(u), u|_{\partial\Omega}),$$

si tratta di stabilire se data $g \in C^*(\partial\Omega, \mathbb{R})$, la coppia $(0, g)$ appartenga o meno all'immagine di G.

Differenziando formalmente la mappa F (il conto è necessariamente solo formale, dato che non abbiamo ancora stabilito quali dovranno essere gli spazi funzionali), troviamo

$$DF(u)h = (1 + u_y^2)h_{xx} - 2u_x u_y h_{xy} + (1 + u_x^2)h_{yy} + 2(u_x u_{yy} - u_y u_{xy})h_x + 2(u_y u_{xx} - u_x u_{xy})h_y.$$

Ad esempio, per $u = 0$ troviamo $DF(0)h = \Delta h$, dove $\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy}$ è il Laplaciano. L'invertibilità del differenziale di G in 0 è equivalente all'esistenza e unicità della soluzione h del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta h = v & \text{in } \Omega \\ h = f & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

per ogni $v \in C^{*-2}(\overline{\Omega})$ e $f \in C^{*}(\partial\Omega)$. Più in generale, l'invertibilità di $DG(u)$ è equivalente all'esistenza ed unicità della soluzione di un problema di Dirichlet di tipo ellittico, con coefficienti non costanti. Vedremo nella prossima sezione quali sono gli spazi funzionali dove si possa dare risposta positiva a questi problemi.

2.21 Esercizio. *Sia $g \in C^1(\partial\Omega, \mathbb{R})$. Dimostrare che se $u \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ concide con g su $\partial\Omega$ e minimizza il funzionale area*

$$A(v) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla v(x,y)|^2}\, dx\, dy$$

tra tutte le mappe $v \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ che coincidono con g su $\partial\Omega$, allora la curvatura media di graf u *è nulla.*

2.7 Cenni sulle equazioni ellittiche

Consideriamo un operatore differenziale del secondo ordine

$$L = a^{ij}(x)\partial_{ij} + b^i(x)\partial_i + c(x), \quad a^{ij} = a^{ji},$$

dove a^{ij}, b^i e c sono funzioni reali sull'aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (gli indici ripetuti si intendono sommati). Si dice che L è un operatore *ellittico* se esiste $\alpha > 0$ tale che la matrice simmetrica $A(x) = (a^{ij}(x))$ e maggiore od uguale a αI per ogni $x \in \Omega$, ossia

$$a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2, \quad \forall x \in \Omega.$$

Gli operatori ellittici privi del termine di ordine zero hanno un importante proprietà, detta principio del massimo.

2.22 Teorema. (Principio del massimo debole) *Supponiamo che l'aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sia limitato, che L sia un operatore ellittico con $c = 0$ e $|b^i| \leq \beta$. Se $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ verifica $Lu \geq 0$, allora u assume massimo sul bordo di Ω:*

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u.$$

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che u assume massimo su $\overline{\Omega}$ perchè u è continua e Ω è limitato. Dimostriamo che sotto l'ipotesi più forte $Lu > 0$ in Ω, u non ha massimi locali interni. Infatti, se $x_0 \in \Omega$ è un punto di massimo locale, allora $Du(x_0) = 0$ e $D^2u(x_0) \leq 0$. Allora

$$Lu(x_0) = a^{ij}(x_0)\partial_{ij}u(x_0) = \operatorname{tr} A(x_0)D^2u(x_0) \leq 0,$$

contraddicendo $Lu > 0$.

Scrivendo $x = (x_1, \ldots, x_n)$, stimiamo $Le^{\gamma x_1}$:

$$Le^{\gamma x_1} = (a^{11}(x)\gamma^2 + b^1(x)\gamma)e^{\gamma x_1} \geq (\alpha\gamma^2 - \beta\gamma)e^{\gamma x_1}.$$

Quindi se γ è sufficientemente grande, $Le^{\gamma x_1} > 0$. Allora $L(u + \epsilon e^{\gamma x_1}) > 0$ per ogni $\epsilon > 0$, e per il caso precedente

$$\sup_{\Omega}(u + \epsilon e^{\gamma x_1}) = \sup_{\partial\Omega}(u + \epsilon e^{\gamma x_1}).$$

Passando al limite per $\epsilon \to 0$, sfruttando il fatto che Ω è limitato, si ottiene la tesi. $\square$

Riferimenti bibliografici

[Dou98] R. G. Douglas, *Banach algebra techniques in operator theory*, Springer, Berlin, 1998.

[Kat80] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer, Berlin, 1980.

[KG83] A. A. Kirillov and A. D. Gvišiani, *Teoremi e problemi dell'analisi funzionale*, Edizioni Mir, Mosca, 1983.