Parte I

Teoremi di funzione implicita

1 Teoremi di funzione implicita in spazi di Banach

1.1 Il teorema della funzione implicita

Dati X, Y spazi di Banach, indichiamo con $L(X, Y)$ lo spazio degli operatori lineari e continui da X in Y. Lo spazio vettoriale $L(X, Y)$ è a sua volta uno spazio di Banach con la norma degli operatori $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L(X,Y)}$. Iniziamo con il ricordare il seguente:

1.1 Lemma. *Sia X uno spazio di Banach, e sia $T \in L(X, X)$ con $\|T\| < 1$. Allora $I - T$ è un isomorfismo, con inversa*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k.$$

Si tratta di un fatto generale di algebre di Banach, e si dimostra osservando che $\|T\| < 1$ implica che la serie sopra è normalmente convergente.

Data una mappa $F : X \to Y$ tra spazi metrici, indicheremo con $\operatorname{lip} F$ la sua costante di Lipschitz:

$$\operatorname{lip} F := \sup_{x \neq y \in X} \frac{d(F(x), F(y))}{d(x, y)} \in [0, +\infty].$$

Le mappe Lipschitziane sono quelle per cui $\operatorname{lip} F < +\infty$.

1.2 Lemma. *Sia $(X, |\cdot|)$ uno spazio di Banach e sia $B_r(0)$ la palla aperta di X di centro 0 e raggio r. Sia $H : B_r(0) \to X$ una mappa Lipschitziana con $\operatorname{lip} H = \theta < 1$. Se $|H(0)| < (1 - \theta)r$ allora esiste unico $x \in B_r(0)$ tale che $H(x) = x$.*

Dimostrazione. Si tratta di una semplice applicazione del teorema delle contrazioni. Se $x + H(x) = x' + H(x')$ allora

$$|x - x'| = |H(x) - H(x')| \leq \theta |x - x'|,$$

quindi $x = x'$, il che mostra che l'equazione $H(x) = x$ ha al più una soluzione. Sia $s \in [0, r)$ tale che $|H(0)| = (1 - \theta)s$. Se $x \in \overline{B_s}(0)$, allora

$$|H(x)| \leq |H(x) - H(0)| + |H(0)| \leq \theta |x| + (1 - \theta)s \leq s.$$

Quindi H è una contrazione di $\overline{B_s}(0)$ in sé e come tale ha un punto fisso $x \in \overline{B_s}(0) \subset B_r(0)$, soluzione del nostro problema. □

1.3 Esercizio. *Dimostrare che se $H : X \to X$ è θ-Lipschitziana con $\theta < 1$, allora $I - H$ è un omeomorfismo di X su X, con $\operatorname{lip}(I - H)^{-1} \leq 1/(1 - \theta)$. Cosa si può dire se la θ-contrazione H è definita in un aperto di X?*

1.4 Teorema. (Teorema della funzione implicita) *Siano Y, Z spazi di Banach, U uno spazio topologico, $x_0 \in U$, $y_0 \in Y$, $V \subset Y$ intorno di y_0. Supponiamo che la mappa $F : U \times V \to Z$ sia continua, differenziabile rispetto alla seconda variabile, e che la mappa $(x, y) \mapsto D_2F(x, y) : U \times V \to L(Y, Z)$ sia continua. Supponiamo inoltre che $F(x_0, y_0) = 0$ e che $D_2F(x_0, y_0)$ sia un isomorfismo. Allora, esistono un intorno aperto U_0 di x_0 in U, $r > 0$ ed una mappa continua $G : U_0 \to B_r(y_0)$ tale che*

$$\{(x, y) \in U_0 \times B_r(y_0) \mid F(x, y) = 0\} = \operatorname{graf} G := \{(x, y) \in U_0 \times B_r(y_0) \mid y = G(x)\}.$$

Se inoltre U è un aperto in uno spazio di Banach X e F è di classe C^k su $U \times V$, con $1 \leq k \leq \infty$, anche G risulta di classe C^k e

$$DG(x) = -D_2F(x, G(x))^{-1} D_1F(x, G(x)) \tag{1}$$

per ogni $x \in U_0$.

Dimostrazione. A meno di traslazioni possiamo supporre che $y_0 = 0$. Poniamo $T := D_2F(x_0, 0) \in L(Y, Z)$. L'equazione $F(x, y) = 0$ è equivalente a $H(x, y) = y$, dove $H(x, y) := y - T^{-1}F(x, y)$. Dato che

$$D_2H(x_0, 0) = I_Y - T^{-1}D_2F(x_0, 0) = I_Y - T^{-1}T = 0,$$

per la continuità di D_2F esistono $\theta \in [0, 1)$, un intorno U_1 di x_0 e $r > 0$ tali che $\|D_2H(x, y)\| \leq \theta$ se $x \in U_1$ e $|y| < r$. Osserviamo per inciso che $1 > \|D_2H(x, y)\| = \|I_Y - T^{-1}D_2F(x, y)\|$ implica che $T^{-1}D_2F(x, y)$ è un isomorfismo di Y in sé, quindi

$$D_2F(x, y) \text{ è un isomorfismo per ogni } (x, y) \in U_1 \times B_r(0). \tag{2}$$

Per il teorema del valor medio,

$$|H(x, y) - H(x, y')| \leq |y - y'| \sup_{\lambda \in [0,1]} \|D_2H(x, \lambda y + (1 - \lambda)y')\| \leq \theta|y - y'|,$$

per ogni $(x, y),\ (x, y') \in U_1 \times B_r(0)$.

Dato che $H(x_0, 0) = 0$, per la continuità di $x \mapsto H(x, 0)$ esiste un intorno $U_0 \subset U_1$ di x_0 tale che $|H(x, 0)| < (1 - \theta)r$ su U_0. Sia $x \in U_0$. Per il Lemma 1.2, esiste unico $G(x) \in B_r(0)$ tale che $G(x) + H(x, G(x)) = 0$. Quindi

$$\{(x, y) \in U_0 \times B_r(0) \mid F(x, y) = 0\} = \operatorname{graf} G.$$

Se $x, x' \in U_0$, dal fatto che H è θ-Lipschitziana nella seconda variabile su $U_0 \times B_r(0)$, si ha che

$$\begin{aligned} |G(x') - G(x)| = |H(x', G(x')) - H(x, G(x))| \leq |H(x', G(x')) - H(x', G(x))| \\ +|H(x', G(x)) - H(x, G(x))| \leq \theta|G(x') - G(x)| + \|T^{-1}\|\, |F(x', G(x)) - F(x, G(x))|. \end{aligned}$$

Quindi

$$|G(x') - G(x)| \leq \frac{\|T^{-1}\|}{1 - \theta}|F(x', G(x)) - F(x, G(x))| \tag{3}$$

tende a 0 per $x' \to x$, per la continuità di F, e G risulta continua.

Supponiamo ora che U sia un aperto di uno spazio di Banach X e che F sia di classe C^k, $1 \leq k \leq \infty$. Possiamo allora supporre che $x_0 = 0$. Dimostriamo che G è differenziabile in U_0 e che vale l'identità (1). Per (2), ogni punto $(x, G(x))$, con $x \in U_0$, soddisfa le ipotesi del teorema, quindi è sufficiente dimostrare che G è differenziabile in $x_0 = 0$ e che vale (1) per $x = x_0$. Da (3) con $x = 0$ segue

$$|G(x')| \leq \frac{\|T^{-1}\|}{1 - \theta}|F(x', 0)| \leq \frac{\|T^{-1}\|}{1 - \theta}|x'| \sup_{\lambda \in [0,1]} \|D_1F(\lambda x', 0)\|,$$

quindi $G(x) = O(x)$ per $x \to 0$. Per la differenziabilità di F si ha quindi

$$0 = F(x, G(x)) = D_1F(0, 0)x + D_2F(0, 0)G(x) + o(x) \quad \text{per } x \to 0,$$

da cui, applicando $D_2F(0, 0)^{-1}$,

$$G(x) = -D_2F(0, 0)^{-1}D_1F(0, 0)x + o(x) \quad \text{per } x \to 0,$$

il che dimostra la differenziabilità di G in 0 e la formula (1) per $x = 0$.

La formula (1) ed un semplice argomento induttivo mostrano che G è di classe C^k. Avendo mostrato che G è di classe C^1, supponiamo G di classe C^h con $1 \leq h < k$. Allora la formula (1) mostra che DG è di classe C^h, quindi G è di classe C^{h+1}. Questo conclude la dimostrazione. □

1.5 Osservazione. *Dalla dimostrazione segue che la tesi del teorema vale con un intorno U_0 di x_0 ed una costante r tali che $\|I_Y - T^{-1}D_2F\| \leq \theta < 1$ su $U_0 \times B_r(y_0)$ e $|F(x, y_0)| < (1 - \theta)r$ su U_0.*

1.6 Osservazione. *Supponiamo che U sia uno spazio metrico e che la F sia uniformemente continua nella prima variabile, uniformemente rispetto alla seconda. Supponiamo cioè che esista un modulo di continuità ω tale che*

$$|F(x,y)-F(x',y)| \leq \omega(d(x,x')) \quad \forall x,x' \in U,\ \forall y \in V.$$

La disuguaglianza (3) mostra allora che un modulo di continuità per la funzione G è $c\omega$, con $c = \|T^{-1}\|/(1-\theta)$. In particolare, se F è α-Hölderiana rispetto alla prima variabile, uniformemente rispetto alla seconda, anche la G risulta α-Hölderiana.

1.7 Osservazione. *La dimostrazione del teorema esibisce anche uno schema iterativo per la costruzione della mappa G. Infatti $G(x)$ è il punto fisso della contrazione $y \mapsto -H(x,y) = y - T^{-1}F(x,y)$. Quindi $G(x)$ è il limite della successione definita per ricorrenza da*

$$u_0 = y_0, \quad u_{n+1} = u_n - T^{-1}F(x,u_n).$$

Torneremo su questo fatto in seguito.

1.8 Esercizio. *Per l'esistenza e continuità della mappa G è possibile indebolire l'ipotesi di differenziabilità di F. Si mostri infatti che è sufficiente assumere che esista un isomorfismo lineare $T: Y \to Z$ tale che*

$$|F(x,y)-F(x,y')-T(y-y')| \leq k|y-y'|,$$

per ogni x in un intorno di x_0, y,y' in un intorno di y_0, con $k < 1/\|T^{-1}\|$.

Risulta molto utile ridurre al minimo le ipotesi di regolarità nei teoremi di funzione implicita. Vedremo infatti che a molti problemi "lisci" sono associate mappe tra spazi di Banach che lisce non sono.

1.2 Conseguenze

Vediamo le conseguenze più importanti del teorema della funzione implicita.

1.9 Teorema. (Teorema della funzione inversa). *Siano X,Y spazi di Banach, U un intorno di x_0 in X, ed $F: U \to Y$ una mappa di classe C^k, $1 \leq k \leq \infty$. Se $DF(x_0) \in L(X,Y)$ è un isomorfismo, allora esiste un intorno aperto $V \subset U$ di x_0 in X tale che $F(V)$ è aperto, $F|_V : V \to F(V) \subset Y$ è invertibile e la mappa $F^{-1}: F(V) \to V$ è di classe C^k, con $DF^{-1}(y) = DF(F^{-1}(y))^{-1}$ per ogni $y \in F(V)$.*

In altre parole, F è un C^k-diffeomorfismo locale in x_0.

Dimostrazione. Consideriamo la mappa di classe C^k

$$G: Y \times U \to Y, \quad G(y,x) = F(x) - y.$$

Dato che $G(F(x_0),x_0) = 0$ e $D_2G(F(x_0),x_0) = DF(x_0)$ è un isomorfismo, per il teorema della funzione implicita esistono W intorno aperto di $F(x_0)$, V_0 intorno aperto di x_0, ed una mappa $H: W \to V_0$ di classe C^k tale che

$$\{(y,x) \in W \times V_0 \mid F(x) = y\} = \operatorname{graf} H. \tag{4}$$

Se $y \in W$ allora $(y,H(y)) \in \operatorname{graf} H$, quindi per (4), $F(H(y)) = y$ per ogni $y \in W$.

L'insieme $H(W)$ è la proiezione sul secondo fattore dell'insieme (4), quindi coincide con l'insieme degli $x \in V_0$ tali che $F(x) \in W$, cioè $H(W) = V_0 \cap F^{-1}(W)$, un intorno aperto di x_0 che indichiamo con V.

Se $x \in V$, la coppia $(F(x),x)$ appartiene all'insieme di sinistra in (4), quindi anche al grafico di H: dunque $x = H(F(x))$ per ogni $x \in V$. Concludiamo che la mappa C^k H è l'inversa di $F|_V$. Infine, per la formula (1),

$$DF^{-1}(y) = DH(y) = -D_2G(y,H(y))^{-1}D_1G(y,H(y)) = DF(H(y))^{-1} = DF(F^{-1}(y))^{-1},$$

come volevasi dimostrare. $\square$

Ricordiamo che se X, Y sono spazi di Banach e le applicazioni lineari continue $L \in L(X,Y)$, $R \in L(Y,X)$ soddisfano $LR = I_Y$, L si dice *inversa sinistra*, mentre R si dice *inversa destra*. Questo implica ovviamente che L è surgettiva ed R è iniettiva. Inoltre, ponendo $P := RL \in L(X,X)$ si ha $P^2 = RLRL = RI_Y L = RL = P$, quindi P è un proiettore e X si decompone in somma diretta come

$$X = \ker P \oplus \operatorname{ran} P = \ker L \oplus \operatorname{ran} R.$$

Concludiamo che il nucleo di un'inversa sinistra è complementato, mentre l'immagine di un'inversa destra è un sottospazio chiuso e complementato. Viceversa, se il nucleo di un'applicazione surgettiva $L \in L(X,Y)$ è complementato, il teorema della mappa aperta applicato alla restrizione di L al complementare di $\ker L$ prova l'esistenza di un'inversa destra di L. Analogamente, se l'immagine dell'applicazione iniettiva $R \in L(Y,X)$ è chiusa e complementata, il teorema della mappa aperta mostra che R possiede un'inversa sinistra.

In conlusione: $L \in L(X,Y)$ è un inversa sinistra se e solamente se è surgettiva e il suo nucleo è complementato, $R \in L(Y,X)$ è un'inversa destra se e solamente se è iniettiva e la sua immagine è un sottospazio chiuso e complementato.

1.10 TEOREMA. (Criterio per le sommersioni) *Siano X, Y spazi di Banach, U un intorno di 0 in X, ed $F : U \to Y$ una mappa di classe C^k, $1 \leq k \leq \infty$, tale che $F(0) = 0$. Se $L := DF(0)$ è un inversa sinistra, allora esistono un intorno V di 0 in X ed un diffeomorfismo di classe C^k, $\Phi : V \to \Phi(V) \subset U$ tale che $\Phi(0) = 0$, $D\Phi(0) = I_X$ e*

$$F \circ \Phi(x) = Lx \quad \forall x \in V.$$

In particolare, F è una mappa localmente aperta in 0, e $F^{-1}(0) \cap V$ è una sottovarietà di classe C^k di X, il cui spazio tangente in 0 è $\ker L$.

Infatti, dato che L è un inversa sinistra, X si decompone come $X = X_1 \oplus X_2$, dove $X_1 = \ker L$ e la restrizione di L a X_2 è un isomorfismo su Y. Cerchiamo il diffeomorfismo Φ della forma

$$\Phi(x_1, x_2) = (x_1, x_2 + H(x_1, x_2)).$$

Quindi occorre trovare H che risolva l'equazione

$$F(x_1, x_2 + H(x_1, x_2)) - Lx_2 = 0.$$

Per il teorema della funzione implicita localmente esiste (unica) una mappa H di classe C^k che risolve quest'equazione, ed il suo differenziale in 0 risulta nullo. Per il teorema della funzione inversa, $\Phi = I + H$ è il diffeomorfismo locale in 0 di classe C^k che cercavamo.

1.11 TEOREMA. (Criterio per le immersioni) *Siano X, Y spazi di Banach, U un intorno di 0 in X, ed $F : U \to Y$ una mappa di classe C^k, $1 \leq k \leq \infty$, tale che $F(0) = 0$. Se $R := DF(0)$ è un inversa destra, allora esistono un intorno aperto V di 0 in Y, un intorno aperto $U \subset F^{-1}(V)$ di 0 in X, ed un diffeomorfismo di classe C^k, $\Psi : V \to \Psi(V) \subset Y$ tale che $\Psi(0) = 0$, $D\Psi(0) = I_Y$ e*

$$\Psi \circ F(x) = Rx \quad \forall x \in U.$$

In particolare, F è una mappa localmente iniettiva e localmente chiusa in 0, e $F(U)$ è una sottovarietà di classe C^k di Y, il cui spazio tangente in 0 è $\operatorname{ran} R$.

Infatti sia L un'inversa sinistra di R, e sia $Y = Y_1 \oplus Y_2$ la corrispondente decomposizione di Y, con $Y_1 = \operatorname{ran} R$, $Y_2 = \ker L$. Ponendo $F = (F_1, F_2)$ si ha dunque $DF_1(0) = R$ e $DF_2(0) = 0$. Cerchiamo il diffeomorfismo Ψ^{-1} della forma

$$\Psi^{-1}(y_1, y_2) = (y_1 + H_1(y_1), y_2 + H_2(y_1)).$$

L'equazione per Ψ è equivalente a $F(x) = \Psi^{-1}(Rx)$, e quindi alle due equazioni:

$$F_1(x) = Rx + H_1(Rx), \quad F_2(x) = H_2(Rx).$$

Dato che R è un isomorfismo da X a Y_1 con inversa la restrizione di L a Y_1, la soluzione è

$$H_1(y_1) = F_1(Ly_1) - y_1, \quad H_2(y_1) = F_2(Ly_1).$$

Dato che $DH_1(0) = RL|_{Y_1} - I_{Y_1} = 0$ e $DH_2(0) = DF_2(0)L = 0$, il teorema della funzione inversa assicura che Ψ sia un diffeomorfismo locale in 0 di classe C^k.

Esistono anche versioni deboli dei criteri per le sommersioni e per le immersioni, che non assumono che il nucleo, rispettivamente l'immagine, di $DF(0)$ abbiano complementare topologico. Si verifichi questo fatto risolvendo i seguenti esercizi.

1.12 Esercizio. *Siano X, Y spazi di Banach, $U \subset X$ un intono di x_0, e $F : U \to Y$ una mappa di classe C^1 tale che l'applicazione lineare $DF(x_0)$ sia surgettiva. Dimostrare che F è localmente aperta in x_0.*

Il Teorema 15.5 in [Dei85] dimostra questo risultato sotto ipotesi di differenziabilità più deboli.

1.13 Esercizio. *Siano X, Y spazi di Banach, $U \subset X$ un intono di x_0, e $F : U \to Y$ una mappa di classe C^1 tale che l'applicazione lineare $DF(x_0)$ sia iniettiva ed abbia immagine chiusa. Dimostrare che F è localmente iniettiva e localmente chiusa in x_0.*

1.14 Osservazione. *Negli spazi di Banach esiste una teoria delle mappe analitiche. Il teorema 1.4 e le sue conseguenze valgono anche in questa categoria. Si veda [Dei85], sezione 15.1.*

2 Applicazioni

2.1 L'inviluppo di una famiglia di curve piane

Consideriamo una famiglia ad un parametro $\mathcal{C} = \{C_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ di curve nel piano. L'inviluppo della famiglia $\mathcal{C}$ è l'insieme dei punti limite di intersezioni di curve vicine. Più precisamente, diciamo che un punto $\bar{z}$ del piano appartiene a $\mathcal{E}_{\bar{\lambda}}$ se per ogni intorno Λ di $\bar{\lambda}$ e per ogni intorno U di $\bar{z}$ esistono $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \neq \bar{\lambda}$, e $z \in U$ tali che $z \in C_{\bar{\lambda}} \cap C_\lambda$. In particolare $\bar{z} \in C_{\bar{\lambda}}$, essendo $C_{\bar{\lambda}}$ un chiuso. L'inviluppo della famiglia di curve $\mathcal{C}$ è l'insieme

$$\mathcal{E} = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} \mathcal{E}_\lambda.$$

Supponiamo che la famiglia di curve $\mathcal{C}$ sia definita implicitamente da un'equazione

$$\varphi(\lambda, z) = 0,$$

dove $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è una funzione liscia. Assumiamo inoltre che per ogni $(\lambda, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ tale che $\varphi(\lambda, z) = 0$ risulti $\partial_z \varphi(\lambda, z) \neq 0$: il teorema della funzione implicita garantisce allora che ciascuna C_λ sia una curva liscia. Un esempio è costituito dalla funzione

$$\varphi(\lambda, x, y) = 2\lambda x - y - \lambda^2, \tag{5}$$

che definisce una famiglia di rette.

Cominciamo con il mostrare che se $\bar{z} \in \mathcal{E}_{\bar{\lambda}}$, allora

$$\partial_\lambda \varphi(\bar{\lambda}, \bar{z}) = 0.$$

Infatti, se $\partial_\lambda \varphi(\bar{\lambda}, \bar{z}) \neq 0$, il teorema della funzione implicita ci fornisce un intorno Λ di $\bar{\lambda}$, un intorno U di $\bar{z}$, ed una funzione $f : U \to \Lambda$ tale che

$$\{(\lambda, z) \in \Lambda \times U \mid \varphi(\lambda, z) = 0\} = \{(f(z), z) \mid z \in U\}.$$

Questa identità ci dice che ogni $z \in U$ appartiene ad un'unica curva C_λ con $\lambda \in \Lambda$ (precisamente a $C_{f(z)}$). Quindi curve C_λ distinte, con $\lambda \in \Lambda$, non hanno intersezioni in U, dunque $\bar{z}$ non appartiene a $\mathcal{E}_{\bar{\lambda}}$.

Quindi il sistema

$$\begin{cases} \varphi(\bar\lambda, \bar z) = 0, \\ \partial_\lambda \varphi(\bar\lambda, \bar z) = 0, \end{cases} \tag{6}$$

costituisce una condizione necessaria affinché $\bar z$ appartenga a $\mathcal{E}_{\bar\lambda}$. Vediamo di trovare una condizione sufficiente. Fissiamo $(\bar\lambda, \bar z)$ soluzione di (6) e definiamo la funzione liscia

$$\psi(\lambda, z) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(\lambda, z) - \varphi(\bar\lambda, z)}{\lambda - \bar\lambda} & \text{se } \lambda \neq \bar\lambda, \\ \partial_\lambda \varphi(\bar\lambda, z) & \text{se } \lambda = \bar\lambda. \end{cases}$$

Osserviamo che $\bar z \in \mathcal{E}_{\bar\lambda}$ se e solamente se il sistema

$$\begin{cases} \varphi(\lambda, z) = 0, \\ \psi(\lambda, z) = 0, \end{cases} \tag{7}$$

ha soluzioni (λ, z) arbitrariamente vicine a $(\bar\lambda, \bar z)$ e tali che $\lambda \neq \bar\lambda$. Per la condizione (6), questo sistema ha sempre la soluzione $(\bar\lambda, \bar z)$. Supponiamo che il differenziale rispetto alla seconda variabile della mappa

$$(\lambda, z) \mapsto (\varphi(\lambda, z), \psi(\lambda, z))$$

sia invertibile, ossia che, posto $z = (x, y)$, si abbia

$$\begin{vmatrix} \partial_x \varphi(\bar\lambda, \bar z) & \partial_y \varphi(\bar\lambda, \bar z) \\ \partial^2_{x\lambda} \varphi(\bar\lambda, \bar z) & \partial^2_{y\lambda} \varphi(\bar\lambda, \bar z) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{8}$$

Il teorema della funzione implicita fornisce allora una curva $\lambda \mapsto z(\lambda)$ di soluzioni di (7), tale che $z(\bar\lambda) = \bar z$. Quindi $\bar z \in \mathcal{E}_{\bar\lambda}$. La (8) - insieme alla (6) - è la condizione sufficiente cercata.

Se torniamo all'esempio (5), la condizione (6) è

$$\begin{cases} 2\lambda x - y - \lambda^2 = 0, \\ 2x - 2\lambda = 0. \end{cases}$$

Eliminando la variabile λ, troviamo che la parabola di equazione $y = x^2$ è il luogo candidato ad essere l'inviluppo della famiglia di rette data. La condizione (8) è verificata, in quanto

$$\begin{vmatrix} 2\lambda & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Quindi la parabola $y = x^2$ è l'inviluppo della famiglia di rette (5). In effetti, questa famiglia consiste di tutte le rette tangenti alla parabola.

2.1 Esercizio. *Determinare l'inviluppo della famiglia di rette che intersecano gli assi coordinati in due punti a distanza 1.*

2.2 Esercizio. *Determinare l'inviluppo della famiglia di ellissi con lo stesso centro, assi paralleli, e somma dei semiassi uguale a 2.*

2.3 Esercizio. *Determinare l'inviluppo della famiglia di rette che individuano con gli assi coordinati un triangolo di area 1.*

2.4 Esercizio. (Cissoide di Diocle) *Determinare l'inviluppo della famiglia di cerchi passanti per* 0 *con centro sulla parabola* $y = x^2$.

2.5 Esercizio. (Lemniscata di Bernoulli) *Determinare l'inviluppo della famiglia di cerchi passati per* 0 *con centro sull'iperbole* $y^2 - x^2 = 1$.

2.6 Esercizio. (Parabola di sicurezza) *Determinare l'inviluppo della famiglia delle traiettorie di un proiettile lanciato dall'origine con velocità 1 ed angolo con il terreno arbitrario.*

2.7 ESERCIZIO. (Equazione di Clairaut) *Dimostrare che l'insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale della forma*

$$y(x) = xy'(x) + f(y'(x))$$

è costituito da una famiglia di funzioni affini e dal suo inviluppo. Determinare tutte le soluzioni delle equazioni

$$y = xy' + (y')^3, \quad y = xy' + \sqrt{y'}, \quad y = \frac{x}{y'} + (y')^2.$$

2.2 Criterio di differenziabilità

Siano X, Y spazi di Banach e sia $U \subset X$ un aperto. Se $F \in C^k(U, Y)$, la formula di Taylor con resto di Lagrange mostra che, ponendo

$$R(x, h) = F(x + h) - \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} DF^j(x)h^j,$$

si ha

$$\lim_{(x,h)\to(x_0,0)} \frac{R(x, h)}{|h|^k} = 0 \quad \forall x_0 \in U.$$

Per studiare la differenziabilità di mappe tra spazi di Banach è utile sfruttare una sorta di viceversa di questo fatto. Ricordiamo che $L^j(X, Y)$ indica lo spazio di Banach delle applicazioni j-lineari e continue $A : X^j \to Y$, munito della norma

$$\|A\| = \sup_{\substack{(x_1,\ldots,x_j)\in X^j \\ |x_1|\le 1,\ldots,|x_j|\le 1}} |A[x_1, \ldots, x_k]|.$$

Il sottospazio chiuso delle applicazioni j-lineari simmetriche viene indicato con $L^j_s(X, Y)$.

2.8 TEOREMA. *Siano X, Y spazi di Banach, $U \subset X$ un aperto, $F : U \to Y$ una mappa continua. Siano $A_j : U \to L^j_s(X, Y)$ mappe continue, $j = 0, 1, \ldots, k$, e supponiamo che posto*

$$R(x, h) = F(x + h) - \sum_{j=0}^{k} A_j(x)h^j,$$

si abbia

$$\lim_{(x,h)\to(x_0,0)} \frac{R(x, h)}{|h|^k} = 0 \quad \forall x_0 \in U.$$

Allora F è di classe C^k e $D^jF = A_j$ per ogni $j = 0, 1, \ldots, k$.

Usando questo criterio, è facile dimostrare il seguente risultato sulla differenziabilità di operatori di composizione:

2.9 PROPOSIZIONE. *Sia K uno spazio topologico compatto, e sia $f : K \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una mappa continua, differenziabile k volte rispetto alla seconda variabile, e tale che le funzioni*

$$\partial_2^j f : K \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad j = 1, \ldots, k,$$

siano continue. Allora la mappa

$$F : C^0(K, \mathbb{R}) \to C^0(K, \mathbb{R}), \quad F(u)(x) = f(x, u(x)) \ \ \forall x \in K,$$

risulta di classe C^k e

$$D^jF(u)[h_1, \ldots, h_j](x) = \partial_2^j f(x, u(x))h_1(x) \ldots h_j(x), \quad \forall j = 1, \ldots, k.$$

2.10 Esercizio. *Generalizzare questo risultato all'operatore*

$$F : C^0(K, X) \to C^0(K, Y), \quad F(u)(x) = f(x, u(x)),$$

dove $f : K \times X \to Y$, X, Y *spazi di Banach.*

2.11 Esercizio. *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un aperto limitato, sia* $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *e sia* $k \in \mathbb{N}$. *Discutere la buona definizione e la differenziabilità della mappa*

$$F : C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}) \to C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}), \quad F(u)(x) = f(x, u(x)),$$

in termini della differenziabilità della f.

2.12 Esercizio. *Sia* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervallo chiuso e limitato. Supponiamo che la funzione* $k : I \times I \to \mathbb{R}$ *sia continua, che* $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sia continua, differenziabile rispetto alla seconda variabile, e tale che* $\partial_2 f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sia continua. Dimostrare che la mappa*

$$F : C^0(I, \mathbb{R}) \to C^0(I, \mathbb{R}), \quad F(u)(t) = \int_I k(t, s) f(s, u(s))\, ds$$

è di classe C^1 *e che*

$$DF(u)h(t) = \int_I k(t, s)\partial_2 f(s, u(s))h(s)\, ds.$$

2.13 Esercizio. *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un aperto limitato. Si dice che*

$$f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x, s) \mapsto f(x, s),$$

è una funzione di Caratheodory se è continua in s *per quasi ogni* $x \in \Omega$, *e misurabile in* x, *per ogni* $s \in \mathbb{R}$. *Data* $u : \Omega \to \mathbb{R}$, *si ponga*

$$F(u) : \Omega \to \mathbb{R}, \quad F(u)(x) = f(x, u(x)).$$

1. *Dimostrare che se* u *è misurabile su* Ω, *allora* $F(u)$ *è misurabile su* Ω.

2. *Dimostrare che se* (u_n) *converge a* u *in musura, allora* $(F(u_n))$ *converge a* $F(u)$ *in misura.*

3. *Supponiamo inoltre che, dati* $p, q \in [1, +\infty)$, *esista* $a \in L^q(\Omega)$ *e* $b \geq 0$ *tali che*

$$|f(x, s)| \leq a(x) + b|s|^{p/q}, \quad \text{per q.o. } x \in \Omega,\ \forall s \in \mathbb{R}.$$

   Dimostrare che $F : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$ *è ben definita e continua.*

4. *Nelle stesse ipotesi di (iii), assumendo inoltre che* $1/p+1/q = 1$, *dimostrare che il funzionale*

$$\varphi(u) = \int_\Omega \left(\int_0^{u(x)} f(x, s)\, ds \right) dx$$

   è ben definito e di classe C^1 *su* $L^p(\Omega)$, *e che* $D\varphi(u) = F(u)$.

5. *Sia ora* $p > 2$ *e sia* q *tale che* $1/p + 1/q = 1$. *Supponiamo che* f *sia derivabile rispetto a* s, *e che tanto* f *quanto* $\partial_s f$ *siano funzioni di Caratheodory. Supponiamo inoltre che esistano* $a \in L^{p/(p-2)}(\Omega)$ *e* $b \geq 0$ *tali che*

$$|\partial_s f(x, s)| \leq a(x) + b|s|^{p-2}.$$

   Dimostrare che la mappa $F : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$ *è ovunque differenziabile, e che*

$$DF(u)h(x) = \partial_s f(x, u(x))h(x).$$

6. *Consideriamo infine il caso* $p = 2$. *Supponiamo che* f *sia derivabile rispetto a* s, *che tanto* f *quanto* $\partial_s f$ *siano funzioni di Caratheodory, e che* $|\partial_s f(x, s)| \leq c$. *Dimostrare che* F *è differenziabile in un punto* u_0 *se e solamente se* f *è lineare in* s.

Per la soluzione dell'ultimo esercizio si veda [AP95].

2.3 Un problema di Dirichlet

Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tale che $f(0) = 0$. Allora il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} u''(x) + f(u(x)) = 0, \quad \forall x \in]0, \pi[, \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{cases} \tag{9}$$

ammette la soluzione banale $u \equiv 0$. Ci proponiamo di rispondere alla seguente domanda: cosa possiamo dire dell'esistenza di altre soluzioni "piccole"?

Diamo questo problema un'impostazione funzionale. Consideriamo il sottospazio chiuso di $C^2([0, \pi], \mathbb{R})$,

$$X = \left\{u \in C^2([0, \pi], \mathbb{R}) \mid u(0) = (\pi) = 0\right\},$$

e la mappa

$$F : X \to Y := C^0([0, \pi], \mathbb{R}), \quad F(u) = u'' + f \circ u.$$

Si osservi che dall'equazione segue che ogni soluzione u (necessariamente differenziabile due volte) è di classe C^∞, dunque possiamo tranquillamente lavorare in spazi di funzioni C^2 ed ottenere risposte valide per funzioni C^∞.

La mappa $u \mapsto u''$ è lineare e limitata da C^2 a C^0, quindi è differenziabile infinite volte. La mappa $u \to f \circ u$ da C^2 a C^0 si fattorizza mediante l'inclusione (lineare e continua) $C^2 \hookrightarrow C^0$, quindi è differenziabile infinite volte per la Proposizione 2.9. Qui ci interessa che F sia di classe C^1 (e dunque sarebbe stato sufficiente supporre $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$), e che

$$DF(u)h = h'' + f'(u)h, \quad \forall (u, h) \in X \times X.$$

In particolare,

$$DF(0)h = h'' + ah,$$

dove $a = f'(0)$. Studiamo le proprietà dell'operatore lineare

$$T_a : X \to Y, \quad Th = h'' + ah.$$

Il nucleo dell'operatore T_a consiste delle soluzioni del problema di Dirichlet lineare

$$\begin{cases} h'' + ah = 0 \\ h(0) = h(\pi) = 0. \end{cases}$$

Le soluzioni dell'equazione $h'' + ah = 0$ sono:

$$h(x) = \begin{cases} \alpha \sin \omega x + \beta \cos \omega x, & \text{se } a = \omega^2 > 0, \\ \alpha x + \beta, & \text{se } a = 0, \\ \alpha e^{\omega x} + \beta e^{-\omega x}, & \text{se } a = -\omega^2 < 0. \end{cases}$$

Troviamo quindi soluzioni non banali che si annullano sia in 0 che in π se e solo se $a = \omega^2$ con $\omega \in \mathbb{Z}^+$. Quindi T_a non è iniettivo se e solamente se

$$a \in \left\{\omega^2 \mid \omega \in \mathbb{Z}^+\right\}.$$

In questo caso, il nucleo di $T_a = T_{\omega^2}$ è generato dalla funzione $x \mapsto \sin \omega x$.

Verifichiamo che se $a \notin \left\{\omega^2 \mid \omega \in \mathbb{Z}^+\right\}$, l'operatore T_a risulta anche surgettivo. Data una funzione $v \in C^0([0, \pi], \mathbb{R})$, dobbiamo risolvere il problema di Dirichlet lineare non omogeneo

$$\begin{cases} h'' + ah = v \\ h(0) = h(\pi) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Sia h_1 la soluzione del problema di Cauchy non omogeneo

$$\begin{cases} h'' + ah = v \\ h(0) = 0, \ h'(0) = 1, \end{cases}$$

e sia h_0 la soluzione del problema di Cauchy omogeneo

$$\begin{cases} h'' + ah = 0 \\ h(0) = 0, \ h'(0) = 1. \end{cases}$$

Dato che $\ker T_a = (0)$, $h_0(\pi) \neq 0$, quindi $h = h_1 - ch_0$ risolve (10) per $c = h_1(\pi)/h_0(\pi)$.

2.14 Esercizio. *Trovare una formula integrale per la soluzione u di (10), per $a \notin \left\{\omega^2 \mid \omega \in \mathbb{Z}^+\right\}$.*

Riassumiamo i risultati ottenuti nel seguente:

2.15 Lemma. *Sia $a \in \mathbb{R}$. L'operatore*

$$T_a : \left\{u \in C^2([0,\pi],\mathbb{R}) \mid u(0) = u(\pi) = 0\right\} \to C^0([0,\pi],\mathbb{R}), \quad T_a h = h'' + ah,$$

è un isomorfismo se e solamente se a non è il quadrato di un intero non nullo.

Dunque $DF(0)$ è un isomorfismo se e solamente se

$$f'(0) \notin \left\{\omega^2 \mid \omega \in \mathbb{Z}^+\right\}.$$

In questo caso, il teorema della funzione inversa implica che F è un diffeomorfismo da un intorno di 0 in X su un intorno di 0 in Y. In particolare, F è iniettiva in un intorno di 0 in X, quindi esiste $\epsilon > 0$ tale che $u \equiv 0$ è l'unica soluzione con norma C^2 minore di ϵ. Dall'equazione e dal fatto che $f(0) = 0$ e f è continua in 0, segue che le soluzioni con norma uniforme piccola hanno anche norma C^2 piccola. Concludiamo quindi che *se $f'(0)$ non è il quadrato di un intero non nullo, esiste $\epsilon_0 > 0$ tale che $u \equiv 0$ è l'unica soluzione di (9) con norma uniforme minore di ϵ_0.* Ovviamente il fatto che F sia un diffeomorfismo locale ci fornisce informazioni ulteriori sulla risolubilità di

$$\begin{cases} u''(x) + f(u(x)) = v(x), \quad \forall x \in]0,\pi[, \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{cases}$$

per $v \in C^0([0,\pi],\mathbb{R})$ con norma uniforme piccola, e sulla dipendenza della soluzione u dal dato v.

Supponiamo ora che $f'(0)$ sia il quadrato di un intero non nullo. In questo caso è certamente possibile l'esistenza di soluzioni non nulle arbitrariamente piccole: ad esempio se f è lineare troviamo un sottospazio lineare di dimensione uno di soluzioni. In generale però non possiamo aspettarci l'esistenza di queste soluzioni piccole. Quello che possiamo aspettarci è il fenomeno seguente: sia $g \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tale che $g(0) = 0$ e $g'(0) = 0$. Consideriamo la famiglia ad un parametro di problemi di Dirichlet

$$\begin{cases} u''(x) + g(u(x)) + \lambda u(x) = 0, \quad \forall x \in (0,\pi), \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Se ω è un intero non nullo, esistono soluzioni (λ, u) di (11) con λ arbitrariamente vicino a ω^2 e u C^2-piccolo ma non nullo. Si verifichino questi fatti risolvendo gli esercizi seguenti.

2.16 Esercizio. *Determinare l'immagine di T_a, nel caso $a \in \left\{\omega^2 \mid \omega \in \mathbb{Z}^+\right\}$.*

2.17 Esercizio. *Supponiamo che $f(0) = 0$, $f'(0) = \omega^2$ con ω intero non nullo, e $f''(0) \neq 0$. Dimostrare che esiste $\epsilon > 0$ tale che il problema (9) non ha soluzioni non nulle con norma uniforme minore di ϵ.*

2.18 Esercizio. *Supponiamo che $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$, e sia ω un intero non nullo. Dimostrare che per ogni $\epsilon > 0$ esistono $\lambda \in]\omega^2 - \epsilon, \omega^2 + \epsilon[$ e $u \in X$, $u \neq 0$, $\|u\|_{C^2} < \epsilon$ tali che (λ, u) sia soluzione di (11).*

Il seguente *diagramma di biforcazione* mostra la norma uniforme delle soluzioni u in funzione del parametro λ: la regione colorata rappresenta la zona dove non si trovano soluzioni, i puntini rappresentano le successioni di soluzioni (u_n, λ_n) con $\|u_n\|_\infty$ infinitesima e λ_n convergente al quadrato di un intero non nullo.

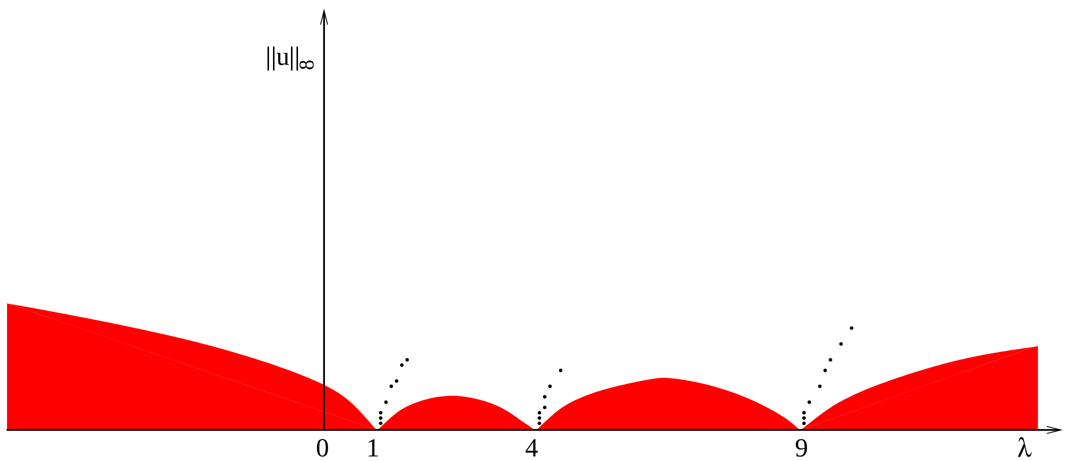

Figura 1: Diagramma di biforcazione.

Riferimenti bibliografici

[AP95] A. Ambrosetti and G. Prodi, *A primer of nonlinear analysis*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 34, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[Dei85] K. Deimling, *Nonlinear functional analysis*, Springer, Berlin, 1985.

[Piz04] G. Pizzi, *Appunti di Analisi II*, Corso di Laurea in Fisica - Università di Pisa, 2004, Appunti del corso tenuto da Pietro Majer nell'anno 2003-04, esercitatore Carlo Carminati, `http://linuz.sns.it/~mangusta/appunti/appunti0304.php`.