

## 2.8 Il Problema di Plateau: soluzione

Torniamo al problema di Plateau per grafici di funzioni, come discusso nella sezione 2.6. Dato  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  aperto limitato di classe  $C^\infty$  e  $g \in C^\infty(\partial\Omega)$ , cerchiamo  $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$  che risolva l'equazione per le superfici minime

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0,$$

e tale che  $u|_{\partial\Omega} = g$ .

Forti dei risultati enunciati nella sezione 2.7, diamo al problema di Plateau l'impostazione funzionale seguente. Fissiamo  $\alpha \in (0, 1)$ , e definiamo

$$G : C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \rightarrow C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) \times C^{2,\alpha}(\partial\Omega), \quad G(u) = (F(u), u|_{\partial\Omega}),$$

$$F(u) = (1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy}.$$

Risolvere il problema di Plateau per una data  $g \in C^{2,\alpha}(\Omega)$  significa trovare  $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$  tale che  $G(u) = (0, g)$ .

**Regolarità.** Abbiamo enunciato il problema di Plateau nella categoria  $C^\infty$ , ma stiamo cercando soluzioni solo di classe  $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ . Mostriamo che se  $g \in C^\infty(\partial\Omega)$  e  $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$  risolve  $G(u) = (0, g)$ , allora in effetti  $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ .

Possiamo vedere l'equazione non lineare  $F(u) = 0$  come un'equazione lineare con coefficienti variabili  $Lu = 0$ , dove  $L$  è l'operatore differenziale del secondo ordine su  $\Omega$ ,

$$L = a^{ij} \partial_{ij}, \quad \text{con } (a^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 + u_y^2 & -u_x u_y \\ -u_x u_y & 1 + u_x^2 \end{pmatrix}.$$

Dato che per ogni  $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) = (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$  si ha

$$a^{ij} \zeta_i \zeta_j = (1 + u_y^2)\xi^2 - 2u_x u_y \xi \eta + (1 + u_x^2)\eta^2 = \xi^2 + \eta^2 + (u_y \xi - u_x \eta)^2 \geq \xi^2 + \eta^2 = |\zeta|^2, \quad (17)$$

l'operatore  $L$  è ellittico (con  $\lambda = 1$ ). I coefficienti  $a^{ij}$  appartengono a  $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ , quindi, dato che  $g$  e  $\Omega$  sono di classe  $C^\infty$ , il Teorema di regolarità fino al bordo 2.17 implica che  $u \in C^{3,\alpha}(\bar{\Omega})$ . Ma allora i coefficienti  $a^{ij}$  appartengono a  $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ , e lo stesso teorema implica che  $u \in C^{4,\alpha}(\bar{\Omega})$ . Iterando questo argomento, concludiamo che  $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ . Questo risultato di regolarità a priori delle soluzioni permette di cercare la  $u$  in  $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ .

**Proprietà locali della mappa  $G$ .** Le mappe  $F$  e  $G$  risultano di classe  $C^\infty$  (sono polinomi), e

$$DG(u)h = (DF(u)h, h|_{\partial\Omega}), \quad \forall (u, h) \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \times C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}),$$

$$DF(u)h = (1 + u_y^2)h_{xx} - 2u_x u_y h_{xy} + (1 + u_x^2)h_{yy} + 2(u_x u_{yy} - u_y u_{xy})h_x + 2(u_y u_{xx} - u_x u_{xy})h_y.$$

Quindi per ogni  $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ ,  $DF(u)$  è un operatore differenziale lineare del secondo ordine della forma

$$DF(u) = a^{ij} \partial_{ij} + b^i \partial_i,$$

dove i coefficienti

$$(a^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 + u_y^2 & -u_x u_y \\ -u_x u_y & 1 + u_x^2 \end{pmatrix}, \quad (b^i) = \begin{pmatrix} u_x u_{yy} - u_y u_{xy} \\ u_y u_{xx} - u_x u_{xy} \end{pmatrix},$$

appartengono a  $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$  (in effetti,  $a^{ij} \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ ). Per la (17), l'operatore  $DF(u)$  è ellittico per ogni  $u$ . Dato che questo operatore non possiede il termine di ordine 0, per il Teorema 2.18

$$DG(u) : C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \rightarrow C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) \times C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$$

è un isomorfismo per ogni  $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ .

Il teorema della funzione inversa implica allora che  $G$  è un diffeomorfismo locale. In particolare, potremmo già trarre conclusioni sul caso perturbativo del problema di Plateau: dato che ogni funzione affine  $u_0$  è soluzione, se  $g \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$  è sufficientemente vicina a  $u_0|_{\partial\Omega}$  in norma  $C^{2,\alpha}$ , allora esiste unica  $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$  vicina in norma  $C^{2,\alpha}$  a  $u_0$  che risolve  $F(u) = 0$  e  $u|_{\partial\Omega} = g$ .

**Confronto di soluzioni.** Supponiamo che  $u, v \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$  siano tali che  $F(u) = F(v)$  e  $u \leq v$  su  $\partial\Omega$ . Vogliamo dimostrare che allora  $u \leq v$  su tutto  $\overline{\Omega}$ . Dal fatto che  $F(u) - F(v) = 0$  ricaviamo che la funzione  $w = u - v$  risolve l'equazione

$$(1+u_y^2)w_{xx} - 2u_xu_yw_{xy} + (1+u_x^2)w_{yy} + (u_xv_{yy} + v_xv_{yy} - 2u_yv_{xy})w_x + (u_yv_{xx} + v_yv_{xx} - 2v_xv_{xy})w_y = 0,$$

con condizione al bordo  $w \leq 0$ . Si tratta ancora una volta di un'equazione ellittica del secondo ordine senza termine di ordine 0 e con coefficienti del termine del primo ordine limitati, quindi il principio del massimo debole (Teorema 2.12) implica che  $w \leq 0$  su tutto  $\overline{\Omega}$ , come volevamo dimostrare.

Quindi se  $G(u) = G(v)$  allora  $u = v$ , perciò  $G$  è iniettiva. In particolare, il problema di Plateau ha al più una soluzione in  $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ .

**Esistenza di soluzioni.** Se  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  è un dominio qualsiasi (limitato e  $C^\infty$ ), il problema di Plateau per grafici non ha soluzione per alcuni dati  $g \in C^\infty(\partial\Omega)$ . Sono necessarie ipotesi aggiuntive sulla geometria di  $\Omega$ . Qui supporremo che  $\Omega$  sia *fortemente convesso*:  $\partial\Omega$  è localmente il grafico di funzioni  $\varphi$  con  $\varphi'' > 0$ . È facile verificare che allora  $\Omega$  deve essere convesso.

Vediamo come si può impostare la questione dell'esistenza. Dato che  $G$  è un diffeomorfismo sulla sua immagine, il chiuso

$$M = \{u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \mid F(u) = 0\} = G^{-1}(\{0\}) \times C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$$

è una sottovarietà di  $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ , non vuota in quanto contiene almeno le funzioni affini. Inoltre la restrizione di  $G$  a  $M$  produce la mappa

$$M \rightarrow C^{2,\alpha}(\partial\Omega), \quad u \mapsto u|_{\partial\Omega}, \quad (18)$$

che risulta essere un diffeomorfismo sulla sua immagine, in particolare una mappa aperta. Ci basta dimostrare che l'immagine di (18) è anche chiusa.

Supponiamo di saper dimostrare la seguente stima a priori: *per ogni  $c \geq 0$  esiste  $\beta \in (0, 1)$  tale che le soluzioni  $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$  di  $F(u) = 0$  con  $\|u|_{\partial\Omega}\|_{C^{2,\alpha}(\partial\Omega)} \leq c$  sono equilimitate in  $C^{2,\beta}(\overline{\Omega})$* . Mostriamo che allora l'immagine della mappa (18) è chiusa. Se  $(u_n) \subset M$  e  $u_n|_{\partial\Omega} \rightarrow g$  in  $C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ , dalla stima a priori segue che  $(u_n)$  è equilimitata in  $C^{2,\beta}(\overline{\Omega})$  per qualche  $\beta \in (0, 1)$ . Dunque, a meno di sottosuccessioni,  $(u_n)$  converge ad una certa  $u$  in norma  $C^2(\overline{\Omega})$ . Perciò  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  risolve

$$\begin{cases} (1+u_y^2)u_{xx} - 2u_xu_yu_{xy} + (1+u_x^2)u_{yy} = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = g. \end{cases}$$

Dato che  $g \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ , e dato che i coefficienti  $(1+u_y^2)$ ,  $u_xu_y$ , e  $(1+u_x^2)$  stanno in  $C^1(\overline{\Omega}) \subset C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ , il Teorema di regolarità fino al bordo 2.17 implica che  $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ . Dunque  $u \in M$  e  $g$  appartiene all'immagine della mappa (18), che risulta perciò chiusa.

**Stima a priori.** Sia  $u \in M$  ed indichiamo con  $g$  la restrizione di  $u$  a  $\partial\Omega$ . Dobbiamo stimare la norma  $C^{2,\beta}(\overline{\Omega})$  di  $u$  in termini della norma  $C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$  di  $g$ . La  $u$  risolve un'equazione lineare ellittica a coefficienti variabili senza termini di ordine 0 e 1, quindi per il principio del massimo  $u$  assume massimo e minimo su  $\partial\Omega$ . Dunque

$$\|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} \leq \|g\|_{C^0(\partial\Omega)}. \quad (19)$$

Cerchiamo ora di stimare  $\|\nabla u\|_{C^0(\overline{\Omega})}$  in termini di  $\|g\|_{C^2(\partial\Omega)}$ . È in questa stima che faremo uso della forte convessità di  $\Omega$ . La funzione  $f = |\nabla u|^2$  soddisfa

$$\begin{aligned} (1+u_y^2)f_{xx} - 2u_xu_yf_{xy} + (1+u_x^2)f_{yy} + 2\Delta u(u_xf_x + u_yf_y) \\ = (1+|\nabla u|^2)(u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2) + |\nabla f|^2. \end{aligned}$$

Perciò  $f$  soddisfa una relazione del tipo  $Lf \geq 0$ , dove  $L$  è un operatore ellittico senza termine di ordine 0 (e con il termine di ordine 1 limitato). Per il principio del massimo  $f$  assume massimo su  $\partial\Omega$ . Dunque è sufficiente stimare  $\|\nabla u\|_{C^0(\partial\Omega)}$ . Mostriamo che è possibile stimare questa quantità in termini di  $\|g\|_{C^2(\partial\Omega)}$ .

La derivata tangenziale di  $u$  in un punto di  $\partial\Omega$  coincide ovviamente con quella di  $g$ , pertanto si tratta di stimare la derivata normale di  $u$ . Sia  $(x_0, y_0) \in \partial\Omega$  un punto dove il modulo della derivata normale di  $u$  è massimo. A meno di un'isometria di  $\mathbb{R}^2$ , possiamo supporre che  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  e che la retta tangente a  $\partial\Omega$  in  $(0, 0)$  sia l'asse delle  $x$ . Essendo fortemente convesso,  $\Omega$  giace interamente in uno dei due semipiani individuati dall'asse delle  $x$  - diciamo nel semipiano  $\{y > 0\}$  - ed esiste  $\epsilon > 0$  tale che

$$y \geq \epsilon x^2, \quad \forall (x, y) \in \bar{\Omega}. \quad (20)$$

Il nostro scopo è stimare  $|u_y(0, 0)|$  in termini di  $\|g\|_{C^2(\partial\Omega)}$ .

Sia  $\delta > 0$  tale che la porzione di  $\partial\Omega$  nel quadrato  $\{|x| \leq \delta, |y| \leq \delta\}$  sia il grafico di una funzione  $\varphi : [-\delta, \delta] \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^\infty$ , e tale che  $|\varphi'| \leq 1$ . Per le nostre ipotesi,  $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ . Poniamo  $\tilde{u}(x) = u(x, \varphi(x))$ . È facile verificare che la norma  $C^2$  di  $\tilde{u}$  su  $[-\delta, \delta]$  si controlla con la norma  $C^2$  di  $g$  su  $\partial\Omega$  (si veda l'Osservazione 2.14). La formula di Taylor con resto di Lagrange

$$\tilde{u}(x) = \tilde{u}(0) + \tilde{u}'(0)x + \frac{1}{2}\tilde{u}''(\xi)x^2,$$

si riscrive come

$$u(x, \varphi(x)) = u(0, 0) + u_x(0, 0)x + \frac{1}{2}\tilde{u}''(\xi)x^2.$$

Dunque,

$$|u(x, y) - u(0, 0) - u_x(0, 0)x| \leq C_0 x^2, \quad \forall (x, y) \in \text{graf } \varphi,$$

dove la costante  $C_0$  dipende soltanto da  $\|g\|_{C^2(\partial\Omega)}$ . Vogliamo aggiungere termini a destra di questa disuguaglianza in modo che essa valga per ogni  $(x, y) \in \partial\Omega$ . Osserviamo che la quantità a sinistra è uniformemente limitata per la (19). Inoltre per la (20), l'insieme  $\partial\Omega \setminus \text{graf } \varphi$  è contenuto nel semipiano  $y \geq \epsilon\delta^2$ . Quindi esiste una costante  $C$ , ancora dipendente solamente da  $\|g\|_{C^2(\partial\Omega)}$ , tale che

$$|u(x, y) - u(0, 0) - u_x(0, 0)x| \leq C(x^2 + y), \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega. \quad (21)$$

La funzione affine

$$v(x, y) := u(0, 0) + u_x(0, 0)x + C\left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right)y,$$

risolve l'equazione delle superfici minime. Per (20) e (21) risulta

$$v(x, y) \geq u(0, 0) + u_x(0, 0)x + C(y + x^2) \geq u(x, y), \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega.$$

Per l'argomento di confronto,  $v \geq u$  su tutto  $\bar{\Omega}$ . Dato che  $v(0, 0) = u(0, 0)$ , si deve avere  $u_y(0, 0) \leq v_y(0, 0)$ , cioè

$$u_y(0, 0) \leq C\left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right).$$

L'analogo ragionamento di confronto con la funzione affine

$$v(x, y) := u(0, 0) + u_x(0, 0)x - C\left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right)y,$$

mostra che

$$u_y(0, 0) \geq -C\left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right).$$

Concludiamo che  $|u_y(0, 0)|$ , e dunque  $\|\nabla u\|_{C^0(\bar{\Omega})}$ , è limitato in termini di  $\|g\|_{C^2(\partial\Omega)}$ .

Abbiamo quindi una stima  $C^1$  per  $u$ . La teoria della regolarità ellittica in dimensione 2 ci permetterà di arrivare ad una stima  $C^{2,\beta}$ , per  $\beta > 0$  sufficientemente piccolo. Vediamo come.

Sfruttiamo ancora una volta il fatto che la  $u$  risolve, su un dominio limitato e  $C^\infty$  del piano, l'equazione ellittica

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} = 0, \quad (22)$$

con coefficienti  $a = 1 + u_y^2$ ,  $b = -u_x u_y$ ,  $c = 1 + u_x^2$ . Dalla stima  $C^0$  per il gradiente di  $u$  dimostrata prima segue che

$$1 \leq a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 \leq \Lambda, \quad \forall(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2,$$

con  $\Lambda$  una costante dipendente da  $\|g\|_{C^2(\partial\Omega)}$ . Dato che  $u|_{\partial\Omega} = g$  è uniformemente limitato in  $C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ , lo è a fortiori in  $C^2(\partial\Omega)$ , e il Teorema 2.19 implica che esiste un  $\beta > 0$  tale che  $|\nabla u|_{\beta\bar{\Omega}}$  è uniformemente limitata. Quindi  $\|u\|_{C^{1,\beta}(\bar{\Omega})}$  è uniformemente limitata. A meno di prendere un  $\beta$  più piccolo, possiamo supporre che  $\beta \leq \alpha$ , in modo che  $g$  abbia una stima in  $C^{2,\beta}(\partial\Omega)$ . I coefficienti dell'equazione (22) hanno adesso una stima in  $C^{0,\beta}(\bar{\Omega})$ , quindi le stime di Schauder fino al bordo (Teorema 2.15) implicano che  $u$  ha una stima in  $C^{2,\beta}(\bar{\Omega})$ , come volevamo dimostrare. Abbiamo pertanto dimostrato il seguente:

**2.1 TEOREMA.** *Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un aperto limitato, di classe  $C^\infty$ , fortemente convesso. Per ogni  $g \in C^\infty(\partial\Omega)$  esiste un'unica  $u \in C^\infty(\Omega)$  il cui grafico sia una superficie minima avente per bordo il grafico di  $g$ .*

**2.2 ESERCIZIO.** *Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un aperto limitato di classe  $C^\infty$ , e sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $C^\infty$  tale che  $f' < 0$  e  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ . Dimostrare che per ogni  $g \in C^\infty(\Omega)$  il problema di Dirichlet nonlineare*

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = g, & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

*possiede una ed una sola soluzione  $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ .*

**2.3 ESERCIZIO.** *Sia  $\mathbb{T}^2$  il toro bidimensionale  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ , e sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $C^\infty$  tale che  $f' < 0$  e  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ . Dimostrare che per ogni  $g \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$  esiste una ed una sola  $u \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$  tale che  $\Delta u + f(u) = g$ .*

**2.4 ESERCIZIO.** *Sia  $M$  una varietà di classe  $C^\infty$ , munita di una metrica*

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j.$$

*Sia  $\rho = \mu(x)dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$  la forma di volume associata, dove*

$$\mu = \sqrt{\det g_{ij}},$$

*ed indichiamo con  $g^{ij}$  la matrice inversa di  $g_{ij}$ . L'operatore di Laplace-Beltrami associato alla metrica  $g$  è l'operatore differenziale lineare del secondo ordine definito da*

$$\Delta_g u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \mu g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^j} \right).$$

- (i) *Scrivere l'operatore di Laplace-Beltrami nel caso della sfera  $S^2$  munita della metrica standard, rispetto alle coordinate  $(\theta, \psi)$ , dove  $\theta$  è la longitudine,  $\psi$  la latitudine.*
- (ii) *Scrivere l'operatore di Laplace-Beltrami nel caso del piano iperbolico  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\} \cong \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ , munito della metrica  $ds = d|z|/y$ .*
- (iii) *Supponiamo che  $M$  sia compatta senza bordo. Qual è l'equivalente del principio del massimo per  $\Delta_g$  in questo caso?*
- (iv) *Sia  $M$  una superficie compatta senza bordo munita della metrica  $g$ , e sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $C^\infty$  tale che  $f' < 0$  e  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ . Dimostrare che per ogni  $h \in C^\infty(M)$  esiste un'unica  $u \in C^\infty(M)$  che risolve  $\Delta_g u + f(u) = h$ .*

### 3 Il metodo di iterazione di Nash e Moser

#### 3.1 Il metodo di Newton

Ricordiamo qual era lo schema iterativo da cui scaturiva il Teorema della funzione implicita 1.3 (si veda l'Osservazione 1.6). Siano  $F : U \times V \rightarrow Z$  e  $(x_0, y_0) \in U \times V$  tale che  $F(x_0, y_0) = 0$  e  $D_2F(x_0, y_0)$  invertibile. Dato  $x$  in  $U$  si cercava  $y = y(x)$  in  $V$  che risolvesse  $F(x, y) = 0$ , e tale  $y$  poteva essere trovato (con opportune ipotesi sulla  $F$ ), come limite della successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} u_0 = y_0, \\ u_{n+1} = u_n - D_2F(x_0, y_0)^{-1}F(x, u_n). \end{cases} \quad (23)$$

Che velocità di convergenza possiamo aspettarci? Usiamo la seguente terminologia: parliamo di *convergenza di ordine  $p$*  se  $|u_{n+1} - y| \leq c|u_n - y|^p$ . La convergenza di ordine 1 con  $c < 1$  si dirà anche convergenza lineare (ma si noti che in questo caso  $|u_n - y|$  tende a zero esponenzialmente), quella di ordine 2 convergenza quadratica (e vedremo che in questo caso  $|u_n - y|$  tende a zero più che esponenzialmente, si ha la cosiddetta convergenza rapida). Osserviamo che

$$F(x, y') - F(x, y) = \int_0^1 \frac{d}{dt} F(x, y + t(y' - y)) dt = \left( \int_0^1 D_2F(x, y + t(y' - y)) dt \right) (y' - y).$$

Dato che si supponeva  $D_2F$  continua, se  $(x, y)$  e  $(x, y')$  sono vicini a  $(x_0, y_0)$  l'integrale sopra definisce un operatore vicino in norma a  $D_2F(x_0, y_0)$ . Quindi fissato  $\epsilon > 0$  si ha

$$|F(x, y') - F(x, y) - D_2F(x_0, y_0)(y' - y)| \leq \epsilon|y' - y|,$$

se  $(x, y)$  e  $(x, y')$  sono sufficientemente vicini a  $(x_0, y_0)$ . Da questa stima con  $y' = u_n$  e  $y$  il limite di  $(u_n)$ , cioè la soluzione di  $F(x, y) = 0$ , si trova

$$|F(x, u_n) - D_2F(x_0, y_0)(u_n - y)| \leq \epsilon|u_n - y|,$$

da cui

$$|u_{n+1} - y| = |D_2F(x_0, y_0)^{-1}(D_2F(x_0, y_0)(u_n - y) - F(x, u_n))| \leq \epsilon \|D_2F(x_0, y_0)^{-1}\| |u_n - y|.$$

Quindi abbiamo una convergenza lineare.

Confrontiamo lo schema iterativo appena visto con il classico metodo di Newton. In questo caso, si tratta di cercare gli zeri di una mappa  $F : X \rightarrow Y$  partendo da una quasi soluzione, cioè da un  $x_0 \in X$  per cui  $F(x_0)$  è piccolo, e cercando un  $x_1 = x_0 + h$  tale che  $F(x_1)$  sia ancora più piccolo. Dallo sviluppo

$$F(x_0 + h) = F(x_0) + DF(x_0)h + o(h),$$

si vede che per avere  $F(x_0 + h)$  il più piccolo possibile conviene prendere  $h$  tale che  $F(x_0) + DF(x_0)h = 0$ . Quindi è bene avere  $DF(x_0)$  invertibile e scegliere  $h = -DF(x_0)^{-1}F(x_0)$ . Si arriva quindi allo schema iterativo

$$x_{n+1} = x_n - DF(x_n)^{-1}F(x_n),$$

che prede il nome di algoritmo di Newton. Si osservi che si tratta di una formula molto simile a (23): la differenza è che invece di invertire il differenziale sempre nello stesso punto, nell'algoritmo di Newton si opera questa inversione in tutti i punti della successione. Da un punto di vista numerico non è detto che questa scelta sia conveniente (invertire un operatore, o anche una matrice, costa in termini di calcolo), ma vedremo che si guadagna considerevolmente in termini di velocità di convergenza (e quindi sono necessari meno passi per arrivare vicino alla soluzione con la precisione desiderata). Infatti si ha il seguente:

**3.1 TEOREMA.** (Algoritmo di Newton) *Siano  $X, Y$  spazi di Banach,  $B_r(x_0)$  la palla di raggio  $r$  centrata in  $x_0 \in X$ , ed  $F : B_r(x_0) \rightarrow Y$  una mappa di classe  $C^1$  tale che:*

(i)  $DF(x_0)$  è invertibile, e si ponga  $\alpha = |DF(x_0)^{-1}F(x_0)|$ ,  $\beta = \|DF(x_0)^{-1}\|$ ;

(ii) la mappa  $DF$  è  $k$ -Lipschitziana in  $B_r(x_0)$ ;

(iii)  $2k\alpha\beta < 1$  e  $2\alpha \leq r$ .

Allora  $F$  ha un unico zero  $\bar{x}$  in  $\overline{B_{2\alpha}}(x_0)$ , e l'algoritmo di Newton

$$x_{n+1} = x_n - DF(x_n)^{-1}F(x_n),$$

converge quadraticamente verso  $\bar{x}$ , con

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{\alpha}{2^{n-1}} q^{2^n - 1}, \quad \text{dove } q = k\alpha\beta/(1 - k\alpha\beta) < 2k\alpha\beta < 1.$$

*Dimostrazione.* Osserviamo subito che

$$DF(x) = DF(x_0)[I + DF(x_0)^{-1}(DF(x) - DF(x_0))], \quad (24)$$

e per (ii), se  $|x - x_0| \leq 2\alpha$ ,

$$\|DF(x_0)^{-1}(DF(x) - DF(x_0))\| \leq \beta k|x - x_0| \leq 2k\alpha\beta,$$

che è minore di 1 per (iii), da cui concludiamo che  $DF(x)$  è invertibile per ogni  $x \in \overline{B_{2\alpha}}(x_0)$ .

Sempre da (ii), deduciamo che se  $x, x' \in B_r(x_0)$ , si ha

$$\begin{aligned} |F(x') - F(x) - DF(x)(x' - x)| &= \left| \int_0^1 (DF(x + t(x' - x)) - DF(x))(x' - x) dt \right| \\ &\leq k|x' - x|^2 \int_0^1 t dt = \frac{k}{2}|x' - x|^2. \end{aligned} \quad (25)$$

Poniamo  $\alpha_n = |x_{n+1} - x_n|$ ,  $\beta_n = \|DF(x_n)^{-1}\|$ , in modo che  $\alpha_0 = \alpha$  e  $\beta_0 = \beta$ . Poniamo anche  $\gamma_n = k\alpha_n\beta_n$ . Dalla (25) ricaviamo

$$\alpha_n = |DF(x_n)^{-1}F(x_n)| \leq \beta_n|F(x_n)| = \beta_n|F(x_n) - F(x_{n-1}) - DF(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})| \leq \frac{k}{2}\alpha_{n-1}^2\beta_n.$$

Dalla formula (24) con  $x = x_n$  e  $x_0$  rimpiazzato da  $x_{n-1}$ , ricaviamo che

$$\|DF(x_n)^{-1}\| \leq \frac{\|DF(x_{n-1})^{-1}\|}{1 - \|DF(x_{n-1})^{-1}(DF(x_n) - DF(x_{n-1}))\|},$$

da cui, usando ancora (ii),

$$\beta_n \leq \frac{\beta_{n-1}}{1 - \beta_{n-1}k\alpha_{n-1}} = \frac{\beta_{n-1}}{1 - \gamma_{n-1}}, \quad (26)$$

purché  $\gamma_{n-1}$  sia minore di 1. Quindi

$$\alpha_n \leq \frac{k}{2}\alpha_{n-1}^2\beta_n \leq \frac{k}{2} \frac{\beta_{n-1}}{1 - \gamma_{n-1}} \alpha_{n-1}^2 = \frac{1}{2} \frac{\gamma_{n-1}}{1 - \gamma_{n-1}} \alpha_{n-1}, \quad (27)$$

$$\gamma_n = k\alpha_n\beta_n \leq k \frac{1}{2} \frac{\gamma_{n-1}}{1 - \gamma_{n-1}} \alpha_{n-1} \frac{\beta_{n-1}}{1 - \gamma_{n-1}} = \frac{1}{2} \frac{\gamma_{n-1}^2}{(1 - \gamma_{n-1})^2}. \quad (28)$$

Poiché  $s < 1/2$  è equivalente a  $s^2/(1 - s)^2 < 1$ , il fatto che  $\gamma_0 = k\alpha\beta$  sia minore di  $1/2$  implica che  $\gamma_n < 1/2$  per ogni  $n$ . Ma allora da (27),  $\alpha_n < \alpha_{n-1}/2$  per ogni  $n$ , da cui  $\alpha_n \leq \alpha 2^{-n}$  e

$$|x_{n+1} - x_0| = \sum_{j=0}^n \alpha_j \leq \alpha \sum_{j=0}^n 2^{-j} < 2\alpha \leq r.$$

Da queste stime, insieme al fatto che  $DF(x)$  è invertibile per ogni  $x \in \overline{B_{2\alpha}(x_0)}$ , deduciamo che la successione  $(x_n)$  è ben definita, assume valori in  $B_{2\alpha}(x_0)$ , ed è una successione di Cauchy, con limite  $\bar{x} \in \overline{B_{2\alpha}(x_0)}$ . Si ha ovviamente  $F(\bar{x}) = 0$ .

Dalla (25) segue che

$$|x_{n+1} - \bar{x}| = |DF(x_n)^{-1}(DF(x_n)(x_n - \bar{x}) - F(x_n) + F(\bar{x}))| \leq \beta_n \frac{k}{2} |x_n - \bar{x}|^2,$$

Osservando che  $\sup \beta_n$  è finito poiché  $DF(\bar{x})$  è invertibile, si ha dunque

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \leq c|x_n - \bar{x}|^2, \quad \text{dove } c = \frac{k}{2} \sup \beta_n,$$

è la convergenza è quadratica.

Se  $\bar{x}'$  è un altro zero di  $F$  in  $\overline{B_{2\alpha}(x_0)}$ , si ha

$$\begin{aligned} |\bar{x}' - \bar{x}| &\leq \beta |F(\bar{x}') - F(\bar{x}) - DF(x_0)(\bar{x}' - \bar{x})| \leq \beta \left| \int_0^1 (DF(\bar{x} + t(\bar{x}' - \bar{x})) - DF(x_0))(\bar{x}' - \bar{x}) dt \right| \\ &\leq \beta k |\bar{x}' - \bar{x}| \int_0^1 |\bar{x} - x_0 + t(\bar{x}' - \bar{x})| dt \leq 2\alpha\beta k |\bar{x}' - \bar{x}|, \end{aligned}$$

e dunque  $\bar{x}' = \bar{x}$ .

Per stimare la velocità di convergenza, poniamo  $\delta_n = \gamma_n/(1 - \gamma_n)$ , ed osserviamo che (28) e il fatto che  $\gamma_n < 1/2$  implicano che

$$\delta_n \leq \frac{1}{2} \frac{\gamma_{n-1}^2}{(1 - \gamma_{n-1})^2} \frac{1}{1 - \gamma_n} \leq \frac{\gamma_{n-1}^2}{(1 - \gamma_{n-1})^2} = \delta_{n-1}^2.$$

Allora  $\delta_n \leq \delta_0^{2^n}$ . Per (27) si ha quindi

$$\alpha_n \leq \frac{1}{2} \delta_{n-1} \alpha_{n-1} \leq \frac{1}{2} \delta_0^{2^{n-1}} \alpha_{n-1},$$

che iterata produce

$$\alpha_n \leq 2^{-n} \delta_0^{2^n - 1} \alpha.$$

Dato che  $\delta_0 = \gamma_0/(1 - \gamma_0) = q$ , si ha anche  $\alpha_n \leq 2^{-n} q^{2^n - 1} \alpha$ . Perciò

$$|x_n - \bar{x}| \leq \sum_{j=n}^{\infty} \alpha_j \leq \alpha \sum_{j=n}^{\infty} 2^{-j} q^{2^j - 1} \leq \alpha q^{2^n - 1} \sum_{j=n}^{\infty} 2^{-j} = \alpha 2^{-n+1} q^{2^n - 1},$$

come volevamo dimostrare. □