3.2 Il teorema di immersione di Nash

Immersioni isometriche. Siano M ed N due varietà. Se g è una metrica su N e $u : M \to N$ è una mappa differenziabile, la metrica u^*g indotta su M è definita da

$$u^*g(x)[\xi,\eta] = g(u(x))[Du(x)\xi, Du(x)\eta], \quad \forall x \in M,\ \xi,\eta \in T_xM.$$

Indichiamo con $\overline{g}$ la metrica standard $\overline{g}(x)[\xi,\eta] = \xi \cdot \eta$ dello spazio euclideo $\mathbb{R}^N$. Un problema classico in geometria Riemanniana è il seguente: data una varietà Riemanniana (M, g), è possibile trovare un embedding u di M in qualche spazio euclideo $\mathbb{R}^N$ che risulti isometrico, cioè tale che $u^*(\overline{g}) = g$? A questo problema è stata data risposta affermativa negli anni cinquanta da John Nash [Nas56].

Vediamo come è possibile impostare questo problema nel caso particolare in cui $M = \mathbb{T}^n$ sia il toro n-dimensionale. Dato che il fibrato tangente di $\mathbb{T}^n$ è $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$, una metrica g su $\mathbb{T}^n$ è associata ad una mappa $g : \mathbb{T}^n \to C^\infty(\mathbb{T}^n, \mathrm{Sym}(n,\mathbb{R}))$, dove $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ indica lo spazio vettoriale delle matrici reali $n \times n$ simmetriche, tramite

$$g(x)[\xi,\eta] = g(x)\xi \cdot \eta, \quad \forall x \in \mathbb{T}^n,\ \xi,\eta \in \mathbb{R}^n.$$

La positività della metrica si traduce nel fatto che g prende valori nel cono $\mathrm{Sym}^+(n,\mathbb{R})$ delle matrici simmetriche definite positive. Vogliamo trovare un embedding $u : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}^N$, per qualche N sufficientemente grande, tale che $u^*(\overline{g}) = g$, ossia

$$u^*(\overline{g})(x)[\xi,\eta] = Du(x)\xi \cdot Du(x)\eta = Du(x)^T Du(x)\xi \cdot \eta = g(x)\xi \cdot \eta, \quad \forall x \in \mathbb{T}^n,\ \xi,\eta \in \mathbb{R}^n,$$

o equivalentemente

$$Du(x)^T Du(x) = g(x), \quad \forall x \in \mathbb{T}^n. \tag{29}$$

In coordinate, indicando con le lettere latine gli indici in $\mathbb{R}^n$ e con le lettere greche gli indici in $\mathbb{R}^N$ (e adottando l'usuale convenzione sulla somma degli indici ripetuti), l'equazione (29) assume la forma

$$\partial_i u^\alpha(x) \partial_j u^\alpha(x) = g_{ij}(x).$$

Si tratta di un sistema di equazioni differenziali non lineari del primo ordine, con N funzioni incognite e n^2 equazioni (ma la simmetria riduce questo numero a $n(n+1)/2$ equazioni indipendenti). Si noti che le soluzioni u di questa equazione hanno automaticamente differenziale iniettivo, cioè sono delle immersioni. Per essere degli emebedding manca l'iniettività. Sembra naturale considerare la seguente impostazione funzionale: vorremmo dimostrare che la mappa

$$F : C^*(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}^N) \to C^{*-1}(\mathbb{T}^n, \mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})), \quad F(u) = u^*(\overline{g}) = Du^T Du,$$

ha nella sua immagine tutto $C^{*-1}(\mathbb{T}^n, \mathrm{Sym}^+(n,\mathbb{R}))$. Al solito, indichiamo con C^* uno spazio di funzioni la cui regolarità non è ben definita. Differenziando formalmente F in un certo $u \in C^*(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}^N)$ otteniamo

$$DF(u)h = Dh^T Du + Du^T Dh, \quad \forall h \in C^*(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}^N).$$

Vorremmo almeno poter dimostrare che se u è una mappa fissata (magari un embedding di classe C^∞), allora per ogni metrica g vicina a $u^*(\overline{g})$, esiste una mappa $v \in C^*(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}^N)$ vicina a u tale che $v^*(\overline{g})$. Questo seguirebbe dal teorema della funzione implicita se riuscissimo a dimostrare che $DF(u)$ ammette un'inversa destra. In altre parole, data $w \in C^{*-1}(\mathbb{T}^n, \mathrm{Sym}(n,\mathbb{R}))$, vorremmo trovare una $h \in C^*(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}^N)$ tale che

$$Dh^T Du + Du^T Dh = w,$$

insieme ad una stima $\|h\|_{C^*} \le c\|w\|_{C^{*-1}}$. In coordinate, vogliamo risolvere il sistema di equazioni

$$\partial_i h^\alpha \partial_j u^\alpha + \partial_j h^\alpha \partial_i u^\alpha = w_{ij}. \tag{30}$$

Questo sistema diventa più semplice da risolvere se imponiamo che $h(x)$ sia ortogonale all'immagine di $Du(x)$ (cioè al tangente in x dell'immagine di u):

$$h^\alpha \partial_i u^\alpha = 0. \tag{31}$$

In effetti, differenziando la (31) ed usando (30) si vede che il sistema (30,31) è equivalente al sistema (31,32), dove la (32) è

$$-2\, \partial_{ij} u^\alpha \, h^\alpha = w_{ij}. \tag{32}$$

Il vantaggio del sistema (31,32) è che non si tratta più di equazioni differenziali, ma di un sistema lineare di equazioni algebriche nelle incognite h^α. Le incognite sono N, mentre le equazioni (tenuto conto della simmetria) sono $n + n(n+1)/2 = (n^2+3n)/2$. È quindi ragionevole aspettarsi che se $N \geq (n^2+3n)/2$ e se la u è in qualche senso generica, il sistema (31,32) risulta risolubile.

Supponiamo che sia questo il caso, e inoltre che la u sia di classe C^∞. Le funzioni w_{ij} appartengono a C^{*-1}, quindi da (32) dobbiamo aspettarci che anche le h^α siano di classe C^{*-1}, e non più regolari. Perciò h appartiene a $C^{*-1}(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}^N)$ e non a $C^*(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}^N)$ come avremmo voluto. In altri termini, abbiamo una stima $\|h\|_{C^{*-1}} \leq c\|w\|_{C^{*-1}}$, e non la stima $\|h\|_{C^*} \leq c\|w\|_{C^{*-1}}$ di cui avremmo bisogno. L'operatore $DF(x)$ ammette in un certo senso un'inversa destra, ma quest'inversa destra è un operatore non limitato tra gli spazi che ci interessano. Si noti che il problema svanirebbe se fossimo autorizzati a lavorare in spazi C^∞, che però non sono spazi di Banach.

Vedremo come risolvere questa difficoltà nel caso analitico: si suppone cioè che la metrica g su T^n sia una mappa analitica e si cerca un embedding $u : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}^N$ analitico. Quando si lavora con mappe analitiche è utile complessificare gli spazi e lavorare con mappe di variabile complessa.

Complessificazione. La complessificazione del toro $\mathbb{T}^n$ è la varietà complessa $\mathbb{T}^n_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^n/(2\pi\mathbb{Z})^n = \mathbb{T}^n \times i\mathbb{R}^n$. Il toro reale $\mathbb{T}^n$ è dato dagli $z \in \mathbb{T}^n_{\mathbb{C}}$ con parte immaginaria nulla, ed è utile considerare i seguenti intorni aperti del toro reale

$$\mathbb{T}^n(r) = \{z \in \mathbb{T}^n_{\mathbb{C}} \mid |\mathrm{Im}\, z_j| < r \text{ per } 1 \leq j \leq n\}.$$

Supponiamo che $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ sia una funzione analitica (equivalentemente, olomorfa) in un intorno della chiusura del polidisco

$$D = B_{r_1}(w_1) \times \cdots \times B_{r_n}(w_n),$$

dove le $B_{r_j}(w_j)$ sono palle aperte in $\mathbb{C}$ con centro w_j e raggio r_j. Indichiamo con

$$\partial^* D = \left\{z \in \mathbb{C}^n \mid z_j \in \partial B_{r_j}(w_j)\right\}$$

il bordo ridotto di D. Allora vale la seguente formula di Cauchy, facilmente deducibile dalla analoga formula in una variabile: se $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{N}^n$ è un multi-indice, risulta

$$D^h f(z) = \frac{h!}{(2\pi i)^n} \int_{\partial^* D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta_1 - z_1)^{h_1+1} \dots (\zeta_n - z_n)^{h_n+n}}\, d\zeta, \quad \forall z \in D.$$

Qui $h! = (h_1!) \dots (h_n!)$. Dalla formula di Cauchy si deduce facilmente il seguente:

3.1 Lemma. *Per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $c(k,n)$ tale che se $0 < s < r \leq 1$ allora per ogni funzione $f : \mathbb{T}^n(r) \to \mathbb{C}$ analitica risulta*

$$\|f\|_{C^k(\mathbb{T}^n(s))} \leq \frac{c(k,n)}{(r-s)^k} \|f\|_{\infty,r}.$$

Qui e nel seguito, $\|f\|_{\infty,r}$ indica l'estremo superiore di f su $\mathbb{T}^n(r)$.

3.2 Esercizio. *Estendere la stima sopra al caso Hölderiano: dimostrare che per ogni $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in [0,1]$, esiste $c(k,\alpha,n)$ tale che se $0 < s < r \leq 1$ allora per ogni funzione $f : \mathbb{T}^n(r) \to \mathbb{C}$ analitica risulta*

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}(\mathbb{T}^n(s))} \leq \frac{c(k,\alpha,n)}{(r-s)^{k+\alpha}} \|f\|_{\infty,r}.$$

Ogni funzione analitica $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ - o mappa analitica $f : \mathbb{T}^n \to V$ in uno spazio vettoriale reale - si estende in modo unico ad una funzione analitica $f : \mathbb{T}^n(r) \to \mathbb{C}$ - o ad un mappa analitica $f : \mathbb{T}^n(r) \to V \otimes \mathbb{C}$ - se r è sufficientemente piccolo. Il fatto che f fosse a valori reali si traduce nel fatto che la sua estensione soddisfa $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$. Funzioni - o mappe - con questa proprietà si dicono analitiche reali. In particolare, estenderemo la nostra metrica analitica $g : \mathbb{T}^n \to \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ ad una mappa analitica reale $g : \mathbb{T}^n(r) \to \mathrm{Sym}(n, \mathbb{C})$. Qui $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{C})$ indica lo spazio delle matrici complesse $n \times n$ simmetriche (non lo spazio delle matrici Hermitiane).

Siano $X(r)$ e $Y(r)$ gli spazi vettoriali reali

$$X(r) = \left\{u : \mathbb{T}^n(r) \to \mathbb{C}^N \mid u \text{ analitica reale limitata}\right\},$$
$$Y(r) = \{g : \mathbb{T}^n(r) \to \mathrm{Sym}(n, \mathbb{C}) \mid g \text{ analitica reale limitata}\}.$$

Sono entrambi spazi di Banach con la norma dell'estremo superiore $\| \cdot \|_{\infty,r}$ (anche questa è una conseguenza della formula di Cauchy). La mappa $F(u) = Du^T Du$ si estende a questi spazi: per ogni $s < r$ abbiamo una mappa

$$F : X(r) \to Y(s).$$

La restrizione $s < r$ è necessaria perchè le mappe $u \in X(r)$ non hanno necessariamente derivata limitata in $\mathbb{T}^n(r)$. È semplice verificare che F risulta di classe C^∞ tra questi spazi, e

$$DF(u)h = Dh^T Du + Du^T Dh.$$

In effetti, la quadraticità della mappa F implica che

$$F(u + v) = F(u) + DF(u)v + F(v). \tag{33}$$

Inversa destra di DF(u). Sia $u \in X(r)$. Dato $w \in Y(s)$, vorremmo saper trovare h tale che $DF(u)h = w$. La mappa h deve dunque risolvere l'equazione

$$Dh^T Du + Du^T Dh = w.$$

Come abbiamo visto in precedenza, questa equazione risulta più semplice da risolvere se imponiamo un ulteriore restrizione su h, chiedendo che in ogni punto h sia ortogonale all'immagine di Du. Otteniamo così un sistema di equazioni lineari differenziali in h, che in coordinate si scrive come

$$\begin{cases} \partial_i u^\nu h^\nu = 0, \\ \partial_i h^\nu \partial_j u^\nu + \partial_i u^\nu \partial_j h^\nu = w_{ij}, \end{cases}$$

che risulta equivalente al sistema di equazioni lineari algebriche in h,

$$\begin{cases} \partial_i u^\nu h^\nu = 0, \\ -2\partial_{ij} u^\nu h^\nu = w_{ij}, \end{cases} \tag{34}$$

Si tratta di un sistema in N incognite e $n + n(n + 1)/2 = (n^2 + 3n)/2$ equazioni (tenendo conto della simmetria). Questo sistema è cioè della forma

$$E(z)h(z) = \hat{w}(z),$$

dove $E(z)$ è una matrice con $(n^2+3n)/2$ righe e N colonne, i cui coefficienti sono funzioni analitiche reali che dipendono dalle derivate prime e seconde di u, e $\hat{w}(z)$ è il vettore composto da n zeri seguiti dagli $n(n + 1)/2$ coefficienti $w_{ij}(z)$, $i \leq j$.

3.3 Definizione. *Diciamo che la mappa $u : \mathbb{T}^n(r) \to \mathbb{C}^N$ è non-degenere (su $\mathbb{T}^n(r)$) se per ogni $z \in \mathbb{T}^n(r)$ la matrice $E(z)$ ha rango $(n^2 + 3n)/2$.*

In altre parole, stiamo chiedendo che l'operatore $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{(n^2+3n)/2}$ definito da $E(z)$ sia surgettivo. Chiaramente, questo è possibile soltanto se $N \geq (n^2+3n)/2$. Inoltre, se $u : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}^N$ è non degenere e $v : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}^M$ è qualsiasi, allora

$$u \oplus v : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}^{N+M}, \quad x \mapsto (u(x), v(x)),$$

è non-degenere. Si osservi anche che se $u : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}^N$ è analitica e non-degenere, allora anche la sua estensione $u : \mathbb{T}^n(r) \to \mathbb{C}^N$ resta non-degenere per r sufficientemente piccolo (la condizione di non-degenerazione è aperta per la topologia C^2).

3.4 ESERCIZIO. *Sia $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ surgettiva e sia $\eta \in \mathbb{R}^m$. Allora la formula*

$$\xi = A^T (AA^T)^{-1} \eta$$

fornisce la soluzione ξ di norma euclidea minima di $A\xi = \eta$.

Se u è non-degenere, il sistema (34) è risolubile per ogni w: per l'Esercizio 3.4 possiamo infatti prendere

$$h(z) = E(z)^T (E(z)E(z)^T)^{-1} \hat{w}(z).$$

Quindi possiamo definire un'inversa destra $R(u)$ di $DF(u)$ tramite

$$R(u)w = E(z)^T (E(z)E(z)^T)^{-1} \hat{w}(z).$$

La linearità è immediata. Dato che $u \in X(r)$, le sue derivate prime e seconde non saranno necessariamente limitate su $\mathbb{T}^n(r)$, però lo saranno su $\mathbb{T}^n(s)$ per $s < r$. Quindi i coefficienti di $E(z)^T (E(z)E(z)^T)^{-1}$ risultano limitati su $\mathbb{T}^n(s)$, e l'operatore $R(u)$ risulta continuo da $Y(s)$ a $X(s)$:

$$R(u) \in L(Y(s), X(s)), \quad \forall s < r.$$

Anzi, per il Lemma 3.1 la norma C^2 di u su $\mathbb{T}^n(s)$ si controlla con l'estremo superiore di u su $\mathbb{T}^n(r)$. Finchè s è discosto da r, i coefficienti di $E(z)^T (E(z)E(z)^T)^{-1}$ restano uniformemente limitati in $\mathbb{T}^n(s)$ e se $v \in X(s)$ è una perturbazione C^2 piccola di u in $\mathbb{T}^n(s)$ i coefficienti di $E_v(z)^T (E_v(z)E_v(z)^T)^{-1}$ sono anch'essi uniformemente limitati. Riassumiamo queste informazioni nel seguente:

3.5 LEMMA. *Siano $0 < r_1 < r_0$, e sia $u \in X(r_0)$ un embedding non-degenere. Allora esistono $\epsilon > 0$ e $C \geq 0$ tali che per ogni $s \in (0, r_1]$ e $v \in X(s)$ con $\|v - u\|_{C^2(\mathbb{T}^n(s))} < \epsilon$, v è un embedding non-degenere su $\mathbb{T}^n(s)$ e*

$$\|R(v)w\|_{\infty,s} \leq C \|w\|_{\infty,s}.$$

Infatti, la proprietà di embedding si mantiene per perturbazioni C^1-piccole.

Esistenza di embedding non-degeneri. Mostriamo adesso che esistono effettivamente embedding analitici $\mathbb{T}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ non-degeneri. Partiamo da un embedding analitico qualsiasi u_0, ad esempio

$$u_0 : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}^{2n}, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto (\cos x_1, \sin x_1, \dots, \cos x_n, \sin x_n).$$

Questo embedding non è sicuramente non-degenere, ad esempio perchè la dimensione dello spazio di arrivo è troppo bassa. Definiamo poi l'embedding analitico

$$v_k : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{(k^2+3k)/2}, \quad (y_1, \dots, y_k) \mapsto (y_1, \dots, y_k, y_1^2, y_1 y_2, \dots, y_i y_j \ (i \leq j), \dots, y_k^2).$$

L'embedding v_k è non-degenere. Infatti la matrice E ad esso associata è della forma

$$E = \begin{pmatrix} I & * \\ 0 & I \end{pmatrix}, \tag{35}$$

dove il blocco in alto a sinistra è $k \times k$, quello in basso a destra è $k(k+1)/2 \times k(k+1)/2$. Si noti che la dimensione dello spazio di arrivo in questo caso è la minima consentita per l'esistenza di una mappa non-degenere. Si noti inoltre che se $\mathbb{R}^h$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^k$ composto da h delle k coordinate, allora la restrizione di v_k a $\mathbb{R}^h$ è data da v_h, composto con l'opportuna immersione di $\mathbb{R}^{(h^2+3h)/2}$ in $\mathbb{R}^{(k^2+3k)/2}$.

Affermiamo che l'embedding $v_{2n} \circ u_0 : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}^{2n^2+3n}$ è non-degenere. Infatti, fissato $x \in \mathbb{T}^n$ esistono n indici $i_1 < \cdots < i_n$ tra 1 e $2n$ tali che la mappa

$$\mathbb{T}^n \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto (u_0^{i_1}(x), \ldots, u_0^{i_n}(x)),$$

sia un diffeomorfismo locale in x. Se componiamo questa mappa con v_n troviamo un embedding non-degenere in un intorno di x (se pensiamo alle u^{i_j} come coordinate locali su $\mathbb{T}^n$, la matrice E ha ancora la forma (35)). Quindi un sottoinsieme delle componenti della mappa $v_{2n} \circ u_0$ definisce un embedding non-degenere in un intorno di x, e a maggior ragione $v_{2n} \circ u_0$ è non-degenere in tale intorno. L'arbitrarietà di x permette di concludere.

Perturbazioni analitiche. Mostreremo che se una metrica analitica g_0 è realizzata da un embedding analitico non-degenere u_0 (cioè $F(u_0) = g_0$), allora tutte le metriche analitiche sufficientemente vicine a g_0 sono realizzabili da qualche embedding, anche se con dominio di analiticità più piccolo. Più precisamente, vale il seguente:

3.6 Teorema. *Sia $u_0 \in X(r_0)$ una mappa non-degenere, con $F(u_0) = g_0$. Allora esiste $\delta = \delta(u_0) > 0$ tale che per ogni $g \in Y(3r_0/4)$ con $\|g - g_0\|_{\infty,3r_0/4} < \delta$ esiste $u \in X(r_0/2)$ che realizza $F(u) = g$. Se inoltre u_0 è un embedding, anche u risulterà un embedding.*

Dimostrazione. Vorremmo trovare la u come limite della successione definita ricorsivamente dall'algoritmo di Newton

$$u_{k+1} = u_k - R(u_k)(F(u_k) - g) \tag{36}$$

a partire dalla mappa u_0. Dato che l'inversa destra $R(v)$ è definita soltanto per le v non-degeneri, è necessario preoccuparsi, oltre che della convergenza, anche della buona definizione di questa successione.

Definiamo la successione decrescente $\mu_k = r_0/2(1 + 2^{-k})$: $\mu_0 = r_0$, $\mu_1 = 3r_0/4$, e (μ_k) tende a $r_0/2$. Dimostriamo per induzione su k le seguenti affermazioni:

A(k): u_j è non degenere su $\mathbb{T}^n(\mu_{j+1})$, per $0 \le j \le k-1$;

B(k): $u_j \in X(\mu_j)$, per $0 \le j \le k$;

C(k): $\|u_j - u_{j-1}\|_{\infty,\mu_j} \le \lambda 2^{-3j}$, per $1 \le j \le k$.

Qua λ è un numero positivo piccolo, la cui grandezza sarà stabilita nel corso della dimostrazione.

Per $k = 0$ l'unica affermazione da verificare è la B(0), che vale per ipotesi. Supponiamo che le A(k), B(k), C(k) valgano per un certo $k \in \mathbb{N}$. Mostriamo che u_k è ancora non-degenere, come richiesto da A(k+1). Se $k = 0$, A(k+1)=A(1) è vera per ipotesi, quindi assumiamo $k \ge 1$. Dal Lemma 3.5 sappiamo che esistono $\epsilon > 0$ e $C \ge 0$ tali che

$$\begin{array}{lcl} r \le 3r_0/4,\ u \in X(r), & \Longrightarrow & u \text{ non-degenere, e} \\ \|u - u_0\|_{C^2(\mathbb{T}^n(r))} < \epsilon, & & \|R(u)w\|_{\infty,r} \le C\|w\|_{\infty,r}. \end{array} \tag{37}$$

Dobbiamo quindi stimare la distanza C^2 tra u_k e u_0 su $\mathbb{T}^n(\mu_{k+1})$. Indicheremo con $C_1, C_2, \ldots$ quelle costanti che non ci interesserà specificare ulteriormente. Per il Lemma 3.1,

$$\|u_k - u_0\|_{C^2(\mathbb{T}^n(\mu_{k+1}))} \le \sum_{j=1}^{k} \|u_j - u_{j-1}\|_{C^2(\mathbb{T}^n(\mu_{j+1}))}$$

$$\le \sum_{j=1}^{\infty} \frac{C_1}{(\mu_j - \mu_{j+1})^2} \|u_j - u_{j-1}\|_{\infty,\mu_j} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{C_1}{r_0^2} 2^{2(j+2)} \|u_j - u_{j-1}\|_{\infty,\mu_j}.$$

Quindi, per l'ipotesi induttiva C(k),

$$\|u_k - u_0\|_{C^2(\mathbb{T}^n(\mu_{k+1}))} \leq C_2\lambda \sum_{j=1}^{\infty} 2^{2j}2^{-3j} \leq 2C_2\lambda,$$

e questo numero è minore di ϵ se λ è sufficientemente piccolo. Questo prova A(k+1).

Il fatto che u_k sia non-degenere assicura l'esistenza di $R(u_k)$, e dunque u_{k+1} è ben definito. Dato che $u_k \in X(\mu_k)$, $F(u_k) - g$ appartiene a $Y(\mu_{k+1})$, perciò $R(u_k)(F(u_k) - g)$ e quindi u_{k+1} appartengono a $X(\mu_{k+1})$. Questo prova B(k+1).

Per la (37), $\|R(u_k)\|_{L(Y(\mu_{k+1}),X(\mu_{k+1}))} \leq C$, quindi

$$\|u_{k+1} - u_k\|_{\infty,\mu_{k+1}} = \|R(u_k)(F(u_k) - g)\|_{\infty,\mu_{k+1}} \leq C\|F(u_k) - g\|_{\infty,\mu_{k+1}}. \tag{38}$$

Dimostriamo prima C(k+1) per $k \geq 1$, lasciando alla fine il compito di provare la stima C(1). Dalla quadraticità di F (33) segue che

$$F(u_k) = F(u_{k-1} + (u_k - u_{k-1})) = F(u_{k-1}) + DF(u_{k-1})(u_k - u_{k-1}) + F(u_k - u_{k-1}).$$

Dalla definizione dell'algoritmo di Newton (36) e dal fatto che R è un'inversa destra di DF, si ha $DF(u_{k-1})(u_k - u_{k-1}) = g - F(u_{k-1})$, perciò

$$F(u_k) - g = F(u_k - u_{k-1}).$$

Dato che $F(u)$ è quadratica nelle derivate prime di u, vale la stima

$$\|F(u_k - u_{k-1})\|_{\infty,\mu_{k+1}} \leq C_3\|u_k - u_{k-1}\|^2_{C^1(\mathbb{T}^n(\mu_{k+1}))}.$$

Quindi (38) e il Lemma 3.1 implicano

$$\begin{aligned} &\|u_{k+1} - u_k\|_{\infty,\mu_{k+1}} \leq C_4\|u_k - u_{k-1}\|^2_{C^1(\mathbb{T}^n(\mu_{k+1}))} \\ \leq \frac{C_5}{(\mu_k - \mu_{k+1})^2}&\|u_k - u_{k-1}\|^2_{\infty,\mu_k} = \frac{C_5}{r_0^2}2^{2(k+2)}\|u_k - u_{k-1}\|^2_{\infty,\mu_k}. \end{aligned}$$

Dalla C(k) ricaviamo allora

$$\|u_{k+1} - u_k\|_{\infty,\mu_{k+1}} \leq C_6 2^{2k}\lambda^2 2^{-6k} = C_6\lambda^2 2^{-4k}.$$

Per avere C(k+1) si vuole che l'ultimo numero non superi $\lambda 2^{-3k}$, e questo vale se λ è sufficientemente piccolo.

Avendo finalmente fissato quanto piccolo deve essere λ, verifichiamo che se g è abbastanza vicino a g_0 vale C(1). Infatti per (38)

$$\|u_1 - u_0\|_{\infty,\mu_1} \leq C\|F(u_0) - g)\|_{\infty,\mu_1} = C\|g_0 - g\|_{\infty,3r_0/4},$$

e se $\delta > 0$ è sufficientemente piccolo $\|g - g_0\|_{\infty,3r_0/4} < \delta$ implica $\|u_1 - u_0\| \leq \lambda 2^{-3}$.

Se $u_0 \in X(r_0)$ è un embedding e $u \in X(r_0/2)$ è sufficientemente vicino a u_0 in norma $C^1(\mathbb{T}^n(r_0/2))$, allora anche u è un embedding. Allora l'ultima affermazione del teorema segue dal fatto che, prendendo eventualmente λ - e conseguentemente δ - ancora più piccolo, la C(k) e il Lemma 3.1 ci dicono che la u è vicina a u_0 in norma C^1 quanto vogliamo:

$$\begin{aligned} \|u - u_0\|_{C^1(\mathbb{T}^n(r_0/2))} &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \|u_j - u_{j-1}\|_{C^1(\mathbb{T}^n(r_0/2))} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{C_7}{\mu_j - r_0/2}\|u_j - u_{j-1}\|_{\infty,\mu_j} \\ &= \frac{C_7}{r_0}\sum_{j=1}^{\infty} 2^{j+1}\|u_j - u_{j-1}\|_{\infty,\mu_j} \leq \frac{C_7}{r_0}\sum_{j=1}^{\infty} 2^{j+1}\lambda 2^{-3j} \leq C_8\lambda. \end{aligned}$$

Questo conclude la dimostrazione del teorema. □

3.7 OSSERVAZIONE. *Estendere questo risultato dal toro ad una varietà compatta qualsiasi M non richiede nuove idee, ma soltanto il giusto linguaggio tecnico. Si tratta inizialmente di definire la complessificazione $M_{\mathbb{C}}$ di M. Qua si usa un teorema di Whitney sull'esistenza di una struttura analitica su M, e poi si costruisce $M_{\mathbb{C}}$ complessificando i singoli domini delle carte ed incollando tutto grazie alle mappe di transizione analitiche. Si trova una varietà complessa che è in ingrossamento di raggio r_0 di M (in generale si ha $r_0 < +\infty$, dato che r_0 è legato al raggio di convergenza delle mappe di transizione). A questo punto una metrica analitica su M può essere vista come una sezione del fibrato delle 2-forme simmetriche reali su un intorno di M in $M_{\mathbb{C}}$, e l'equazione differenziale che deve soddisfare un embedding u per essere isometrico risulta un'equazione a valori in questo fibrato.*

Il teorema appena dimostrato fornisce una proprietà di apertura dell'insieme delle metriche analitiche realizzabili da embedding. Per dimostrare che effettivamente tutte le metriche analitiche sono realizzabili sono necessari argomenti geometrici che qui non tratteremo. Si veda [GJ71] per una dimostrazione completa del fatto che ogni varietà compatta munita di una metrica analitica si immerge analiticamente in qualche spazio Euclideo.

Perturbazioni di classe $\mathbf{C}^{\mathbf{k},\alpha}$. Accenniamo qui, senza dimostrazioni, a come sia possibile estendere il Teorema 3.6 a metriche di classe $C^{k,\alpha}$, $k \geq 2$ e $\alpha \in (0,1)$. Si veda [Jac72]. Il caso C^k, $k \geq 3$, è trattato invece, ma in maniera più complicata, nell'articolo originale di Nash [Nas56].

Il punto di partenza è costituito dal seguente risultato sull'approssimazione di funzioni $C^{k,\alpha}$ mediante funzioni analitiche:

3.8 TEOREMA. *Esiste una mappa $H : C^0(\mathbb{T}^n) \to \prod_{j=0}^{\infty} X(2^{-j})$ che a $f \in C^0(\mathbb{T}^n)$ associa $H(f) = (f_0, f_1, f_2, \dots)$, $f_j \in X(2^{-j})$, con le seguenti proprietà: $f_0 = 0$, $f_j \to f$ in $C^0(\mathbb{T}^n)$, e se $f \in C^{k,\alpha}(\mathbb{T}^n)$, $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0,1)$, allora*

$$\|f_j - f_{j-1}\|_{\infty, 2^{-j}} \leq \frac{C(k,\alpha)}{2^{j(k+\alpha)}} \|f\|_{C^{k,\alpha}(\mathbb{T}^n)}.$$

Viceversa, se una successione (f_j) verifica $f_j \in X(2^{-j})$ e

$$\|f_j - f_{j-1}\|_{\infty, 2^{-j}} \leq \frac{K}{2^{j(k+\alpha)}},$$

allora esiste $f \in C^{k,\alpha}(\mathbb{T}^n)$ tale che $f_j \to f$ in $C^{k,\alpha-\epsilon}(\mathbb{T}^n)$, per ogni $\epsilon \in (0,\alpha]$.

3.9 ESERCIZIO. *Dimostrare la seconda parte (il viceversa) del teorema sopra.*

Combinando questo risultato di approssimazione con l'argomento di iterazione alla Nash-Moser utilizzato nel Teorema 3.6 (ma con stime più quantitative), si dimostra la seguente estensione del Teorema 3.6 al caso $C^{k,\alpha}$:

3.10 TEOREMA. *Sia $u_0 : T^n \to \mathbb{R}^N$ un embedding analitico non-degenere, e sia $g_0 = F(u_0)$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, e $\alpha \in (0,1)$, esiste un $\delta = \delta(k,\alpha) > 0$ tale che per ogni metrica g di classe $C^{k,\alpha}(\mathbb{T}^n)$ con $\|g - g_0\|_{C^{k,\alpha}(\mathbb{T}^n)} < \delta$, esiste un embedding $u \in C^{k,\alpha}(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}^N)$ tale che $F(u) = g$.*

L'idea è quella di approssimare la metrica g con una successione di metriche analitiche (g_j), grazie al Teorema 3.8, di usare la vicinanza di g_j a g_0 per trovare embedding analitici u_j (con domini sempre più piccoli) tali che $F(u_j) = g_j$, ed infine di ottenere u come limite di (u_j).

Il Teorema 3.10 contiene più o meno tutta l'analisi necessaria a dimostrare il teorema di immersione di Nash. Gli argomenti necessari per concludere sono di natura geometrica. L'osservazione importante è che se gli embedding $u : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}^N$ e $v : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}^M$ realizzano le metriche g e h, allora l'embedding

$$u \oplus v : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}^{N+M}, \quad x \mapsto (u(x), v(x)),$$

realizza la metrica $g + h$. In altre parole, $F(u \oplus v) = F(u) + F(v)$.

Sia g la metrica che vogliamo realizzare con un embedding. Si parte da un qualsiasi embedding analitico non-degenere u_0, che realizza la metrica g_0. A meno di riscalamenti, possiamo supporre che g_0 sia cosí piccola che $g - g_0$ sia ancora una metrica. A questo punto si trova un embedding u_1 tale che $F(u_1) + g_0$ sia vicino a g. Qua si usa un risultato dello stesso Nash [Nas54] (ma vedi anche [Kui55]) sull'esistenza di embedding isometrici di classe C^1. Infine, grazie al fatto che u_0 è non-degenere, si usa il Teorema 3.10 per perturbare l'embedding $u_0 \oplus u_1$ - che realizza la metrica $F(u_1) + g_0$ - in modo da realizzare g. Il risultato finale è il seguente:

3.11 TEOREMA. *Sia g una metrica di classe $C^{k,\alpha}$ su $\mathbb{T}^n$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $\alpha \in (0,1)$. Se N è sufficientemente grande, g è realizzata da un embedding $u \in C^{k,\alpha}(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}^N)$.*

Questo teorema vale in realtà per varietà qualsiasi, anche non compatte. Lavorare con varietà qualsiasi porta ad alcune complicazioni tecniche (le metriche non sono più mappe a valori in uno spazio vettoriale, ma sezioni di un fibrato, la complessificazione della varietà richiede una costruzione più laboriosa, ecc.), ma le idee sono sostanzialmente le stesse.

La stima sulla dimensione dello spazio Euclideo trovata da Nash nel caso compatto è $n/2(3n + 11)$. Nel lavoro di Nash si trova anche una stima (peggiore) per il caso non compatto, ma l'argomento contiene un errore (sistemabile). Il lavoro di Gromov [Gro86] ha però mostrato come ottenere nel caso non compatto la stessa stima sulla dimensione del caso compatto.

3.12 ESERCIZIO. *Si consideri la mappa*

$$F : C^\infty([-1,1]) \to C^\infty([-1,1]), \quad F(u)(x) = u(x) - xu(x)u'(x).$$

Si verifichi che il differenziale di F in 0 è l'identità (differenziale formale, o per chi conosce la definizione di differenziale di una mappa tra spazi di Frechet, differenziale vero). Si mostri però che la mappa F non è localmente aperta in 0: le funzioni $v_n(x) = 1/n + x^n/n!$ tendono uniformemente a 0 con tutte le derivate in $[-1,1]$, ma v_n non appartiene all'immagine di F.

Riferimenti bibliografici

[GJ71] R. Greene and H. Jacobowitz, *Analytic isometric embeddings*, Ann. of Math. **93** (1971), 189–204.

[Gro86] M. Gromov, *Partial differential relations*, Springer, New York, 1986.

[Jac72] H. Jacobowitz, *Implicit function theorems and isometric embeddings*, Ann. of Math **95** (1972), 191–225.

[Kui55] N. H. Kuiper, *On C^1 isometric imbeddings*, Proc. Kon. Ac. Wet. Amsterdam A **58** (1955), 545–556, (Indagationes Mathematicae).

[Nas54] J. Nash, *C^1 isometric imbeddings*, Ann. of Math. **60** (1954), 383–396.

[Nas56] ———, *The imbedding problem for Riemannian manifolds*, Ann. of Math. **63** (1956), 20–63.