2.7 Cenni sulle equazioni ellittiche lineari

In questa sezione richiameremo alcune proprietà delle equazioni differenziali lineari ellittiche del secondo ordine. Si vedano ad esempio [GT83] e [LU68].

Consideriamo un operatore differenziale della forma

$$L = a^{ij}(x)\partial_{ij} + b^i(x)\partial_i + c(x), \quad a^{ij} = a^{ji},$$

dove a^{ij}, b^i e c sono funzioni reali sull'aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (gli indici ripetuti si intendono da sommare). Si dice che L è un operatore *ellittico* se esiste $\lambda > 0$ tale che la matrice simmetrica $A(x) = (a^{ij}(x))$ e maggiore od uguale a λI per ogni $x \in \Omega$, ossia

$$a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2, \quad \forall x \in \Omega. \tag{14}$$

Per il momento non supporremo alcuna regolarità sui coefficienti a^{ij}, b^i, c.

Principio del massimo. Gli operatori ellittici privi del termine di ordine zero hanno un'importante proprietà, detta principio del massimo.

2.1 TEOREMA. (Principio del massimo debole) *Supponiamo che l'aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sia limitato, che L sia un operatore ellittico con $c = 0$ e $|b^i| \leq \beta$. Se $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ verifica $Lu \geq 0$, allora u assume massimo sul bordo di Ω:*

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u.$$

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che u assume massimo su $\overline{\Omega}$ perchè u è continua e Ω è limitato. Dimostriamo che sotto l'ipotesi più forte $Lu > 0$ in Ω, u non ha massimi locali interni. Infatti, se $x_0 \in \Omega$ è un punto di massimo locale, allora $Du(x_0) = 0$ e $D^2u(x_0) \leq 0$. Allora

$$Lu(x_0) = a^{ij}(x_0)\partial_{ij}u(x_0) = \operatorname{tr} A(x_0)D^2u(x_0) \leq 0,$$

contraddicendo $Lu > 0$.

Scrivendo $x = (x_1, \ldots, x_n)$, stimiamo $Le^{\gamma x_1}$:

$$Le^{\gamma x_1} = (a^{11}(x)\gamma^2 + b^1(x)\gamma)e^{\gamma x_1} \geq (\alpha\gamma^2 - \beta\gamma)e^{\gamma x_1}.$$

Quindi se γ è sufficientemente grande, $Le^{\gamma x_1} > 0$. Allora $L(u + \epsilon e^{\gamma x_1}) > 0$ per ogni $\epsilon > 0$, e per il caso precedente

$$\sup_{\Omega}(u + \epsilon e^{\gamma x_1}) = \sup_{\partial\Omega}(u + \epsilon e^{\gamma x_1}).$$

Passando al limite per $\epsilon \to 0$, sfruttando il fatto che Ω è limitato, si ottiene la tesi. □

Stime di Schauder. Dati $A \in \mathbb{R}^n$, $u : A \to \mathbb{R}$, e $\alpha \in [0, 1]$, definiamo la semi-norma α-Hölderiana di u su A come

$$|u|_{\alpha,A} = \sup_{\substack{x,y\in A\\ x\neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

Sia ora $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Si dice che $u : \Omega \to \mathbb{R}$ è *localmente α-Hölderiana* se ogni $x \in \Omega$ possiede un intorno $U \subset \Omega$ tale che $|u|_{\alpha,U} < +\infty$. Lo spazio delle funzioni su Ω localmente α-Hölderiane si indica con $C^{0,\alpha}(\Omega)$. Se $k \in \mathbb{N}$, lo spazio delle funzioni di classe C^k su Ω la cui derivata k-esima è localmente α-Hölderiana si indica con $C^{k,\alpha}(\Omega)$.

Si dice che $u : \Omega \to \mathbb{R}$ è *uniformemente α-Hölderiana* se $|u|_{\alpha,\Omega} < +\infty$ (in particolare, u è uniformemente continua, e quindi si estende ad una funzione continua $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$). Lo spazio delle funzioni su Ω uniformemente α-Hölderiane si indica con $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, quello delle funzioni di classe C^k su Ω la cui derivata k-esima è uniformemente α-Hölderiana si indica con $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$. Se Ω è limitato, gli spazi $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$, $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0, 1]$, sono spazi di Banach con la norma

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} = \|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} + |D^k u|_{\alpha,\Omega}.$$

2.2 Teorema. (Stime di Schauder interne) *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un aperto limitato e supponiamo che* L *sia ellittico di costante* $\lambda > 0$ *con coefficienti in* $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\alpha \in (0,1)$. *Sia* $\Omega' \subset\subset \Omega$ *un aperto e sia* $d = \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. *Allora esiste una costante* C *tale che per ogni* $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ *risulta*

$$d\,\|Du\|_{C^0(\overline{\Omega'})} + d^2\|D^2u\|_{C^0(\overline{\Omega'})} + d^{2+\alpha}|D^2u|_{\alpha,\Omega'} \le C(\|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} + \|Lu\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}).$$

La costante C *dipende solamente da* n, α, λ, *dal diametro di* Ω, *e dalla norma* $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ *dei coefficienti* a^{ij}, b^i, c.

Per la dimostrazione si veda [GT83], Corollario 6.3.

Sia $k \in \mathbb{N}$. L'aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si dice di classe $C^{k,\alpha}$ se per ogni $x_0 \in \partial\Omega$ esiste una palla B di centro x_0 e una bigezione φ da B su un aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ tale che:

(i) φ e φ^{-1} sono di classe $C^{k,\alpha}$;

(ii) $\varphi(B \cap \overline{\Omega}) = A \cap \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \ge 0\}$;

(iii) $\varphi(B \cap \partial\Omega) = A \cap \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$.

Sia Ω un aperto di classe $C^{k,\alpha}$, con $k \ge 1$. Una funzione $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ si dice di classe $C^{k,\alpha}$ se per ogni mappa φ come sopra, la funzione $g \circ \varphi^{-1}$ è di classe $C^{k,\alpha}$ sull'aperto (in $\mathbb{R}^{n-1}$) $A \cap \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$. Lo spazio vettoriale delle funzioni di classe $C^{k,\alpha}$ su $\partial\Omega$ si indica con $C^{k,\alpha}(\partial\Omega)$. Quando Ω è limitato, ogni funzione $g \in C^{k,\alpha}(\partial\Omega)$ si estende ad una funzione $\tilde{g} \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$. Viceversa, la restrizione di ogni $\tilde{g} \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ appartiene a $C^{k,\alpha}(\partial\Omega)$. Lo spazio $C^{k,\alpha}(\partial\Omega)$ è uno spazio di Banach con la norma

$$\|g\|_{C^{k,\alpha}(\partial\Omega)} = \inf_{\substack{\tilde{g} \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) \\ \tilde{g}|_{\partial\Omega} = g}} \|\tilde{g}\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

2.3 Osservazione. *Nel caso in cui* Ω *sia un aperto limitato di classe* $C^{k,\alpha}$ *semplicemente connesso nel piano, il suo bordo può essere parametrizzato da una curva chiusa di classe* $C^{k,\alpha}$. *In questo caso, fissata questa parametrizzazione* ω *- ad esempio scegliendo quella per lunghezza d'arco - si trova una norma equivalente su* $C^{k,\alpha}(\partial\Omega)$ *prendendo la norma* $C^{k,\alpha}$ *di* $g \circ \omega$.

2.4 Teorema. (Stime di Schauder fino al bordo) *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un aperto limitato di classe* $C^{2,\alpha}$ *e supponiamo che* L *sia ellittico di costante* $\lambda > 0$ *con coefficienti in* $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\alpha \in (0,1)$. *Allora esiste una costante* C *tale che per ogni* $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ *tale che* $Lu \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ *e* $u|_{\partial\Omega} \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$, *risulta*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \le C(\|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} + \|Lu\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} + \|u|_{\partial\Omega}\|_{C^{2,\alpha}(\partial\Omega)}).$$

La costante C *dipende solamente da* n, α, λ, *dall'aperto* Ω, *e dalla norma* $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ *dei coefficienti* a^{ij}, b^i, c.

Per la dimostrazione si veda [GT83], Teorema 6.6.

Regolarità delle soluzioni. Le stime di Schauder sono alla base dei seguenti risultati di regolarità.

2.5 Teorema. (Regolarità all'interno) *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un aperto e supponiamo che* L *sia ellittico con coefficienti in* $C^{k,\alpha}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$ *e* $\alpha \in (0,1)$. *Se* $u \in C^2(\Omega)$ *e* $Lu \in C^{k,\alpha}(\Omega)$, *allora* $u \in C^{k+2,\alpha}(\Omega)$.

Per la dimostrazione si veda [GT83], Teorema 6.17.

2.6 Teorema. (Regolarità fino al bordo) *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un aperto limitato di classe* $C^{k+2,\alpha}$ *e supponiamo che* L *sia ellittico con coefficienti in* $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$, $k \in \mathbb{N}$ *e* $\alpha \in (0,1)$. *Se* $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, $Lu \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$, *e* $u|_{\partial\Omega} \in C^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega})$, *allora* $u \in C^{k+2,\alpha}\overline{\Omega})$.

Per la dimostrazione si veda [GT83], Teorema 6.19.

Risolubilità del problema di Dirichlet.

2.7 Teorema. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato di classe $C^{2,\alpha}$ e supponiamo che L sia ellittico con coefficienti in $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\alpha \in (0,1)$. Allora l'operatore lineare continuo*

$$C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \to C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \times C^{2,\alpha}(\partial\Omega), \quad u \mapsto (Lu, u|_{\partial\Omega}), \tag{15}$$

è Fredholm di indice 0. Se il coeffciente c del termine di ordine 0 in L è non positivo, allora l'operatore (15) è un isomorfismo.

Si vedano i Teoremi 6.14 e 6.15 in [GT83]. Accenniamo di seguito ad una possibile linea dimostrativa. La stima di Schauder fino al bordo (Teorema 2.4) insieme al risultato dell'Esercizio 2.17 (tenendo conto del fatto che l'immersione $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$ è compatta) implica che l'operatore (15) ha immagine chiusa e nucleo di dimensione finita. In particolare, (15) è semi-Fredholm. È facile collegare l'operatore L al Laplaciano Δ mediante un cammino di operatori ellittici. La teoria classica del Laplaciano mostra che nel caso $L = \Delta$ l'operatore (15) è un isomorfismo. In effetti sotto ipotesi di regolarità più deboli per Ω (ad esempio la proprietà della sfera esterna), il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

con $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, f limitata, e $g \in C^0(\partial\Omega)$, possiede un unica soluzione $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ ([GT83], Teorema 4.3). Il teorema di regolarità fino al bordo 2.6 mostra che se $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $g \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$, allora $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, il che prova l'invertibilità di (15). Dato che l'indice di Fredholm è localmente costante, l'operatore (15) risulta sempre Fredholm di indice 0. Quando $c \leq 0$ il principio del massimo prova l'inietività, che per la proprietà di Fredholm è equivalente alla surgettività.

Stime Hölderiane per il gradiente in dimensione due. Concludiamo questa panoramica sulle equazioni ellittiche lineari enunciando una stima sulle derivate prime che vale senza ipotesi di regolarità, ma solo di limitatezza, sui coefficienti. Questo risultato vale in dimensione due, e la dimostrazione si basa sulla teoria delle mappe quasi conformi (si veda [GT83], Capitolo 12).

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un aperto, e sia L l'operatore differenziale lineare del secondo ordine

$$L = a(x,y)\partial_{xx} + 2b(x,y)\partial_{xy} + c(x,y)\partial_{yy}.$$

Non supponiamo alcuna ipotesi di regolarità sulle funzioni $a, b, c : \Omega \to \mathbb{R}$, assumiamo solamente ipotesi di ellitticità e di limitatezza:

$$\lambda(|\xi|^2 + |\eta|^2) \leq a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 \leq \Lambda(|\xi|^2 + |\eta|^2), \quad \forall (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2. \tag{16}$$

Enunciamo direttamente le stime fino al bordo (per le stime interne si veda [GT83], Teorema 12.4).

2.8 Teorema. *Supponiamo che Ω sia un aperto limitato di classe C^2, e che l'operatore L verifichi (16). Allora esiste un numero $\beta = \beta(\Lambda/\lambda, \Omega) \in (0,1]$ tale che per ogni $u \in C^2(\overline{\Omega})$ risulta*

$$\|u\|_{C^{1,\beta}(\overline{\Omega})} \leq C(\Lambda/\lambda, \Omega, \sup_{\Omega} |Lu|, \|u|_{\partial\Omega}\|_{C^2(\partial\Omega)}).$$

La dimostrazione si può trovare in [GT83], alla fine della sezione 12.2.

2.8 Il Problema di Plateau: soluzione

Torniamo al problema di Plateau per grafici di funzioni, come discusso nella sezione 2.6. Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aperto limitato di classe C^∞ e $g \in C^\infty(\partial\Omega)$, cerchiamo $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ che risolva l'equazione per le superfici minime

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0,$$

e tale che $u|_{\partial\Omega} = g$.

Forti dei risultati enunciati nella sezione 2.7, diamo al problema di Plateau l'impostazione funzionale seguente. Fissiamo $\alpha \in (0,1)$, e definiamo

$$G : C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \to C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \times C^{2,\alpha}(\partial\Omega), \quad G(u) = (F(u), u|_{\partial\Omega}),$$
$$F(u) = (1+u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1+u_x^2)u_{yy}.$$

Risolvere il problema di Plateau per una data $g \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ significa trovare $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ tale che $G(u) = (0, g)$.

Regolarità. Abbiamo enunciato il problema di Plateau nella categoria C^∞, ma stiamo cercando soluzioni solo di classe $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Mostriamo che se $g \in C^\infty(\partial\Omega)$ e $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ risolve $G(u) = (0, g)$, allora in effetti $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Possiamo vedere l'equazione non lineare $F(u) = 0$ come un equazione lineare con coefficienti variabili $Lu = 0$, dove L è l'operatore differenziale del secondo ordine su Ω,

$$L = a^{ij}\partial_{ij}, \quad \text{con } (a^{ij}) = \begin{pmatrix} 1+u_y^2 & -u_x u_y \\ -u_x u_y & 1+u_x^2 \end{pmatrix}.$$

Dato che per ogni $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) = (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$a^{ij}\zeta_i\zeta_j = (1+u_y^2)\xi^2 - 2u_x u_y \xi\eta + (1+u_x^2)\eta^2 = \xi^2 + \eta^2 + (u_y\xi - u_x\eta)^2 \geq \xi^2 + \eta^2 = |\zeta|^2, \tag{17}$$

l'operatore L è ellittico (con $\lambda = 1$). I coefficienti a^{ij} appartengono a $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, quindi, dato che g e Ω sono di classe C^∞, il Teorema di regolarità fino al bordo 2.6 implica che $u \in C^{3,\alpha}(\overline{\Omega})$. Ma allora i coefficienti a^{ij} appartengono a $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, e lo stesso teorema implica che $u \in C^{4,\alpha}(\overline{\Omega})$. Iterando questo argomento, concludiamo che $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Questo risultato di regolarità a priori delle soluzioni permette di cercare la u in $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Proprietà locali della mappa G. Le mappe F e G risultano di classe C^∞ (sono polinomi), e

$$DG(u)h = (DF(u)h, h|_{\partial\Omega}), \quad \forall (u,h) \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \times C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}),$$
$$DF(u)h = (1+u_y^2)h_{xx} - 2u_x u_y h_{xy} + (1+u_x^2)h_{yy} + 2(u_x u_{yy} - u_y u_{xy})h_x + 2(u_y u_{xx} - u_x u_{xy})h_y.$$

Quindi per ogni $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, $DF(u)$ è un operatore differenziale lineare del secondo ordine della forma

$$DF(u) = a^{ij}\partial_{ij} + b^i\partial_i,$$

dove i coefficienti

$$(a^{ij}) = \begin{pmatrix} 1+u_y^2 & -u_x u_y \\ -u_x u_y & 1+u_x^2 \end{pmatrix}, \quad (b^i) = \begin{pmatrix} u_x u_{yy} - u_y u_{xy} \\ u_y u_{xx} - u_x u_{xy} \end{pmatrix},$$

appartengono a $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ (in effetti, $a^{ij} \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$). Per la (17), l'operatore $DF(u)$ è ellittico per ogni u. Dato che questo operatore non possiede il termine di ordine 0, per il Teorema 2.7

$$DG(u) : C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \to C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \times C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$$

è un isomorfismo per ogni $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Il teorema della funzione inversa implica allora che G è un diffeomorfismo locale. In particolare, potremmo già trarre conclusioni sul caso perturbativo del problema di Plateau: dato che ogni funzione affine u_0 è soluzione, se $g \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ è sufficientemente vicina a $u_0|_{\partial\Omega}$ in norma $C^{2,\alpha}$, allora esiste unica $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ vicina in norma $C^{2,\alpha}$ a u_0 che risulve $F(u) = 0$ e $u|_{\partial\Omega} = g$.

Confronto di soluzioni. Supponiamo che $u, v \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ siano tali che $F(u) = F(v)$ e $u \leq v$ su $\partial\Omega$. Vogliamo dimostrare che allora $u \leq v$ su tutto $\overline{\Omega}$. Dal fatto che $F(u) - F(v) = 0$ ricaviamo che la funzione $w = u - v$ risolve l'equazione

$$(1+u_y^2)w_{xx} - 2u_x u_y w_{xy} + (1+u_x^2)w_{yy} + (u_x v_{yy} + v_x v_{yy} - 2u_y v_{xy})w_x + (u_y v_{xx} + v_y v_{xx} - 2v_x v_{xy})w_y = 0,$$

con condizione al bordo $w \leq 0$. Si tratta ancora una volta di un'equazione ellittica del secondo ordine senza termine di ordine 0 (e con coefficienti del termine del primo ordine limitati), quindi il principio del massimo debole (Teorema 2.1) implica che $w \leq 0$ su tutto $\overline{\Omega}$, come volevamo dimostrare.

Quindi se $G(u) = G(v)$ allora $u = v$, perciò G è iniettiva. In particolare, il problema di Plateau ha al più una soluzione in $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Esistenza di soluzioni. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è un dominio qualsiasi (limitato e C^∞), il problema di Plateau non ha soluzione per qualunque dato $g \in C^\infty(\partial\Omega)$. Sono necessarie ipotesi aggiuntive sulla geometria di Ω. Qui supporremo che Ω sia *fortemente convesso*: $\partial\Omega$ è localmente il grafico di funzioni φ con $\varphi'' > 0$. È facile verificare che allora Ω deve essere convesso.

Vediamo come si può impostare la questione dell'esistenza. Dato che G è un diffeomorfismo sulla sua immagine, il chiuso

$$M = \{u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \mid F(u) = 0\} = G^{-1}(\{0\} \times C^{2,\alpha}(\partial\Omega))$$

è una sottovarietà di $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, non vuota in quanto contiene almeno le funzioni affini. Inoltre la restrizione di G a M produce la mappa

$$M \to C^{2,\alpha}(\partial\Omega), \quad u \mapsto u|_{\partial\Omega}, \tag{18}$$

che risulta essere un diffeomorfismo sulla sua immagine, in particolare una mappa aperta. Ci basta dimostrare che l'immagine di (18) è anche chiusa.

Supponiamo di saper dimostrare la seguente stima a priori: *per ogni $c \geq 0$ esiste $\beta \in (0,1)$ tale che le soluzioni $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ di $F(u) = 0$ con $\|u|_{\partial\Omega}\|_{C^{2,\alpha}(\partial\Omega)} \leq c$ sono equilimitate in $C^{2,\beta}(\overline{\Omega})$.* Mostriamo che allora l'immagine della mappa (18) è chiusa. Se $(u_n) \subset M$ e $u_n|_{\partial\Omega} \to g$ in $C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$, dalla stima a priori segue che (u_n) è equilimitata in $C^{2,\beta}(\overline{\Omega})$ per qualche $\beta \in (0,1)$. Dunque, a meno di sottosuccessioni, (u_n) converge ad una certa u in norma $C^2(\overline{\Omega})$. Perciò $u \in C^2(\overline{\Omega})$ risolve

$$\begin{cases} (1+u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1+u_x^2)u_{yy} = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = g. \end{cases}$$

Dato che $g \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$, e dato che i coefficienti $(1+u_y^2)$, $u_x u_y$, e $(1+u_x^2)$ stanno in $C^1(\overline{\Omega}) \subset C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, il Teorema di regolarità fino al bordo 2.6 implica che $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Dunque $u \in M$ e g appartiene all'immagine della mappa (18), che risulta perciò chiusa.

Stima a priori. Sia $u \in M$ ed indichiamo con g la restrizione di u a $\partial\Omega$. Dobbiamo stimare la norma $C^{2,\beta}(\overline{\Omega})$ di u in termini della norma $C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ di g. La u risolve un equazione lineare ellittica a coefficienti variabili senza termini di ordine 0 e 1, quindi per il prinicipo del massimo u assume massimo e minimo su $\partial\Omega$. Dunque

$$\|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} \leq \|g\|_{C^0(\partial\Omega)}. \tag{19}$$

Cerchiamo ora di stimare $\|\nabla u\|_{C^0(\overline{\Omega})}$ in termini di $\|g\|_{C^2(\partial\Omega)}$. È in questa stima che faremo uso della forte convessità di Ω. La funzione $f = |\nabla u|^2$ soddisfa

$$\begin{aligned}(1+u_y^2)f_{xx} - 2u_x u_y f_{xy} + (1+u_x^2)f_{yy} + 2\Delta u(u_x f_x + u_y f_y) \\ = (1+|\nabla u|^2)(u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2) + |\nabla f|^2.\end{aligned}$$

Perciò f soddisfa una relazione del tipo $Lf \geq 0$, dove L è un operatore ellittico senza termine di ordine 0 (e con il termine di ordine 1 limitato). Per il principio del massimo f assume massimo su $\partial\Omega$. Dunque è sufficiente stimare $\|\nabla u\|_{C^0(\partial\Omega)}$. Mostreremo che è possibile stimare questa quantità in termini di $\|g\|_{C^2(\partial\Omega)}$.

La derivata tangenziale di u in un punto di $\partial\Omega$ coincide ovviamente con quella di g, pertanto si tratta di stimare la derivata normale di u. Sia $(x_0, y_0) \in \partial\Omega$ un punto dove il modulo della derivata normale di u è massimo. A meno di un'isometria di $\mathbb{R}^2$, possiamo supporre che $(x_0, y_0) = (0, 0)$ e che la retta tangente a $\partial\Omega$ in $(0, 0)$ sia l'asse delle x. Essendo fortemente convesso, Ω giace interamente in uno dei due semipiani individuati dall'asse delle x - diciamo nel semipiano $\{y > 0\}$ - ed esiste $\epsilon > 0$ tale che

$$y \geq \epsilon x^2, \quad \forall (x, y) \in \overline{\Omega}. \tag{20}$$

Il nostro scopo è stimare $|u_y(0, 0)|$ in termini di $\|g\|_{C^2(\partial\Omega)}$.

Sia $\delta > 0$ tale che la porzione di $\partial\Omega$ nel quadrato $\{|x| \leq \delta,\ |y| \leq \delta\}$ sia il grafico di una funzione $\varphi : [-\delta, \delta] \to \mathbb{R}$ di classe C^∞, e tale che $|\varphi'| \leq 1$. Per le nostre ipotesi, $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$. Poniamo $\tilde{u}(x) = u(x, \varphi(x))$. È facile verificare che la norma C^2 di $\tilde{u}$ su $[-\delta, \delta]$ si controlla con la norma C^2 di g su $\partial\Omega$ (si veda l'Osservazione 2.3). La formula di Taylor con resto di Lagrange

$$\tilde{u}(x) = \tilde{u}(0) + \tilde{u}'(0)x + \frac{1}{2}\tilde{u}''(\xi)x^2,$$

si riscrive come

$$u(x, \varphi(x)) = u(0, 0) + u_x(0, 0)x + \frac{1}{2}\tilde{u}''(\xi)x^2.$$

Dunque,

$$|u(x, y) - u(0, 0) - u_x(0, 0)x| \leq C_0 x^2, \quad \forall (x, y) \in \operatorname{graf} \varphi,$$

dove la costante C_0 dipende soltanto da $\|g\|_{C^2(\partial\Omega)}$. Vogliamo aggiungere termini a destra di questa diseguaglianza in modo che essa valga per ogni $(x, y) \in \partial\Omega$. Osserviamo che la quantità a sinistra è uniformemente limitata per la (19). Inoltre per la (20), l'insieme $\partial\Omega \setminus \operatorname{graf} \varphi$ è contenuto nel semipiano $y \geq \epsilon\delta^2$. Quindi esiste una costante C, ancora dipendente solamente da $\|g\|_{C^2(\partial\Omega)}$, tale che

$$|u(x, y) - u(0, 0) - u_x(0, 0)x| \leq C(x^2 + y), \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega. \tag{21}$$

La funzione affine

$$v(x, y) := u(0, 0) + u_x(0, 0)x + C\left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right)y,$$

risolve l'equazione delle superfici minime. Per (20) e (21) risulta

$$v(x, y) \geq u(0, 0) + u_x(0, 0)x + C(y + x^2) \geq u(x, y), \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega.$$

Per l'argomento di confronto, $v \geq u$ su tutto $\overline{\Omega}$. Dato che $v(0, 0) = u(0, 0)$, si deve avere $u_y(0, 0) \leq v_y(0, 0)$, cioè

$$u_y(0, 0) \leq C\left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right).$$

L'analogo ragionamento di confronto con la funzione affine

$$v(x, y) := u(0, 0) + u_x(0, 0)x - C\left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right)y,$$

mostra che

$$u_y(0, 0) \geq -C\left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right).$$

Concludiamo che $|u_y(0, 0)|$, e dunque $\|\nabla u\|_{C^0(\overline{\Omega})}$, è limitato in termini di $\|g\|_{C^2(\partial\Omega)}$.

Sfruttiamo ancora una volta il fatto che la u risolve, su un dominio limitato e C^∞ del piano, l'equazione ellittica

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} = 0, \tag{22}$$

con coefficienti $a = 1 + u_y^2$, $b = -u_x u_y$, $c = 1 + u_x^2$. Dalla stima C^0 per il gradiente di u dimostrata prima segue che

$$1 \leq a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 \leq \Lambda, \quad \forall (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2,$$

con Λ una costante dipendente da $\|g\|_{C^2(\partial\Omega)}$. Dato che $u|_{\partial\Omega} = g$ è uniformemente limitato in $C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$, lo è a fortiori in $C^2(\partial\Omega)$, e il Teorema 2.8 implica che esiste un $\beta > 0$ tale che $\|u\|_{C^{1,\beta}(\overline{\Omega})}$ è uniformemente limitato. A meno di prendere un β più piccolo, possiamo supporre che $\beta \leq \alpha$, in modo che g abbia una stima in $C^{2,\beta}(\partial\Omega)$. I coefficienti dell'equazione (22) hanno adesso una stima in $C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$, quindi le stime di Schauder fino al bordo (Teorema 2.4) implicano che u ha una stima in $C^{2,\beta}(\overline{\Omega})$, come volevamo dimostrare. Abbiamo pertanto dimostrato il seguente:

2.9 TEOREMA. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un aperto limitato, di classe C^∞, fortemente convesso. Per ogni $g \in C^\infty(\partial\Omega)$ esiste un unica $u \in C^\infty(\Omega)$ il cui grafico sia una superficie minima avente per bordo il grafico di g.*

2.10 ESERCIZIO. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un aperto limitato di classe C^∞, e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione C^∞ tale che $f' < 0$ e $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Dimostrare che per ogni $g \in C^\infty(\Omega)$ il problema di Dirichlet nonlineare*

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = g, & \textit{in } \Omega, \\ u = 0 & \textit{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

possiede una ed una sola soluzione $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

2.11 ESERCIZIO. *Sia $\mathbb{T}^2$ il toro bidimensionale $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione C^∞ tale che $f' < 0$ e $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Dimostrare che per ogni $g \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ esiste una ed una sola $u \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ tale che $\Delta u + f(u) = g$.*

2.12 ESERCIZIO. *Sia M una varietà di classe C^∞, munita di una metrica*

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j.$$

Sia $d\mu = \mu(x)dx$ la misura associata, dove

$$\mu = \sqrt{\det g_{ij}},$$

ed indichiamo con g^{ij} la matrice inversa di g_{ij}. L'operatore di Laplace-Beltrami associato alla metrica g è l'operatore differenziale lineare del secondo ordine definito da

$$\Delta_g u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\mu \, g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^j} \right).$$

(i) Scrivere l'operatore di Laplace-Beltrami nel caso della sfera S^2 munita della metrica standard, rispetto alle coordinate (θ, ψ), dove θ è la longitudine, ψ la latitudine.

(ii) Scrivere l'operatore di Laplace-Beltrami nel caso del piano iperbolico $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\} \cong \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$, munito della metrica $ds = d|z|/y$.

(iii) Supponiamo che M sia compatta senza bordo. Qual è l'equivalente del principio del massimo per Δ_g in questo caso?

(iv) Sia M una superficie compatta senza bordo munita della metrica g, e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione C^∞ tale che $f' < 0$ e $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Dimostrare che per ogni $h \in C^\infty(M)$ esiste unica $u \in C^\infty(M)$ che risolve $\Delta_g u + f(u) = h$.

Riferimenti bibliografici

[GT83] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer, New York, 1983.

[LU68] O. A. Ladyženskaja and N. N. Ural'ceva, *Équations aux dérivées partielles de type elliptique*, Dunod, Paris, 1968.