Elementi di Calcolo delle Variazioni

Prova scritta 3 luglio 2007

Si consideri il funzionale

$$F(u) = \int_0^1 (e^{u'} + u^2)\, dx$$

ed il problema di minimo

$$\min \Big\{ F(u) \ : \ u \in W^{1,1}(0,1),\ u(0) = 0,\ u(1) = 1 \Big\}. \tag{1}$$

1. Dimostrare che

$$\begin{aligned} & \inf \Big\{ F(u) \ : \ u \in W^{1,1}(0,1),\ u(0) = 0,\ u(1) = 1 \Big\} \\ = \ & \inf \Big\{ F(u) \ : \ u \in W^{1,1}(0,1),\ u(0) = 0,\ u(1) = 1,\ u \text{ crescente} \Big\}. \end{aligned}$$

2. Dedurre dal punto precedente che esiste una soluzione del problema di minimo (1) e che tale soluzione è unica.

3. Scrivere l'equazione di Eulero e l'equazione di Du Bois-Reymond (ossia la conservazione dell'energia) del problema di minimo (1).

4. Usando l'equazione di Du Bois-Reymond dimostrare che la soluzione del problema di minimo (1) è di classe $C^1([0,1])$.

5. Dimostrare che la soluzione del problema di minimo (1) è convessa.

6. Usando l'equazione di Du Bois-Reymond dimostrare che se si considerano i dati agli estremi $u(0) = 1$ e $u(1) = 0$ non si può avere una soluzione di classe $W^{1,1}(0,1)$ (può essere utile iniziare col dimostrare che non si può avere una soluzione di classe $C^1([0,1])$).