Elementi di Calcolo delle Variazioni - Problemi I

1. Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e $k \geq 0$ un intero. Dimostrare che se $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ verifica

$$\int_I f(x) \frac{d^k}{dx^k} \varphi(x)\, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(I),$$

allora f è un polinomio di grado inferiore a k.

2. Trovare gli estremali di

$$\int_1^2 (u'^2 - xu' - u)\, dx$$

sullo spazio delle $u \in C^1([1,2])$ tali che $u(1) = 3$ e $u(2) = 4$. Dire se tali estremali sono minimizzanti globali.

3. Sia X uno spazio vettoriale reale, e sia $F : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ un funzionale convesso (ossia l'epigrafico $\operatorname{epi}(F) = \{(u, c) \in X \times \mathbb{R} \mid F(u) \geq c\}$ è un sottoinsieme convesso di $X \times \mathbb{R}$). Supponiamo che $u \in X$ sia tale che $F(u) < +\infty$ e che per ogni $h \in X$ esista il limite (eventualmente infinito)

$$\delta F(u, h) := \lim_{\epsilon \to 0+} \frac{F(u + \epsilon h) - F(u)}{\epsilon}.$$

Mostrare che se $\delta F(u, h) \geq 0$ per ogni $h \in X$ allora u è minimizzante globale di F su X.

4. Usando il risultato del problema precedente, dimostrare che la cicloide è il minimizzante globale del funzionale della Brachistochrona

$$T(y) = \int_0^a \sqrt{\frac{1 + y'^2(x)}{2gy(x)}}\, dx$$

sull'insieme

$$\left\{ y \in C^1(]0, a]) \cap C^0([0, a]) \mid y(0) = 0,\ y(a) = b \right\},$$

dove a, b e g sono costanti positive [si ricordi il cambio di variabile $y = u^2/2$ che trasforma T in un funzionale convesso].

5. Si consideri una superficie parametrica con prima forma fondamentale

$$ds^2 = E(u, v)du^2 + 2F(u, v)du\, dv + G(u, v)dv^2, \quad (u, v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$

ed il relativo funzionale di energia delle curve

$$\mathcal{E}(\gamma) = \int_a^b (Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2)\, dt, \quad \text{con } \gamma(t) = (u(t), v(t)) : [a, b] \to \Omega.$$

   (a) Scrivere l'equazione di Eulero-Lagrange di $\mathcal{E}$ (equazione delle geodetiche).

   (b) Se la metrica ds^2 è la restrizione della metrica Euclidea di $\mathbb{R}^3$ ad una superficie immersa, allora le geodetiche sono esattamente le curve la cui accelerazione è normale alla superficie.

   (c) Determinare le geodetiche di S^2 con la parametrizzazione

$$\begin{cases} x = \sin\theta \cos\varphi, \\ y = \sin\theta \sin\varphi, \\ z = \cos\theta, \end{cases} \qquad ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2.$$

(d) Determinare le geodetiche su $\mathbb{H}^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$ con la metrica

$$ds^2 = \frac{1}{z^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

6. Sia $L \in C^1(I, \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, sia $u \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$ un estremale del funzionale

$$F(u) = \int_I L(x, u(x), u'(x))\, dx$$

e poniamo $E(x, u, v) = L_v(x, u, v) \cdot v - L(x, u, v)$. Mostrare che vale l'equazione di Noether

$$\frac{d}{dx} E(x, u(x), u'(x)) = -L_x(x, u(x), u'(x)) \quad \forall x \in I.$$

7. Formulare e dimostrare un teorema dei moltiplicatori di Lagrange per la minimizzazione del funzionale

$$F(u) = \int_I L(x, u(x), u'(x))\, dx$$

con k vincoli integrali della forma

$$G_j(u) = \int_I M_j(x, u(x), u'(x))\, dx = c_j, \quad j = 1. \ldots, k.$$