1.5 Il teorema dell'autovalore dispari

Sia X uno spazio di Banach e sia $\Omega \subset \mathbb{R} \times X$ un aperto. Consideriamo una mappa $F : \Omega \to X$ della forma

$$F(\lambda, x) = x - \lambda T x + K(\lambda, x),$$

dove T è un operatore lineare compatto su X, e la mappa K è continua, compatta, e tale che $K(\lambda, x) = o(|x|)$ per $x \to 0$, uniformemente rispetto a λ. Quindi $F(\lambda, 0) = 0$ per ogni λ, e i candidati punti di biforcazione sono i $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui $I - \lambda T$ non è invertibile (si veda l'Esercizio 1.9). Dato che T è compatto, questi sono esattamente gli inversi degli autovalori reali non nulli di T, che formano un sottoinsieme discreto di $\mathbb{R}$.

1.1 Teorema. (Teorema di Krasnoselskii) *Nelle ipotesi sopra, supponiamo che $1/\lambda_0$ sia un autovalore di T con molteplicità algebrica dispari e che $(\lambda_0, 0) \in \Omega$. Allora λ_0 è punto di biforcazione.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che λ_0 non sia di biforcazione. Allora esiste $\epsilon > 0$ tale che se $|\lambda - \lambda_0| \leq \epsilon$ e $0 < |x| \leq \epsilon$ risulta $F(\lambda, x) \neq 0$. A meno di prendere ϵ ancora più piccolo, possiamo supporre che l'unico inverso di autovalore di T in $[\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon]$ sia λ_0. La mappa $F(\lambda, \cdot)$ è una perturbazione compatta dell'identità. Per quanto visto sopra se $|\lambda - \lambda_0| \leq \epsilon$ è ben definito il grado di Leray-Schauder di $F(\lambda, \cdot)$ sulla palla B_ϵ rispetto allo zero. Per la invarianza per omotopia, questo grado non dipende da $\lambda \in [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon]$. D'altra parte, se λ appartiene a questo intervallo ma è diverso da λ_0, 0 è un valore regolare per la mappa $F(\lambda, \cdot)$, e

$$\deg(F(\lambda, \cdot), B_\epsilon, 0) = \text{sign} \det(I - \lambda T).$$

Ricordando che il segno del determinante di $I - \lambda T$ è -1 elevato alla molteplicità algebrica totale degli autovalori di λT reali e maggiori di 1, cioè alla molteplicità totale degli autovalori di T reali e maggiori di $1/\lambda$, vediamo che il fatto che λ_0 abbia molteplicità algebrica dispari implica che il segno del determinante di $I - \lambda T$ cambia quando λ passa da $\lambda < \lambda_0$ a $\lambda > \lambda_0$. Questa contraddizione prova il teorema. □

Nell'esempio trattato nella sezione 1.1 tutte le ipotesi di questo teorema sono soddisfatte (la compattezza è automatica, essendo un problema finito-dimensionale), tranne il fatto che la molteplicità dell'autovalore è pari. Infatti non c'è biforcazione.

Dato che in questo teorema non compaiono condizioni di trasversalità, non possiamo aspettarci che l'insieme di biforcazione sia una curva regolare trasversa a $\mathbb{R} \times \{0\}$ in $(\lambda_0, 0)$. Per costruire un esempio, consideriamo un campo tangente v sulla sfera

$$S^2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1 \right\},$$

di classe C^∞ ed avente un solo zero in $(0, 0, 1)$ (provare a costruirlo). Sia F la mappa C^∞ da $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ definita da

$$F(\lambda, x) = \lambda x + v\left(\frac{x}{|x|}\right) e^{-\frac{1}{|x|^2}}.$$

Dato che $D_x F(\lambda, 0) = \lambda I$, l'unico candidato punto di biforcazione è $\lambda = 0$. Le ipotesi del teorema di Krasnoselskii sono soddisfatte, quindi c'è effettivamente biforcazione. Vediamo come è fatto l'insieme degli zeri (λ, x) di F con $x \neq 0$. Moltiplicando l'equazione $F(\lambda, x) = 0$ scalarmente per x, otteniamo $\lambda |x|^2 = 0$, quindi λ deve annullarsi. Ma allora l'insieme cercato è la semiretta generata dallo zero di v, cioè

$$\{(0, 0, z) \mid z > 0\}.$$

Quindi l'insieme di biforcazione non è una curva trasversa a $\mathbb{R} \times \{0\}$ in $(0, 0)$, ma è una semiretta con un estremo in $(0, 0)$.

L'ipotesi di compattezza su T e su K può essere eliminata. Quello che conta è che $1/\lambda_0$ sia un autovalore di T isolato nello spettro di T e di molteplicità algebrica finita e dispari. Infatti la molteplicità finita permette di ridursi ad un problema finito-dimensionale con una riduzione di Lyapunov-Schmidt, e a quel punto è possibile applicare il Teorema 1.1. Si verifichi questo fatto risolvendo il seguente:

1.2 Esercizio. *Consideriamo una mappa $F : \Omega \to X$ della forma*

$$F(\lambda, x) = x - \lambda T x + G(\lambda, x),$$

dove $T \in L(X)$, e la mappa G è continua e tale che $G(\lambda, x) = o(|x|)$ per $x \to 0$, uniformemente rispetto a λ. Sia $1/\lambda_0$ un autovalore reale di T, che supponiamo isolato e di molteplicità algebrica finita dispari. Dimostrare che λ_0 è punto di biforcazione.

2 Biforcazione globale

2.1 Il teorema di Rabinowitz

Mettiamoci ancora nelle ipotesi della sezione 1.5: dato un aperto $\Omega \subset \mathbb{R} \times X$, consideriamo una mappa $F : \Omega \to X$ della forma

$$F(\lambda, x) = x - \lambda T x + K(\lambda, x),$$

dove T è un operatore lineare compatto su X, e la mappa K è continua, compatta, e tale che $K(\lambda, x) = o(|x|)$ per $x \to 0$, uniformemente rispetto a λ. Sia $1/\lambda_0$ un autovalore reale di T di molteplicità algebrica dispari, tale che $(\lambda_0, 0) \in \Omega$. Sappiamo dal teorema di Krasnoselskii che λ_0 è punto di biforcazione. Questo vuol dire che il punto $(\lambda_0, 0)$ appartiene alla chiusura in Ω dell'insieme

$$S = \{(\lambda, x) \in \Omega \mid F(\lambda, x) = 0,\ x \neq 0\}.$$

Sia C il *ramo di biforcazione* passante per λ_0, cioè la componente connessa di $\overline{S} \cap \Omega$ che contiene $(\lambda_0, 0)$. Il seguente teorema fornisce una descrizione abbastanza precisa di come è fatto globalmente C:

2.1 Teorema. (Teorema di Rabinowitz) *Nelle ipotesi sopra, vale almeno una delle seguenti tre possibilità:*

(i) C non è limitato;

(ii) $\overline{C} \cap \partial\Omega \neq \emptyset$;

(iii) C incontra $\mathbb{R} \times \{0\}$ anche in punti diversi da $(\lambda_0, 0)$: più precisamente,

$$C \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) = \{(\lambda_0, 0), (\lambda_1, 0), \dots, (\lambda_k, 0)\},$$

dove i λ_j sono inversi di autovalori reali di T, ed esattamente un numero pari di essi ha molteplicità dispari.

Si osservi che, dato che le perturbazioni compatte dell'identità sono proprie sui chiusi limitati, l'insieme C ha intersezione compatta con ogni chiuso limitato. Quindi (i) e (ii) sono equivalenti a dire C non compatto. Si noti anche che nel caso (iii) C interseca il ramo banale $\mathbb{R} \times \{0\}$ in almeno due punti.

Dimostrazione. Supponiamo che (i) e (ii) non valgano: C è un limitato discosto da $\partial\Omega$, e dobbiamo dimostrare che vale (iii). Le intersezioni di C con $\mathbb{R} \times \{0\}$ sono punti di biforcazione. Dato che i punti di biforcazione sono inversi di autovalori di T e questi costituiscono un insieme discreto, le intersezioni del limitato C con $\mathbb{R} \times \{0\}$ sono un insieme finito di inversi di autovalori di T, come enunciato in (iii). Quello che dobbiamo verificare è che esattamente un numero pari di essi ha molteplicità dispari. Dato che C è una componente connessa di $\overline{S} \cap \Omega$, C è relativamente chiuso in Ω e possiamo trovare un aperto limitato Ω_0 con chiusura contenuta in Ω tale $\overline{\Omega_0} \cap \overline{S} = \Omega_0 \cap \overline{S} = C$. Possiamo inoltre supporre che Ω_0 non contenga punti del tipo $(\mu, 0)$ con $1/\mu$ autovalore di T, eccettuati i $\mu \in \{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k\}$.

Fissiamo $r > 0$ e consideriamo la mappa

$$H_r : \Omega \to \mathbb{R} \times X, \quad H_r(\lambda, x) = (|x|^2 - r^2, F(\lambda, x)).$$

Se $(\lambda, x) \in \partial\Omega_0$ risulta $F(\lambda, x) \neq 0$, a meno che $x = 0$, nel qual caso $|x|^2 - r^2 \neq 0$. Quindi H^r non si annulla su $\partial\Omega_0$, ed è ben definito il grado

$$\deg(H^r, \Omega_0, (0, 0)).$$

Per l'invarianza per omotopia, questo grado non dipende da $r \in (0, +\infty)$. La forma della prima componente di H^r mostra che l'equazione $H^r(\lambda, x) = (0, 0)$ non può avere soluzioni per r grande. Quindi il grado sopra è zero per ogni $r > 0$.

Affermiamo che se invece r è sufficientemente piccolo, le soluzioni si concentrano vicino ai punti della forma $(\lambda_j, 0)$. Più precisamente, per ogni U intorno di $\{(\lambda_0, 0), \dots (\lambda_k, 0)\}$ esiste $r_0 > 0$ tale che se $0 < r < r_0$ risulta

$$\{(\lambda, x) \in \Omega_0 \mid H_r(\lambda, x) = 0\} \subset U.$$

Infatti, se cosí non fosse potremmo trovare una successione $(\mu_n, x_n) \in \Omega_0 \backslash U$ tale che $H_{1/n}(\mu_n, x_n) = 0$. Questo implica che $|x_n| = 1/n$ è infinitesima e che $(\mu_n, x_n) \in C$. Per compattezza, possiamo supporre che (μ_n) converga ad un certo μ, ma allora μ dovrebbe essere un punto di biforcazione diverso dai λ_j, il che è una contraddizione.

Quindi, se gli $U_j \subset \Omega_0$ sono intorni due a due disgiunti di $(\lambda_j, 0)$, la formula di addittività del grado mostra che

$$\deg(H_r, \Omega_0, (0, 0)) = \sum_{j=0}^{k} \deg(H_r, U_j, (0, 0)),$$

per ogni r sufficientemente piccolo.

Affermiamo che

$$\deg(H_r, U_j, (0, 0)) = i^-(\lambda_j) - i^+(\lambda_j), \tag{7}$$

dove $i^\pm(\lambda_j)$ è il segno del determinante di $I - (\lambda_j \pm \epsilon)T$, per $\epsilon > 0$ piccolo. Rimandando per il momento la dimostrazione di (7), vediamo come questa identità permetta di concludere. Si ha infatti

$$0 = \deg(H_r, \Omega_0, (0, 0)) = \sum_{j=0}^{k} (i^-(\lambda_j) - i^+(\lambda_j)).$$

Se $1/\lambda_j$ ha molteplicità algebrica pari, $i^-(\lambda_j) = i^+(\lambda_j)$, mentre se la molteplicità è dispari, $i^-(\lambda_j) = -i^+(\lambda_j)$. Quindi nella somma sopra gli autovalori di molteplicità pari non danno contributo, mentre ciascun autovalore di molteplicità dispari contribuisce per ± 2. Dato che la somma totale deve essere nulla, ci sono un numero pari di tali autovalori di molteplicità dispari, come si voleva dimostrare.

Non ci resta che dimostrare (7). Scegliamo gli intorni U_j della forma

$$U_j = \left\{(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times X \mid |x|^2 + |\lambda - \lambda_j|^2 < r^2 + \epsilon^2\right\},$$

per $r > 0$ e $\epsilon > 0$ sufficientemente piccoli. Sia infatti $\epsilon > 0$ così piccolo che l'intervallo $[\lambda_j - \epsilon, \lambda_j + \epsilon]$ non contenga inversi di autovalori di T diversi da λ_j. Il numero $r > 0$ è invece scelto cosí piccolo che le equazioni

$$x - (\lambda_j \pm \epsilon)Tx + tK(\lambda, x) = 0, \quad t \in [0, 1],$$

non abbiano soluzioni $|x| \leq r$ diverse da 0. L'esistenza di una tale r si dimostra facilmente tenendo conto del fatto che gli operatori $I - (\lambda_j \pm \epsilon)T$ sono isomorfismi. Consideriamo l'omotopia

$$H_r^t(\lambda, x) = (t(|x|^2 - r^2) + (1 - t)(\epsilon^2 - |\lambda - \lambda_j|^2), x - \lambda Tx + tK(\lambda, x)), \quad t \in [0, 1],$$

tale che $H_r^1 = H_r$. Supponiamo che tale mappa abbia uno zero (t, λ, x) su $[0, 1] \times \partial U_j$. Dal fatto che $(\lambda, x) \in \partial U_j$ e dal fatto che la prima componente di H_r^t si annulla ricaviamo

$$|x|^2 + |\lambda - \lambda_j|^2 = r^2 + \epsilon^2, \quad t(|x|^2 - r^2) + (1 - t)(\epsilon^2 - |\lambda - \lambda_j|^2) = 0,$$

che implica $|x| = r$ e $\lambda = \lambda_j \pm \epsilon$. Ma allora la seconda componente di H_r^t non può annullarsi in (λ, x), per la scelta di r.

Dunque l'omotopia H_r^t è ammissibile su U_j, e dunque

$$\deg(H_r, U_j, (0,0)) = \deg(H_r^0, U_j, (0,0)).$$

La mappa

$$H_r^0(\lambda, x) = (\epsilon^2 - |\lambda - \lambda_j|^2, (I - \lambda T)x)$$

si annulla esattamente nei punti $(\lambda_j - \epsilon, 0)$ e $(\lambda_j + \epsilon, 0)$. Dato che

$$D_x H_r^0(\lambda_j \pm \epsilon, 0)[\nu, u] = (\mp 2\epsilon\nu, (I - (\lambda_j \pm \epsilon)T)u),$$

si ha

$$\text{sign det}\, D_x H_r^0(\lambda_j \pm \epsilon, 0) = \mp \text{sign det}(I - (\lambda_j \pm \epsilon)T) = \mp i^{\pm}(\lambda_j).$$

Quindi

$$\deg(H_r^0, U_j, (0,0)) = \text{sign det}\, D_x H_r^0(\lambda_j - \epsilon, 0) + \text{sign det}\, D_x H_r^0(\lambda_j + \epsilon, 0) = i^-(\lambda_j) - i^+(\lambda_j),$$

come richiesto. □

2.2 Esercizio. *Sia $F : \mathbb{R} \times X \to X$ una mappa della forma*

$$F(\lambda, x) = x - \lambda T x + K(\lambda, x),$$

con $T \in L_c(X)$ e K mappa continua compatta tale che $K(\lambda, x) = o(|x|)$ per $x \to 0$ localmente uniformemente rispetto a λ. Siano $a < b$ numeri reali tali che $I - aT, I - bT \in GL(X)$. Supponiamo che sign det$(I - aT) \neq$ sign det$(I - bT)$. *Indicando con S l'insieme delle soluzioni (λ, x) di $F(\lambda, x) = 0$ con $x \neq 0$, si dimostri che esiste una componente connessa C di $\overline{S}$ che interseca $((a,b) \times \{0\})$ e che (i) è illimitata, oppure (ii) interseca anche $((-\infty, a) \cup (b, +\infty)) \times \{0\}$.*

2.3 Esercizio. *Dimostrare lo stesso risultato del problema sopra per una mappa della forma*

$$F(\lambda, x) = x + K(\lambda, x),$$

con K mappa C^1 compatta, tale che $F(\lambda, 0) = 0$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, e

$$\text{sign det}\, D_x F(a, 0) \neq \text{sign det}\, D_x F(b, 0).$$

Riferimenti bibliografici

[Dei85] K. Deimling, *Nonlinear functional analysis*, Springer, Berlin, 1985.

[Nir70] L. Nirenberg, *Topics in nonlinear functional analysis*, Courant lecture notes, Amer. Math. Soc., New York, 1970.