

Parte I

Grado topologico

1 Il grado topologico in dimensione finita

1.1 Preliminari

Ricordiamo alcuni fatti sull'integrazione di forme e sui valori singolari di una mappa.

Integrazione di n-forme differenziali. Siano X e Y varietà n -dimensionali. Qui e nel seguito per varietà si intenderà sempre varietà senza bordo di classe C^∞ Hausdorff e paracompatta. Sia α una k -forma su Y , e sia $f : X \rightarrow Y$ una mappa di classe C^1 . Il *pull-back* di α tramite f è la k -forma $f^*(\alpha)$ su X , definita da

$$f^*(\alpha)(x)[\xi_1, \dots, \xi_k] = \alpha(f(x))[Df(x)\xi_1, \dots, Df(x)\xi_k], \quad \forall x \in X, \forall \xi_1, \dots, \xi_k \in T_x X.$$

Nel caso $k = n$, α si esprime in coordinate locali (y^1, \dots, y^n) tramite una funzione reale a ,

$$\alpha(y) = a(y)dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n,$$

e la n -forma $f^*(\alpha)$ si esprime in coordinate locali (x^1, \dots, x^n) su X come

$$f^*(\alpha)(x) = a(f(x)) \det Df(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n. \quad (1)$$

L'operazione di pull-back commuta con il differenziale:

$$f^*(d\alpha) = df^*(\alpha).$$

Se Y è una n -varietà orientata e la n -forma α ha supporto compatto, è ben definito l'integrale di α su Y ,

$$\int_Y \alpha.$$

Il teorema di Stokes implica che se β è una $(n-1)$ -forma con supporto compatto in Y , allora

$$\int_Y d\beta = 0.$$

In effetti, vale anche una sorta di viceversa:

1.1 LEMMA. *Sia α una n -forma su \mathbb{R}^n con supporto contenuto in un cubo aperto $Q \subset \mathbb{R}^n$ ed integrale nullo. Allora esiste una $(n-1)$ -forma β con supporto contenuto in Q e tale che $d\beta = \alpha$.*

Dimostrazione. Possiamo supporre

$$\alpha(x) = a(x)dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n,$$

con $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ avente supporto nel cubo aperto I^n , dove $I = (0, 1)$. Il nostro scopo è dimostrare che se

$$\int_{\mathbb{R}^n} a(x) dx = 0,$$

allora esistono funzioni $b^1, \dots, b^n \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ con supporto in I^n tali che

$$a(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial b_j}{\partial x^j}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Infatti in questo caso

$$\beta(x) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} b_j(x) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

verifica $d\beta = \alpha$.

Ragioniamo per induzione su n . Se $n = 1$ basta porre

$$b_1(x) = \int_{-\infty}^x a(s) ds.$$

Supponiamo che la conclusione del lemma sia vera in dimensione n , ed indichiamo con $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ le coordinate di \mathbb{R}^{n+1} . Dall'ipotesi

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} a(x, t) dx dt = 0,$$

segue che la funzione

$$m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad m(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} a(x, t) dt,$$

ha integrale nullo su \mathbb{R}^n . Inoltre m ha supporto nel cubo I^n . Per l'ipotesi induttiva,

$$m(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x^j}(x),$$

con le f_j aventi supporto in I^n . Definiamo $g : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ come

$$g(x, t) := \int_{-\infty}^t (a(x, s) - \tau(s)m(x)) ds,$$

dove $\tau \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ è una funzione con supporto in I ed integrale 1. Allora il supporto di g è contenuto in I^{n+1} , e

$$a(x, t) = a(x, t) - \tau(t)m(x) + \tau(t)m(x) = \frac{\partial g}{\partial t}(x, t) + \sum_{j=1}^n \tau(t) \frac{\partial f_j}{\partial x^j}(x).$$

Quindi le funzioni

$$b_j(x, t) := \tau(t)f_j(x), \quad \forall j = 1, \dots, n, \quad b_{n+1}(x, t) := g(x, t),$$

risolvono il problema. □

Dalla formula di cambio di variabile negli integrali multipli,

$$\int_{\mathbb{R}^n} a(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} a(g(x)) |\det Dg(x)| dx,$$

dove $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un diffeomorfismo C^1 , e dalla formula (1) segue che se $f : X \rightarrow Y$ è un diffeomorfismo C^1 tra varietà connesse orientate, allora

$$\int_X f^*(\alpha) = \text{sign det } Df \int_Y \alpha. \tag{2}$$

La quantità $\text{sign det } Df$ vale 1 se f conserva l'orientazione, -1 se la inverte.

Valori regolari e critici. Sia $f : X \rightarrow Y$ una mappa di classe C^1 tra due varietà. Il punto $x \in X$ si dice *punto regolare* di f se $Df(x)$ è un'inversa sinistra (in dimensione finita, se $Df(x)$ è surgettivo), altrimenti si dice *punto critico*. L'immagine dei punti critici è l'insieme dei *valori critici*. I punti $y \in Y$ che non sono valori critici si dicono *valori regolari*. Quindi, se $y \in Y$ è un valore regolare, l'immagine inversa $f^{-1}(\{y\})$ è vuota oppure è una sottovarietà C^1 di X . Se tanto X quanto Y hanno dimensione finita, $\dim f^{-1}(\{y\}) = \dim X - \dim Y$. In particolare se $\dim X = \dim Y$, $f^{-1}(\{y\})$ è un insieme discreto.

1.2 TEOREMA. (Teorema di Sard) *Siano X e Y varietà di dimensione finita, e sia $f \in C^k(X, Y)$, con*

$$k \geq \max\{1, \dim X - \dim Y + 1\}.$$

Allora l'insieme dei valori critici di f ha misura di Lebesgue nulla in Y .

Dato che i cambi di coordinate C^1 mandano insiemi di misura nulla in insiemi di misura nulla, e dato che l'unione numerabile di insiemi di misura nulla ha misura nulla, la nozione di insieme di misura nulla si estende dai sottoinsiemi di \mathbb{R}^n ai sottoinsiemi di una varietà n -dimensionale. Il teorema di Sard è banale nel caso $\dim X < \dim Y$. Anche il caso $\dim X = \dim Y$ (che è quello che ci interesserà nel seguito) risulta piuttosto semplice (si veda ad esempio [Dei85] Proposizione 1.4), mentre il caso $\dim X - \dim Y$ presenta difficoltà maggiori (si veda ad esempio [AR67]).

1.2 Costruzione del grado topologico

Siano X_0 e Y varietà n -dimensionali orientate, e sia $X \subset X_0$ un aperto con chiusura $\overline{X} = X \cup \partial X$ compatta. Siano $f \in C^0(\overline{X}, Y)$ e $y \in Y$ tale che $y \notin f(\partial X)$. Vorremmo definire il grado di f su X rispetto al punto y , che indicheremo con $\deg(f, X, y)$, come il numero di soluzioni $x \in X$ dell'equazione $f(x) = y$, contate con opportuna molteplicità algebrica.

Mappe di classe C^1 . Iniziamo con l'assumere che $f \in C^1(X, Y) \cap C^0(\overline{X}, Y)$. Sia $y \in Y \setminus f(\partial X)$ e sia $U \subset Y \setminus f(\partial X)$ un intorno *cubico* di y . Questo vuol dire che U è diffeomorfo ad un cubo aperto di \mathbb{R}^n (equivalentemente, ad una palla aperta di \mathbb{R}^n). Sia α una n -forma su Y , tale che

$$\text{supp } \alpha \subset U \quad \text{e} \quad \int_Y \alpha = 1.$$

Definiamo

$$\deg(f, X, y) := \int_X f^*(\alpha).$$

Mostriamo che questa definizione non dipende dalla scelta della n -forma α . Sia dunque α' un'altra n -forma ammissibile. Dato che $\alpha' - \alpha$ ha integrale nullo ed ha supporto in un intorno cubico, il Lemma 1.1 implica che esiste una $(n-1)$ -forma β con supporto in U tale che $\alpha' - \alpha = d\beta$. Quindi

$$\int_X f^*(\alpha') - \int_X f^*(\alpha) = \int_X f^*(\alpha' - \alpha) = \int_X f^*(d\beta) = \int_X df^*(\beta).$$

Dato che β ha supporto in U , che è disgiunto da $f(\partial X)$, la forma $f^*(\beta)$ ha supporto compatto in X , e dunque l'ultimo integrale si annulla. Questo prova l'indipendenza dalla scelta di α .

Si noti che la funzione

$$Y \setminus f(\partial X) \rightarrow \mathbb{R}, \quad y \mapsto \deg(f, X, y),$$

è localmente costante: infatti se $y_0 \in Y \setminus f(\partial X)$, $U \subset Y \setminus f(\partial X)$ è un intorno cubico di y_0 e α è una n -forma con supporto in U ed integrale 1, risulta

$$\deg(f, X, y) = \int_X f^*(\alpha) = \deg(f, X, y_0)$$

per ogni $y \in U$.

Il risultato seguente ci dice che se y è un valore regolare, $\deg(f, X, y)$ è effettivamente il numero di soluzioni di $f(x) = y$, contate con molteplicità algebrica.

1.3 PROPOSIZIONE. Se $y \in Y \setminus f(\partial X)$ è un valore regolare di $f \in C^1(X, Y)$, allora

$$\deg(f, X, y) = \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \text{sign det } Df(x).$$

Dimostrazione. Innanzitutto il teorema della funzione inversa garantisce che $f^{-1}(\{y\})$ è un sottoinsieme discreto di X . Dato che $y \notin f(\partial X)$, $f^{-1}(\{y\})$ non ha punti di accumulazione in ∂X , quindi è un insieme finito:

$$f^{-1}(\{y\}) = \{x_1, \dots, x_k\}.$$

Dunque la somma sopra è ben definita. La quantità $\text{sign det } Df(x)$ vale 1 quando f conserva l'orientazione in un intorno di x , -1 quando la inverte.

Sia $U \subset Y \setminus f(\partial X)$ un intorno cubico di y , e sia U_j un intorno di x_j tale che $f|_{U_j} : U_j \rightarrow f(U_j) \subset U$ sia un diffeomorfismo, per ogni $j = 1, \dots, k$. Se α è una n -forma con supporto nell'intorno di $y \in \bigcap_{j=1}^k f(U_j)$ ed integrale 1, dalla formula (2) si ottiene

$$\deg(f, X, y) = \int_X f^*(\alpha) = \sum_{j=1}^k \int_{U_j} f^*(\alpha) = \sum_{j=1}^k \text{sign det } Df(x_j) \int_Y \alpha = \sum_{j=1}^k \text{sign det } Df(x_j),$$

il che conclude la dimostrazione. \square

La Proposizione 1.3 mostra in particolare che la quantità $\deg(f, X, y)$ è un intero per ogni $y \in Y \setminus f(\partial X)$ che sia un valore regolare di f . D'altra parte, per il Teorema di Sard 1.2 l'insieme dei valori regolari di f è denso in Y , e dato che la funzione $y \mapsto \deg(f, X, y)$ è localmente costante in $Y \setminus f(\partial X)$, concludiamo che $\deg(f, X, y)$ è un intero per ogni $y \in Y \setminus f(X)$. Riassumiamo i risultati fin qui ottenuti nel seguente:

1.4 TEOREMA. Siano X_0, Y varietà orientate di dimensione n , sia $X \subset X_0$ un aperto con chiusura $\bar{X} = X \cup \partial X$ compatta, e sia $f \in C^1(X, Y) \cap C^0(\bar{X}, Y)$. Allora la quantità

$$\sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \text{sign det } Df(x),$$

definita per ogni $y \in Y \setminus f(\partial X)$ che sia un valore regolare di f si estende ad una funzione

$$\deg(f, X, \cdot) : Y \setminus f(\partial X) \rightarrow \mathbb{Z}$$

che è costante su ciascuna componente connessa di $Y \setminus f(\partial X)$.

L'intero $\deg(f, X, y)$ si dice *grado topologico della mappa f su X rispetto al punto y* . Se Y_1 è una componente connessa di $Y \setminus f(\partial X)$, il fatto che $\deg(f, X, \cdot)$ sia costante su Y_1 ci permette di definire l'intero

$$\deg(f, X, Y_1) := \deg(f, X, y), \quad \forall y \in Y_1.$$

Esaminiamo il caso particolare in cui $X_0 = X$, e dunque $\partial X = \emptyset$, cioè X è una varietà compatta orientata senza bordo. Se assumiamo Y connessa, la quantità $\deg(f, X, y)$ non dipende da $y \in Y$, e si dice *grado di Brower* della mappa f , che si indica anche semplicemente con

$$\deg(f) = \deg(f, X, Y).$$

Se in più Y è non compatta, dato che $f(X)$ è compatta esistono punti di y che non appartengono all'immagine di f , dunque $\deg(f, X, Y) = 0$. Quindi il grado di Brower è significativo solamente quando anche Y è una varietà compatta.

Mappe continue. La teoria del grado topologico si estende facilmente a mappe solamente continue. Sia infatti $f \in C^0(\bar{X}, Y)$. È possibile approssimare f uniformemente con mappe $f_\epsilon \in C^\infty(X, Y) \cap C^0(\bar{X}, Y)$. Per far ciò è sufficiente vedere Y come sottovarietà chiusa di \mathbb{R}^m , per qualche m , grazie al teorema di Whitney, usare partizioni dell'unità C^∞ su X e la convoluzione per approssimare uniformemente $f : X \rightarrow Y$ con mappe $g_\epsilon : X \rightarrow \mathbb{R}^m$, ed infine comporre g_ϵ con la proiezione da un intorno tubolare di Y in \mathbb{R}^m su Y .

Sia ora $y \in Y \setminus f(\partial X)$. Sia $(f_n) \in C^0(\bar{X}, Y) \cap C^1(X, Y)$ una successione di mappe che converge uniformemente a f . È facile vedere che se n è sufficientemente grande, il grado di $\deg(f_n, X, y)$ è ben definito e non dipende dalla scelta della successione f_n . Tale intero è per definizione il grado della mappa f , $\deg(f, X, y)$. Si veda [Dei85], sezione 2.3, per ulteriori dettagli.

Il grado topologico di una mappa continua è dunque definito per approssimazione con mappe C^1 . Per dimostrare le proprietà del grado che vedremo nella prossima sezione sarà dunque sufficiente considerare il caso C^1 , ed usare la densità C^0 delle mappe C^1 .

1.3 Proprietà del grado topologico

Invarianza per omotopia. La proprietà di gran lunga più importante e più usata del grado topologico è la sua invarianza per omotopie: se

$$f : [0, 1] \times \bar{X} \rightarrow Y$$

è una mappa continua e $y \in Y \setminus f([0, 1] \times \partial X)$, allora il grado topologico di $f(t, \cdot)$ su X rispetto a y non dipende da t ,

$$\deg(f(t, \cdot), X, y) = \deg(f(0, \cdot), X, y), \quad \forall t \in [0, 1].$$

La definizione del grado che abbiamo scelto rende la verifica di questa proprietà particolarmente semplice. A meno di approssimazione, possiamo infatti supporre che f sia di classe C^1 . Dato che $f([0, 1] \times \partial X)$ è chiuso, esiste un intorno cubico U di y disgiunto da tale insieme, e se α è una n -forma con supporto in U ed integrale 1 si ha

$$\deg(f(t, \cdot), X, y) = \int_X f(t, \cdot)^*(\alpha).$$

Questa quantità dipende con continuità da $t \in [0, 1]$, ed essendo un intero deve essere costante.

È utile esprimere l'invarianza per omotopia anche nella forma seguente. Si consideri l'insieme

$$\mathcal{F} = \{f \in C^0(\bar{X}, Y) \mid y \notin f(\partial X)\},$$

che è aperto nella topologia compatto-aperta. Allora la funzione

$$\mathcal{F} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad f \mapsto \deg(f, X, y),$$

è localmente costante. L'equivalenza tra le due formulazioni è conseguenza del fatto che l'insieme \mathcal{F} è localmente connesso per archi, come si può verificare facilmente vedendo Y come sottovarietà chiusa di \mathbb{R}^m ed usando il teorema dell'intorno tubolare.

Addittività numerabile. Sia X_1, X_2, \dots una successione di aperti disgiunti contenuti in X , e supponiamo $y \notin f(\bar{X} \setminus \bigcup_{j=1}^\infty X_j)$. Allora $\deg(f, X_j, y)$ è nullo eccetto al più per un numero finito di indici j , e

$$\deg(f, X, y) = \sum_{j=1}^\infty \deg(f, X_j, y).$$

Per dimostrare questa affermazione, possiamo supporre che f sia di classe C^1 . Dato che $f(\bar{X} \setminus \bigcup_{j=1}^\infty X_j)$ è chiuso, possiamo trovare un valore regolare y' che appartiene alla stessa componente connessa di y in $Y \setminus f(\bar{X} \setminus \bigcup_{j=1}^\infty X_j)$. Quindi

$$\deg(f, X, y) = \deg(f, X, y'), \quad \deg(f, X_j, y) = \deg(f, X_j, y'), \quad \forall j = 1, 2, \dots$$

Dato che y' ha un numero finito di immagini inverse, $f^{-1}(\{y'\})$ è contenuto in un'unione finita degli X_j , e la tesi segue dalla formula del grado rispetto ad un valore regolare.

Escissione. Se $K \subset \overline{X}$ è chiuso e $y \notin f(K) \cup f(\partial X)$, allora

$$\deg(f, X, y) = \deg(f, X \setminus K, y).$$

Si tratta di un caso particolare della proprietà sopra: basta prendere $X_1 = X \setminus K$.

Mappe prodotto. Siano $X \subset X_0$ e Y varietà di dimensione n , $X' \subset X'_0$ e Y' varietà di dimensione n' , e

$$f : \overline{X} \rightarrow Y, \quad f' : \overline{X'} \rightarrow Y',$$

mappe continue tali che $y \notin f(\partial X)$ e $y' \notin f'(\partial X')$. Si consideri la mappa:

$$f \times f' : \overline{X} \times \overline{X'} \rightarrow Y \times Y', \quad (x, x') \mapsto (f(x), f'(x')).$$

Allora

$$\deg(f \times f', X \times X', (y, y')) = \deg(f, X, y) \cdot \deg(f', X', y').$$

Questo segue dal fatto che, se α è una n -forma su Y e α' è una n' -forma su Y' , $\alpha \times \alpha'$ è una $(n + n')$ -forma su $Y \times Y'$ e

$$\int_{X \times X'} (f \times f')^*(\alpha \times \alpha') = \int_X f^*(\alpha) \cdot \int_{X'} f'^*(\alpha').$$

Mappe a valori in \mathbb{R}^n . Supponiamo $Y = \mathbb{R}^n$. Se $g : \partial X \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una mappa continua, grazie al teorema di Tiesze è possibile estenderla ad una mappa continua $f : \overline{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Supponiamo che $y \notin g(\partial X)$. Allora il grado di f su X rispetto a y non dipende dalla scelta dell'estensione f . Infatti due qualsiasi estensioni f_0 e f_1 risultano omotope tramite la mappa

$$(t, x) \mapsto tf_1(x) + (1 - t)f_0(x),$$

che coincide con g su $[0, 1] \times \partial X$, e dunque non assume il valore y su tale insieme. Dunque ha senso parlare dell'intero

$$\deg(g, X, y).$$

È anche facile verificare che *questo intero dipende solamente dalla classe di omotopia di $g : \partial X \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{y\}$* . Infatti grazie al teorema di Tiesze possiamo estendere una mappa continua $h : [0, 1] \times \partial X \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{y\}$ ad una mappa continua $\tilde{h} : [0, 1] \times \overline{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$, e l'invarianza per omotopia del grado permette di concludere.

Palle e sfere. Indichiamo con B^n la palla unitaria aperta di \mathbb{R}^n . Il suo bordo è la sfera S^{n-1} . Data una mappa continua $g : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, consideriamo la sua normalizzata

$$\hat{g} : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}, \quad \hat{g}(x) = \frac{g(x)}{|g(x)|}.$$

Sia $f : \overline{B^n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'estensione continua di g . Abbiamo già visto che $\deg(f, B^n, 0)$ dipende solamente dalla mappa g . In effetti in questo caso si ha una conclusione più forte: questo grado coincide con il grado della mappa \hat{g} :

$$\deg(f, B^n, 0) = \deg(\hat{g}, S^{n-1}, S^{n-1}).$$

Infatti, dato che $\deg(f, B^n, 0)$ dipende solamente dalla classe di omotopia di $g = f|_{S^{n-1}} : \partial S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, l'omotopia

$$h(t, x) = \frac{g(x)}{|g(x)|^t}$$

mostra che possiamo assumere $g = \hat{g}$. Allora $|g(x)| = 1$ per ogni $x \in S^{n-1}$, e a meno di perturbazione possiamo supporre g di classe C^1 . Possiamo quindi estendere g ad una mappa di classe C^1 $f : \overline{B^n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ nel modo seguente:

$$f(0) = 0, \quad f(x) = |x|^2 g(x/|x|) \quad \forall x \neq 0.$$

Sia $y \in S^{n-1}$ un valore regolare di $g : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$. Allora $g^{-1}(\{y\}) = \{x_1, \dots, x_k\}$ da cui, se $\epsilon \in (0, 1)$,

$$f^{-1}(\{\epsilon y\}) = \{\epsilon x_1, \dots, \epsilon x_k\}.$$

Il fatto che x_j sia un punto regolare per $g : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ implica facilmente che ϵx_j è un punto regolare per f , e

$$\text{sign det } Df(\epsilon x_j) = \text{sign det } Dg(x_j).$$

La conclusione segue dalla formula del grado per valori regolari.

1.5 OSSERVAZIONE. *Nel caso si mappe tra sfere, il grado topologico determina la classe di omotopia: due mappe continue $f, g : S^n \rightarrow S^n$ sono omotope se e solamente se hanno lo stesso grado. Questo è il contenuto del teorema di Hopf (si veda [Mil65]).*

Una formula integrale generalizzata. Sia Y_1 una componente connessa di $Y \setminus f(\partial X)$ e sia β una n -forma con supporto in Y_1 ed integrale non nullo. Allora

$$\deg(f, X, Y_1) = \frac{\int_X f^*(\beta)}{\int_Y \beta}. \quad (3)$$

Considerando un ricoprimento di Y_1 mediante intorni cubici e per la paracompattezza, possiamo trovare una partizione dell'unità di classe C^∞ $\{\varphi_j\}_{j \in J}$ su Y_1 , tale che per ogni j il supporto di φ_j sia contenuto in un intorno coordinato $U_j \subset Y_1$. Scegliamo $y_j \in U_j$ e poniamo $\alpha_j = \varphi_j \beta$. Se l'integrale di α_j è non nullo, dalla definizione del grado risulta

$$\deg(f, X, Y_1) = \deg(f, X, y_j) = \frac{\int_X f^*(\alpha_j)}{\int_Y \alpha_j},$$

ossia

$$\deg(f, X, Y_1) \cdot \int_Y \alpha_j = \int_X f^*(\alpha_j). \quad (4)$$

Per il Lemma 1.1, questa l'ultima formula vale anche se l'integrale di α_j è nullo: infatti in questo caso $\alpha_j = d\eta$ con $\text{supp } \eta \subset U_j$, da cui $\text{supp } f^*(\eta) \subset X$ e

$$\int_X f^*(\alpha_j) = \int_X f^*(d\eta) = \int_X df^*(\eta) = 0.$$

Dato che $\beta = \sum_{j \in J} \alpha_j$, sommando su j in (4) si ottiene il risultato voluto.

Formula di Leray per il grado di una composizione. Siano $X \subset X_0$, Y e Z varietà orientate di dimensione n , con \overline{X} compatto. Siano $f : \overline{X} \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ mappe continue. Siano Y_j , $j \in J$, le componenti connesse di $Y \setminus f(\partial X)$ aventi chiusura compatta in Y . Allora per ogni $z \in Z \setminus g(f(\partial X))$,

$$\deg(g \circ f, X, z) = \sum_{j \in J} \deg(f, X, Y_j) \cdot \deg(g, Y_j, z),$$

e la somma di destra contiene un numero finito di termini non nulli.

Nel caso in cui X, Y, Z siano varietà compatte senza bordo, si trova che il grado di $g \circ f$ è il prodotto dei gradi di f e di g . Per dimostrare la formula di Leray, possiamo assumere che f e g

siano di classe C^1 e che z sia un valore regolare sia per g che per $g \circ f$. Dalla formula del grado rispetto ad un valore regolare troviamo allora

$$\begin{aligned} \deg(g \circ f, X, z) &= \sum_{\substack{x \in X \\ g \circ f(x) = z}} \text{sign det } D(g \circ f)(x) = \sum_{\substack{x \in X \\ g(f(x)) = z}} \text{sign det } Dg(f(x)) \cdot \text{sign det } Df(x) \\ &= \sum_{\substack{y \in Y \\ g(y) = z}} \text{sign det } Dg(y) \cdot \sum_{\substack{x \in X \\ f(x) = y}} \text{sign det } Df(x) = \sum_{\substack{y \in Y \\ g(y) = z}} \text{sign det } Dg(y) \cdot \deg(f, X, y). \end{aligned}$$

Se y appartiene ad una componente di $Y \setminus f(\partial X)$ la cui chiusura non è compatta, $\deg(f, X, y) = 0$: infatti in tale componente ci saranno punti che non sono valori della mappa f . Allora nell'ultima somma sopra compaiono solamente gli y appartenenti alle componenti Y_j , e quindi

$$\deg(g \circ f, X, z) = \sum_{j \in J} \deg(f, X, Y_j) \cdot \sum_{\substack{y \in Y_j \\ g(y) = z}} \text{sign det } Dg(y) = \sum_{j \in J} \deg(f, X, Y_j) \cdot \deg(g, Y_j, z),$$

e la tesi è dimostrata.

1.6 OSSERVAZIONE. *L'approccio che abbiamo seguito nella costruzione del grado, come molte delle applicazioni che presenteremo, è tratto dalle dispense di Nirenberg [Nir70]. Si veda anche [Sch69] e [Dei85] per lievi varianti. Un approccio leggermente più topologico è quello scelto da Milnor in [Mil65]. Per una costruzione puramente topologica, tramite l'omologia singolare, si veda [Dol80], sezione VIII.§4.*

1.4 Applicazioni

Esistenza di zeri. La maniera più diretta di applicare il grado topologico è la seguente: se $\deg(f, X, y) \neq 0$, allora l'equazione $f(x) = y$ ha almeno una soluzione in X . Vediamo un esempio.

1.7 PROPOSIZIONE. *Sia $f : \overline{B^n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che per ogni $x \in \partial B^n$ il vettore $f(x)$ non punti mai in direzione opposta a x , cioè*

$$f(x) + \lambda x \neq 0, \quad \forall \lambda \geq 0, \quad \forall x \in \partial B^n. \quad (5)$$

Allora l'equazione $f(x) = 0$ ha almeno una soluzione in B^n .

Dimostrazione. Consideriamo l'omotopia

$$h(t, x) = tf(x) + (1-t)x, \quad (t, x) \in [0, 1] \times \overline{B^n},$$

che congiunge f all'identità. Per (5),

$$h(t, x) \neq 0, \quad \forall (t, x) \in [0, 1] \times \partial B^n.$$

Dall'invarianza del grado per omotopie segue allora

$$\deg(f, B^n, 0) = \deg(\text{id}, B^n, 0) = 1,$$

e quindi esiste $\bar{x} \in B^n$ tale che $f(\bar{x}) = 0$. □

Esistenza di punti fissi. Il risultato sopra ha come semplice conseguenza il ben noto teorema di Brouwer, che enunciamo nella forma:

1.8 COROLLARIO. (Teorema di Brouwer) *Sia $f : \overline{B^n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una mappa continua tale che $f(\partial B^n) \subset \overline{B^n}$. Allora f ha almeno un punto fisso in $\overline{B^n}$.*

Dimostrazione. Sia $g(x) = x - f(x)$. Se esistono $\lambda \geq 0$ e $x \in \partial B^n$ tali che $g(x) + \lambda x = 0$, allora $f(x) = (1 + \lambda)x$, e la condizione $f(\partial B^n) \subset \overline{B^n}$ implica che $\lambda = 0$ e x è un punto fisso di f . Altrimenti, g verifica le ipotesi della Proposizione 1.7, e dunque f ha un punto fisso in B^n . \square

È utile sapere che il teorema di Brouwer vale anche nella forma:

1.9 COROLLARIO. *Sia $C \subset \mathbb{R}^n$ un compatto convesso e sia $f : C \rightarrow C$ continua. Allora f ha almeno un punto fisso.*

Dimostrazione. Per il teorema di Tiesze la mappa f si estende ad una mappa continua g da \mathbb{R}^n a valori nel convessificato chiuso dell'immagine di f . Dato che C è un chiuso convesso, $g(\mathbb{R}^n) \subset C$. Se B è una palla che contiene C , il Corollario 1.8 implica l'esistenza di un punto fisso $\bar{x} \in \overline{B}$ di g . Quindi $x = g(\bar{x}) \in C$, e $x \in C$ è punto fisso di f . \square

Soluzioni periodiche. Sia $X \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ un campo vettoriale, che supponiamo T -periodico nella variabile temporale:

$$X(t + T, x) = X(t, x), \quad \forall t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n.$$

Supponiamo che esista $r > 0$ tale che

$$X(t, x) \cdot x < 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, |x| = r. \quad (6)$$

Allora l'equazione differenziale

$$\frac{d}{dt}u(t) = X(t, u(t)) \quad (7)$$

ha almeno una soluzione T -periodica.

Dato che X è di classe C^1 , il problema di Cauchy associato a (7) ha unicità ed esistenza locale. Affermiamo che se $|x| \geq r$ allora la soluzione u di (7) tale che $u(0) = x$ ha tempo massimale di esistenza $+\infty$. Infatti da (6) segue che

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2 = 2u(t) \cdot X(t, u(t)) < 0, \quad \text{se } |u(t)| = r.$$

Questo implica che le soluzioni che partono in $\overline{B_r}$ non possono lasciare $\overline{B_r}$ per tempi positivi, e dato che X è limitato su $\overline{B_r}$ queste soluzioni esistono per tutti i tempi positivi. Queste considerazioni implicano che è ben definita una mappa, continua per la dipendenza continua dai dati, $f : \overline{B_r} \rightarrow \overline{B_r}$ che a x associa $u(T)$, la soluzione di (7) con $u(0) = x$ al tempo T . Per il teorema di Brouwer f ha un punto fisso \bar{x} . Dato che X è T -periodico in t , la soluzione che parte da \bar{x} è T -periodica. \square

Autovalori ed autovettori positivi. Sia $A = (a_{ij})$ una matrice reale $n \times n$ tale che $a_{ij} \geq 0$ per ogni i, j . Allora esistono $x \in \mathbb{R}^n$, $x_j \geq 0$ per ogni j , e $\lambda \geq 0$, tali che $Ax = \lambda x$.

L'insieme

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^n x_j = 1, x_j \geq 0 \right\}$$

è compatto e convesso. Possiamo supporre che $Ax = 0$ per ogni $x \in C$, altrimenti $\lambda = 0$ e $x \in C \cap \ker A$ sono soluzioni del problema. Allora la mappa

$$f : C \rightarrow C, \quad f(x) = \frac{Ax}{\sum_{j=1}^n (Ax)_j},$$

è ben definita e continua. Per il teorema di Brouwer ha un punto fisso $x \in C$, quindi $Ax = \lambda x$ con $\lambda = \sum_{j=1}^n (Ax)_j > 0$. \square

1.10 ESERCIZIO. Si consideri il rivestimento universale di $S^1 = \partial B$, $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$,

$$\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1, \quad \pi(t) = e^{it}.$$

Determinare il grado di una mappa continua $f : S^1 \rightarrow S^1$ in termini dei suoi sollevamenti, cioè delle funzioni continue $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $\pi \circ g = f \circ \pi$.

1.11 ESERCIZIO. Sia Ω un aperto limitato di \mathbb{C} e sia $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{C})$ olomorfa in Ω e tale che $f(x) \neq 0$ per $x \in \partial\Omega$. Si dimostri che $\deg(f, \Omega, 0) \geq 0$. Supponiamo ora che Ω sia semplicemente connesso, e sia $\gamma : S^1 \rightarrow \Omega$ una curva chiusa semplice tale che tutti gli zeri di f stiano nell'aperto limitato determinato da γ . Si dimostri che

$$\deg(f, \Omega, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

1.12 ESERCIZIO. Sia $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ una curva chiusa di classe C^1 . Dato $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma(z_0)$, definiamo l'indice di avvolgimento di γ rispetto a z_0 come

$$w(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}.$$

(i) Estendere questa definizione a curve solamente continue.

(ii) Sia $\hat{\gamma} : S^1 \rightarrow S^1$ la mappa $\hat{\gamma}(t) = (\gamma(t) - z_0)/|\gamma(t) - z_0|$. Vedendo S^1 come il bordo della palla unitaria B di \mathbb{C} , sia $f : \overline{B} \rightarrow \mathbb{C}$ una qualunque estensione continua di γ . Dimostrare che

$$w(\gamma, z_0) = \deg(\hat{\gamma}, S^1, S^1) = \deg(f, B, z_0).$$

1.13 ESERCIZIO. Sia $f : \overline{B^n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che per ogni $x \in \partial B^n$ il vettore $f(x)$ non punti mai nella stessa direzione di x , cioè

$$f(x) - \lambda x \neq 0, \quad \forall \lambda \geq 0, \quad \forall x \in \partial B^n.$$

Allora l'equazione $f(x) = 0$ ha almeno una soluzione in B^n .

1.14 ESERCIZIO. Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una mappa continua tale che

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{f(x) \cdot x}{|x|} = +\infty.$$

Si dimostri che f è surgettiva.

1.15 ESERCIZIO. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, $f, g : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mappe continue tali che $0 < |g| < |f|$ su $\partial\Omega$. Allora $\deg(f + g, \Omega, 0) = \deg(f, \Omega, 0)$.

1.16 ESERCIZIO. Sia $M \subset \mathbb{R}^3$ una superficie compatta orientata senza bordo, ed indichiamo con $K : M \rightarrow \mathbb{R}$ la sua curvatura di Gauss. Sia $u : M \rightarrow S^2$ la mappa che ad $x \in M$ associa il vettore normale unitario $u(x)$, scelto in modo che se v_1, v_2 è una base orientata di $T_x M$, allora $v_1, v_2, u(x)$ è una base orientata di \mathbb{R}^3 . Dimostrare che

$$\deg(f, M, S^2) = \frac{1}{4\pi} \int_M K(x) dA,$$

dove A è l'elemento di area su M .

Riferimenti bibliografici

- [AR67] R. Abraham and J. Robbin, *Transversal mappings and flows*, W. A. Benjamin, Inc., 1967.
- [Dei85] K. Deimling, *Nonlinear functional analysis*, Springer, Berlin, 1985.
- [Dol80] A. Dold, *Lectures on algebraic topology*, Springer, Berlin, 1980.
- [Mil65] J. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, The University Press of Virginia, Charlottesville, VA, 1965.
- [Nir70] L. Nirenberg, *Topics in nonlinear functional analysis*, Courant lecture notes, Amer. Math. Soc., New York, 1970.
- [Sch69] J. T. Schwartz, *Nonlinear functional analysis*, Gordon and Breach, New York, 1969.