

Elementi di Calcolo delle Variazioni

Prova scritta 26 settembre 2007

Esercizio 1. Si vuole congiungere con una curva in \mathbb{R}^2 il punto $(0, 0)$ con il punto $(1, 0)$. Analogamente a quanto avviene nelle regate di vela, la velocità dipende dall'angolo θ di orientazione della curva (nelle regate è l'angolazione della barca rispetto alla direzione del vento, che qui supponiamo soffiare nella direzione $(-1, 0)$). Supponiamo che la velocità sia $f(\theta)$, dove $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione non negativa, continua e pari, con $f(0) = 0$ (vento di prua) ed $f(\pi/2) = 1$ (vento al traverso).

- (a) Scrivere l'espressione del tempo di percorrenza qualora si decida di seguire una curva assolutamente continua $u(t)$.
- (b) Dimostrare che esiste una curva lipschitziana che minimizza il tempo di percorrenza.
- (c) Determinare le curve del punto precedente che presentano il minimo numero di punti di discontinuità di u' (virate).
- (d) Dimostrare che non è mai conveniente utilizzare angoli θ al di fuori dell'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$.