Prima prova intermedia del primo modulo di

ANALISI

–07.11.2005–

1. Sia $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ la successione definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 3} \end{cases}$$

   (a) Calcolare $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

   (b) Calcolare la somma infinita

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{a_k}.$$

   (a) Posto $b_n = a_n^2$ è immediato verificare che $b_{n+1} = b_n + 3$ e quindi, ragionando per induzione, si conclude che b_n è la progressione aritmetica $b_n = 4 + 3n$ e $a_n = \sqrt{b_n}$. Osserviamo che vale la stima $\sqrt{n+1} \le a_n \le 2\sqrt{n+1}$. È chiaro quindi che $\lim a_n = +\infty$: se M è una costante fissata $a_n > M$ definitivamente (per esempio per ogni $n \ge M^2$).

   (b) Visto che $a_n \le 2\sqrt{n+1}$

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{a_k} \ge \frac{1}{2} \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{\sqrt{k+1}} = +\infty$$

   .

2. Dire per quali valori del parametro reale $x \in \mathbb{R}$ risulta convergente

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{(k^2)}}{k!}$$

   È immediato verificare che se $|x| \le 1$ la serie è *assolutamente convergente*: infatti se $|x| \le 1$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|x|^{(k^2)}}{k!} \le \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e.$$

   Se invece $|x| > 1$ allora

$$\frac{|x|^{(k^2)}}{k!} \ge \frac{|x|^{(k^2)}}{k^k} = \left(\frac{|x|^k}{k}\right)^k \tag{1}$$

Scrivendo $|x| = 1 + (|x| - 1)$, dalla formula del binomio segue che

$$\text{se } |x| > 1 \text{ allora} \qquad \frac{|x|^k}{k} \geq \frac{(k-1)}{2}(|x|-1)^2 \to +\infty \text{ per } k \to +\infty.$$

Quindi la quantità tra parentesi tonde che compare nel termine di destra dell'equazione (??) **non** è infinitesima e dunque non sono infinitesimi gli addendi della serie.

Pertanto la serie **non** converge se $|x| > 1$.

3. Sia D l'insieme dei numeri naturali strettamente positivi con la proprietà che le cifre della loro espressione in base dieci sono strettamente decrescenti (per esempio: 9632 appartiene a D mentre 5411 non appartiene a D).

   (a) Calcolare la cardinalità di D.

   (b) Provare che vale la stima

$$\sum_{k \in D} \frac{1}{k} \leq 10(e-1) - 1$$

(a) Sia D_ℓ l'insieme dei numeri di D con ℓ cifre. In $|D_1|$ ci sono i numeri da 1 a 9, quindi $|D_1| = 9$.
In generale, per $\ell \geq 2$, $|D_\ell| = \binom{10}{\ell}$ in quanto D_ℓ può essere messo in bigezione coi sottoinsiemi di ℓ elementi dell'insieme dei simboli $S := \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$: se $F \subset S$, $|F| = \ell$ ed $F = \{\alpha_1, ..., \alpha_\ell\}$ è ordinato in modo che le cifre siano decrescenti, ad esso si associa il numero $m = \sum_{j=1}^{\ell} 10^{(\ell-j)}\alpha_j \in D$ e viceversa[1]. Pertanto

$$|D| = 9 + \sum_{\ell=2} 10\binom{10}{\ell} = 9 + (1+1)^{10} - \binom{10}{0} - \binom{10}{1} = 2^{10} - 2 = 1022.$$

(b)

$$\sum_{k \in D_1} \frac{1}{k} < 9; \qquad \sum_{k \in D_\ell} \frac{1}{k} \leq \binom{10}{\ell} 10^{(1-\ell)}$$

Quindi

$$|D| \leq 9 + 10\sum_{\ell=2}^{10} \binom{10}{\ell} 10^{-\ell} = 9 + 10\left[\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} - 2\right] \leq 10e - 11$$

Osserviamo che nella stima sopra abbiamo maggiorato la somma degli inversi dei primi nove interi positivi con 9. In realtà svolgendo il calcolo si verifica che tale somma è minore di 3: in effetti la stima suggerita e' ben lungi dall'essere ottimale!

[1] Per esempio: al sottoinsieme $\{9,6,3,2,0\} \subset S$ associeremo il numero 96320.

Analisi Matematica I - Secondo Compitino

19 Dicembre 2005 - Fila 1

Esercizio 1. Data l'applicazione

$$f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1+z}{1-z},$$

determinare $f(i\mathbb{R})$ e $f(\mathbb{U} \setminus \{1\})$, dove $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ è il cerchio unitario.

Soluzione. Osserviamo che per ogni $t \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$1 + it = \sqrt{1+t^2}\, e^{i \arctan t}$$

pertanto

$$f(it) = \frac{e^{i \arctan t}}{e^{i \arctan(-t)}} = e^{2\,i \arctan t}.$$

Ne segue che $f(i\mathbb{R}) = e^{i]-\pi,\pi[} = \mathbb{U} \setminus \{-1\}$.

Ora osserviamo che

$$\mathbb{U} \setminus \{1\} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in]0, 2\pi[\}$$

e consideriamo

$$f(e^{i\theta}) = \frac{(1+e^{i\theta})(1-e^{-i\theta})}{|1-e^{i\theta}|^2} = \frac{2\,i\,\sin\theta}{(1-\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\, i\,.$$

Osserviamo che la funzione $\theta \mapsto \sin\theta(1-\cos\theta)^{-1}$ è continua su $]0, 2\pi[$ e ricordando che $\sin\theta = \theta + o(\theta)$ e $\cos\theta = 1 - \theta^2/2 + o(\theta^2)$, per $\theta \to 0$, si hanno i limiti

$$\lim_{\theta\to 0^+} \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = +\infty, \qquad \lim_{\theta\to 2\pi^-} \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \lim_{\theta\to 0^-} \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = -\infty\,.$$

Pertanto l'immagine di tale funzione corrisponde all'insieme $\mathbb{R}$, ovvero $f(\mathbb{U} \setminus \{1\}) = i\mathbb{R}$.

Esercizio 2. (a) Dimostrare che la derivata n-esima della funzione

$$f(x) = e^{x^3-x}$$

è della forma

$$f^{(n)}(x) = p_n(x)\, e^{x^3-x},$$

con p_n polinomio.

(b) Determinare al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ il limite

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x-x^3+\lambda \log x} f^{(n)}(x).$$

SOLUZIONE. (a) Dimostriamo per induzione che

$$f^{(n)}(x) = p_n(x)\, e^{x^3-x},$$

con p_n polinomio. Per $n = 0$ è sufficiente porre $p_0 = 1$. Se la formula è vera per n, si ha

$$f^{(n+1)}(x) = (p_n'(x) + (3x^2-1)p_n(x))\, e^{x^3-x}.$$

Quindi basta porre

$$p_{n+1}(x) = p_n'(x) + (3x^2-1)p_n(x), \tag{1}$$

che è un polinomio (la derivata di un polinomio è un polinomio, e l'insieme dei polinomi forma un anello).

(b) Risulta

$$e^{x-x^3+\lambda \log x} f^{(n)}(x) = x^\lambda p_n(x).$$

Dalla formula (1) si deduce che il polinomio p_{n+1} ha il grado di p_n più due. Insieme al fatto che $p_0 = 1$, si trova che p_n ha grado $2n$. Sempre da (1), il coefficiente del termine di grado $2(n+1)$ in p_{n+1} è pari a 3 volte il coefficiente del termine di grado $2n$ in p_n. Insieme al fatto che $p_0 = 1$, si trova che il coefficiente del termine di grado $2n$ in p_n è 3^n. Concludiamo quindi che

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x-x^3+\lambda \log x} f^{(n)}(x) = \lim_{x\to+\infty} x^\lambda p_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda < -2n, \\ +\infty & \text{se } \lambda > -2n, \\ 3^n & \text{se } \lambda = -2n. \end{cases}$$

Esercizio 3. (a) Dato un intero positivo n, dimostrare che la funzione

$$f_n : \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \tan x - 2nx - 3\sin x,$$

ha un unico punto di minimo x_n.

(b) Dimostrare che $x_n \to \pi/2$ per $n \to +\infty$.

(c) Determinare costanti a e b tali che valga lo sviluppo

$$x_n = \frac{\pi}{2} + a\, n^{-1/2} + b\, n^{-3/2} + o(n^{-3/2}) \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Soluzione. (a) La funzione f_n è derivabile, e la sua derivata vale

$$f_n'(x) = 1 + \tan^2 x - 2n - 3\cos x.$$

La funzione f_n' vale $-2n-2$ in 0, ed il suo limite per $x \to \pi/2$ (da sinistra) vale $+\infty$. Essendo una funzione continua, per il teorema degli zeri la funzione f_n' possiede almeno uno zero in $]0,\pi/2[$. Inoltre f_n' è strettamente crescente su $[0,\pi/2]$, poichè somma di funzioni crescenti di cui almento una (ad esempio $\tan^2$) strettamente crescente. Deduciamo che esiste un unico $x_n \in]0,\pi/2[$ tale che f_n' è negativa su $[0,x_n[$, nulla in x_n, e positiva su $]x_n,\pi/2[$. Quindi f_n è strettamente decrescente su $[0,x_n]$ e strettamente crescente su $[x_n,\pi/2[$. In particolare, x_n è l'unico punto di minimo di f_n.

(b) Da $f'(x_n) = 0$ e dal fatto che il coseno è limitato deduciamo che

$$\tan^2 x_n = 2n - 1 + 3\cos x_n = 2n + O(1), \quad \text{per } n \to +\infty,$$

da cui, tendendo conto del fatto che la tangente è bigettiva da $[0,\pi/2[$ su $[0,+\infty[$, otteniamo

$$x_n = \arctan\sqrt{2n + O(1)}.$$

Questo implica che la successione (x_n) tande a $\pi/2$.

(c) Tenendo conto del fatto che $x_n \to \pi/2$ e che $\cos \pi/2 = 0$ possiamo migliorare lo sviluppo di x_n come segue

$$x_n = \arctan \sqrt{2n - 1 + 3\cos x_n} = \arctan \sqrt{2n - 1 + o(1)}.$$

Ricordando lo sviluppo a $+\infty$ dell'arcotangente:

$$\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \frac{1}{x^{2k+1}}, \quad \texttt{per } x \to +\infty,$$

si ottiene

$$x_n = \frac{\pi}{2} - (2n - 1 + o(1))^{-1/2} + \frac{1}{3}(2n + O(1))^{-3/2} + o(n^{-3/2}). \qquad (2)$$

Dallo sviluppo $(1+x)^{-1/2} = 1 - x/2 + o(x)$ per $x \to 0$, si trova

$$(2n - 1 + o(1))^{-1/2} = 2^{-1/2} n^{-1/2} \left(1 - \frac{1}{2n} + o(1/n)\right)^{-1/2}$$
$$= 2^{-1/2} n^{-1/2} \left(1 + \frac{1}{4n} + o(1/n)\right) = 2^{-1/2} n^{-1/2} + 2^{-5/2} n^{-3/2} + o(n^{-3/2}), \qquad (3)$$

Usando semplicemente il fatto che $(1+x)^{-3/2} = 1 + o(1)$ per $x \to 0$, si trova

$$(2n + O(1))^{-3/2} = 2^{-3/2} n^{-3/2} (1 + O(1/n))^{-3/2} = 2^{-3/2} n^{-3/2} + o(n^{-3/2}). \quad (4)$$

Da (2), (3), (4) concludiamo che

$$x_n = \frac{\pi}{2} - 2^{-1/2} n^{-1/2} + (3^{-1} - 2^{-5/2}) n^{-3/2} + o(n^{-3/2}).$$

Analisi Matematica I - Secondo Compitino
19 Dicembre 2005 - Fila 2

Esercizio 1. Data l'applicazione

$$f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1-z}{1+z},$$

determinare $f(i\mathbb{R})$ e $f(\mathbb{U} \setminus \{-1\})$, dove $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ è il cerchio unitario.

Soluzione. `Osserviamo che per ogni` $t \in \mathbb{R}$ `abbiamo`

$$1 + it = \sqrt{1+t^2}\, e^{i \arctan t}$$

`pertanto`

$$f(it) = \frac{e^{i \arctan(-t)}}{e^{i \arctan t}} = e^{-2\,i \arctan t}.$$

`Ne segue che` $f(i\mathbb{R}) = e^{i]-\pi,\pi[} = \mathbb{U} \setminus \{-1\}$.

`Ora osserviamo che`

$$\mathbb{U} \setminus \{-1\} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in]-\pi, \pi[\}$$

`e consideriamo`

$$f(e^{i\theta}) = \frac{(1-e^{i\theta})(1+e^{-i\theta})}{|1+e^{i\theta}|^2} = \frac{-2\,i\,\sin\theta}{(1+\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2} = -\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\, i\,.$$

`Ricordando che` $\sin\theta = \theta + o(\theta)$ `e` $\cos\theta = 1 - \theta^2/2 + o(\theta^2)$, `per` $\theta \to 0$, `si hanno i limiti`

$$\lim_{\theta \to -\pi^+} -\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \lim_{\theta \to 0^+} \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = +\infty,$$
$$\lim_{\theta \to \pi^-} -\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \lim_{\theta \to 0^-} \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = -\infty\,.$$

La funzione $\theta \mapsto -\sin\theta(1+\cos\theta)^{-1}$ è continua su $]-\pi,\pi[$, pertanto l'immagine di tale funzione corrisponde all'insieme $\mathbb{R}$, ovvero $f(\mathbb{U}\setminus\{-1\}) = i\mathbb{R}$.

Esercizio 2. (a) Dimostrare che la derivata n-esima della funzione

$$f(x) = e^{x^4-1}$$

è della forma

$$f^{(n)}(x) = p_n(x)\, e^{x^4-1},$$

con p_n polinomio.

(b) Determinare al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ il limite

$$\lim_{x\to+\infty} e^{1-x^4+\lambda\log x} f^{(n)}(x).$$

SOLUZIONE. (a) Dimostriamo per induzione che

$$f^{(n)}(x) = p_n(x)\, e^{x^4-1},$$

con p_n polinomio. Per $n = 0$ è sufficiente porre $p_0 = 1$. Se la formula è vera per n, si ha

$$f^{(n+1)}(x) = (p_n'(x) + 4x^3 p_n(x))\, e^{x^4-1}.$$

Quindi basta porre

$$p_{n+1}(x) = p_n'(x) + 4x^3 p_n(x), \tag{5}$$

che è un polinomio (la derivata di un polinomio è un polinomio, e l'insieme dei polinomi forma un anello).

(b) Risulta

$$e^{1-x^4+\lambda\log x} f^{(n)}(x) = x^\lambda p_n(x).$$

Dalla formula (5) si deduce che il polinomio p_{n+1} ha il grado di p_n più tre. Insieme al fatto che $p_0 = 1$, si trova che p_n ha grado $3n$. Sempre da (5), il coefficiente del termine di grado $3(n+1)$

in p_{n+1} è pari a 4 volte il coefficiente del termine di grado $3n$ in p_n. Insieme al fatto che $p_0 = 1$, si trova che il coefficiente del termine di grado $3n$ in p_n è 4^n. Concludiamo quindi che

$$\lim_{x \to +\infty} e^{1-x^4+\lambda \log x} f^{(n)}(x) = \lim_{x \to +\infty} x^\lambda p_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda < -3n, \\ +\infty & \text{se } \lambda > -3n, \\ 4^n & \text{se } \lambda = -3n. \end{cases}$$

Esercizio 3. (a) Dato un intero positivo n, dimostrare che la funzione

$$f_n : \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \tan x - 3nx - 2 \sin x,$$

ha un unico punto di minimo x_n.

(b) Dimostrare che $x_n \to \pi/2$ per $n \to +\infty$.

(c) Determinare costanti a e b tali che valga lo sviluppo

$$x_n = \frac{\pi}{2} + a\, n^{-1/2} + b\, n^{-3/2} + o(n^{-3/2}) \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Soluzione. (a) La funzione f_n è derivabile, e la sua derivata vale

$$f_n'(x) = 1 + \tan^2 x - 3n - 2\cos x.$$

La funzione f_n' vale $-3n - 1$ in 0, ed il suo limite per $x \to \pi/2$ (da sinistra) vale $+\infty$. Essendo una funzione continua, per il teorema degli zeri la funzione f_n' possiede almeno uno zero in $]0, \pi/2[$. Inoltre f_n' è strettamente crescente su $[0, \pi/2]$, poichè somma di funzioni crescenti di cui almento una (ad esempio $\tan^2$) strettamente crescente. Deduciamo che esiste un unico $x_n \in]0, \pi/2[$ tale che f_n' è negativa su $[0, x_n[$, nulla in x_n, e positiva su $]x_n, \pi/2[$. Quindi f_n è strettamente decrescente su $[0, x_n]$ e strettamente crescente su $[x_n, \pi/2[$. In particolare, x_n è l'unico punto di minimo di f_n.

(b) Da $f'(x_n) = 0$ e dal fatto che il coseno è limitato deduciamo che

$$\tan^2 x_n = 3n - 1 + 2\cos x_n = 3n + O(1), \quad \text{per } n \to +\infty,$$

da cui, tendendo conto del fatto che la tangente è bigettiva da $[0,\pi/2[$ su $[0,+\infty[$, otteniamo

$$x_n = \arctan\sqrt{3n + O(1)}.$$

Questo implica che la successione (x_n) tande a $\pi/2$.

(c) Tenendo conto del fatto che $x_n \to \pi/2$ e che $\cos\pi/2 = 0$ possiamo migliorare lo sviluppo di x_n come segue

$$x_n = \arctan\sqrt{3n-1+2\cos x_n} = \arctan\sqrt{3n-1+o(1)}.$$

Ricordando lo sviluppo a $+\infty$ dell'arcotangente:

$$\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\frac{1}{x^{2k+1}}, \quad \text{per } x \to +\infty,$$

si ottiene

$$x_n = \frac{\pi}{2} - (3n-1+o(1))^{-1/2} + \frac{1}{3}(3n+O(1))^{-3/2} + o(n^{-3/2}). \tag{6}$$

Dallo sviluppo $(1+x)^{-1/2} = 1 - x/2 + o(x)$ per $x \to 0$, si trova

$$(3n-1+o(1))^{-1/2} = 3^{-1/2}n^{-1/2}\left(1 - \frac{1}{3n} + o(1/n)\right)^{-1/2}$$

$$= 3^{-1/2}n^{-1/2}\left(1 + \frac{1}{6n} + o(1/n)\right) = 3^{-1/2}n^{-1/2} + 2^{-1/2}3^{-3/2}n^{-3/2} + o(n^{-3/2}), \tag{7}$$

Usando semplicemente il fatto che $(1+x)^{-3/2} = 1 + o(1)$ per $x \to 0$, si trova

$$(3n+O(1))^{-3/2} = 3^{-3/2}n^{-3/2}(1+O(1/n))^{-3/2} = 3^{-3/2}n^{-3/2} + o(n^{-3/2}). \tag{8}$$

Da (6), (7), (8) concludiamo che

$$x_n = \frac{\pi}{2} - 3^{-1/2}n^{-1/2} + (3^{-5/2} - 2^{-1/2}3^{-3/2})n^{-3/2} + o(n^{-3/2}).$$

Analisi Matematica I - Secondo Compitino
21 Dicembre 2005 - Fila 1

Esercizio 1. Data l'applicazione

$$f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1+z}{1-z},$$

determinare $f(i\mathbb{R})$ e $f(\mathbb{U})$, dove $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ è il cerchio unitario.

Esercizio 2. (a) Dimostrare che la derivata n-esima della funzione

$$f(x) = e^{x^3 - x}$$

è della forma

$$f^{(n)}(x) = p_n(x)\, e^{x^3 - x},$$

con p_n polinomio.

(b) Determinare al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ il limite

$$\lim_{x \to +\infty} e^{x - x^3 + \lambda \log x} f^{(n)}(x).$$

Esercizio 3. (a) Dato un intero positivo n, dimostrare che la funzione

$$f_n : \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \tan x - 2nx - 3 \sin x,$$

ha un unico punto di minimo x_n.

(b) Dimostrare che $x_n \to \pi/2$ per $n \to +\infty$.

(c) Determinare costanti a e b tali che valga lo sviluppo

$$x_n = \frac{\pi}{2} + a\, n^{-1/2} + b\, n^{-3/2} + o(n^{-3/2}) \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Analisi Matematica I - Secondo Compitino
21 Dicembre 2005 - Fila 2

Esercizio 1. Data l'applicazione

$$f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1-z}{1+z},$$

determinare $f(i\mathbb{R})$ e $f(\mathbb{U})$, dove $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ è il cerchio unitario.

Esercizio 2. (a) Dimostrare che la derivata n-esima della funzione

$$f(x) = e^{x^4-1}$$

è della forma

$$f^{(n)}(x) = p_n(x)\, e^{x^4-1},$$

con p_n polinomio.

(b) Determinare al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ il limite

$$\lim_{x\to+\infty} e^{1-x^4+\lambda \log x} f^{(n)}(x).$$

Esercizio 3. (a) Dato un intero positivo n, dimostrare che la funzione

$$f_n : \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \tan x - 3nx - 2\sin x,$$

ha un unico punto di minimo x_n.

(b) Dimostrare che $x_n \to \pi/2$ per $n \to +\infty$.

(c) Determinare costanti a e b tali che valga lo sviluppo

$$x_n = \frac{\pi}{2} + a\, n^{-1/2} + b\, n^{-3/2} + o(n^{-3/2}) \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Primo appello del primo modulo di

ANALISI

–10.01.2006–

1. Indichiamo con $Z_n \subset \mathbb{C}$ l'insieme delle radici n-esime di 1,
$$Z_n := \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}.$$
Consideriamo la funzione $f : Z_{40} \to Z_{40}$ definita da $f(z) = z^2$.
   (a) Al variare di $z \in F_{40}$ determinare la cardinalità $|f^{-1}(\{z\})|$.
   (b) Determinare la cardinalità dell'insieme
   $$A := \{h \circ f \mid h : Z_{40} \to Z_{40},\ h \text{ bigettiva}\}.$$
   (c) Determinare la cardinalità dell'insieme
   $$B := \{f \circ h \mid h : Z_{40} \to Z_{40},\ h \text{ bigettiva}\}.$$
   (d) Determinare la cardinalità dell'insieme
   $$C := \{h^{-1} \circ f \circ h \mid h : Z_{40} \to Z_{40},\ h \text{ bigettiva}\}.$$

2. Sia $f(x) := x^2 e^x$.
   (a) Dire se f ammette massimo o minimo sull'intervallo $]-\infty, -1]$.
   (b) Discutere al variare di $t \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni reali dell'equazione $f(x) = t$.
   (c) Mostrare che esiste un unico dato t per cui l'equazione $f(x) = t$ ha esattamente tre soluzioni $a < b < c$ con la proprietà che $c - b = b - a$. Si provi che in tal caso vale anche la relazione $ac + b^2 = 0$

3. Data la funzione
$$F(x) = \log(1 + \sin x) - \sin\log(1 + x),$$
dire se 0 è punto di massimo locale, di minimo locale, oppure nessuna delle due cose.

Analisi Matematica II - Primo Compitino

27 Marzo 2006

Esercizio 1. Determinare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(x-1)}$$

sull'intervallo $]0,1[$ e dire se tale primitiva è estendibile con continuità agli estremi.

`Visto che` $f(x) \sim x^{-1/2}$ `(per` $x \to 0^+$`)` f `è integrabile in senso improprio sugli intervalli del tipo` $[0,x]$ `(`$x \in [0,1[$`). Una primitiva e' data da`

$$F(x) := \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}(t-1)} dt = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{2}{s^2-1} ds = \int_0^{\sqrt{x}} [\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-1}] ds = \log \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}.$$

`(dove si è effettuata la sostituzione` $x = t^2$`). È evidente che` $\lim_{x \to 1^-} F(x) = -\infty$ `e dunque` F `non puó essere estesa nel punto 1.`

Esercizio 2. Sia $L(\lambda)$ la lunghezza dell'ellisse parametrizzata dalle equazioni

$$\begin{cases} x = (1+\lambda)^{1/4} \cos t, \\ y = (1+\lambda)^{-1/4} \sin t, \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Determinare tre numeri a, b, c tali che

$$L(\lambda) = a + b\lambda + c\lambda^2 + o(\lambda^2), \quad \text{per } \lambda \to 0.$$

Dire se 0 è punto di massimo o minimo locale della funzione L.

`Applicando la formula per calcolare la lunghezza di una curva si ottiene`

$$L(\lambda) = \int_0^{2\pi} \left[(1+\lambda)^{1/2} \sin^2 t + (1+\lambda)^{-1/2} \cos^2 t\right]^{1/2} dt = (1+\lambda)^{-1/4} \int_0^{2\pi} [1+\lambda \sin^2 t]^{1/2} dt$$

Ricordando che $(1+y)^\alpha = 1+\alpha y + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}y^2 + o(y^2)$ e che

$$\int_0^\pi \sin^2 t \ \ dt = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^\pi \sin^4 t \ \ dt = \frac{3}{8}\pi$$

ricaviamo che

$$L(\lambda) = [1-\frac{\lambda}{4}+\frac{5}{32}\lambda^2+o(\lambda^2)]\cdot[2\pi+\frac{\pi}{2}\lambda-\frac{3\pi}{32}\lambda^2+o(\lambda^2)] = 2\pi+\frac{3\pi}{32}\lambda^2+o(\lambda^2)$$

Dalla formula precedente si deduce che $\lambda = 0$ è minimo locale per L.

Esercizio 3. Sia

$$F(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\, dt.$$

(a) Dire per quali $\mu \in \mathbb{R}$ la funzione

$$F(x) - \frac{\mu}{x}e^{-x^2}$$

ha massimo su $]0,+\infty[$.

(b) Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x^2}F(x), \qquad \lim_{x\to+\infty} xe^{x^2}F(x).$$

(a) Utilizzando il TFdCI

$$\frac{d}{dx}\left[F(x) - \frac{\mu}{x}e^{-x^2}\right] = e^{-x^2}[\frac{\mu}{x^2}+2\mu-1].$$

Affinchè ci sia un massimo questa derivata deve annullarsi, ciò può avvenire solo se $\mu \in]0,1/2[$; per tali valori di μ si ha che effettivamente la derivata è positiva sull'intervallo $]0,\sqrt{\frac{\mu}{1-2\mu}}[$ mentre è negativa su $]\sqrt{\frac{\mu}{1-2\mu}},+\infty[$, quindi la funzione ha massimo in $x=\sqrt{\frac{\mu}{1-2\mu}}$.

(b) Usando il cambio di variabile $t = x+s$ otteniamo che

$$F(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = e^{-x^2}\int_0^{+\infty} e^{-s^2}e^{-2xs}ds$$

da cui segue che

$$0 \leq e^{x^2} F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-s^2} e^{-2xs} ds \leq \int_0^{+\infty} e^{-2xs} ds = \frac{1}{2x} \to 0 \qquad \texttt{per } x \to +\infty.$$

Dunque, per il teorema dei due carabinieri il primo limite è zero.

Per quanto riguarda il secondo limite osserviamo che, integrando per parti,

$$x e^{x^2} F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-s^2} x e^{-2xs} ds = \left[-\frac{1}{2} e^{-s^2} e^{-2xs} \right]_{s=0}^{s=+\infty} - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} s e^{-s^2} e^{-2xs} ds$$

D'altro canto

$$\left[-\frac{1}{2} e^{-s^2} e^{-2xs} \right]_{s=0}^{s=+\infty} = \frac{1}{2}, \qquad 0 \leq \int_0^{+\infty} s e^{-s^2} e^{-2xs} ds \leq \frac{M}{2x} \to 0 \qquad \texttt{per } x \to +\infty$$

con $M := \max\{s e^{-s^2},\ s \geq 0\}$. Pertanto il secondo limite vale $1/2$.

Soluzione Compito Analisi I - 10 gennaio 2006

Esercizio 1. Indichiamo con $Z_n \subset \mathbb{C}$ l'insieme delle radici n-esime di 1,

$$Z_n := \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}.$$

Consideriamo la funzione $f : Z_{40} \to Z_{40}$ definita da $f(z) = z^2$.

(a) Al variare di $z \in Z_{40}$ determinare la cardinalità $|f^{-1}(\{z\})|$.

(b) Determinare la cardinalità dell'insieme

$$A := \{h \circ f \mid h : Z_{40} \to Z_{40},\ h \text{ bigettiva}\}.$$

(c) Determinare la cardinalità dell'insieme

$$B := \{f \circ h \mid h : Z_{40} \to Z_{40},\ h \text{ bigettiva}\}.$$

(d) (Facoltativo) Determinare la cardinalità dell'insieme

$$C := \{h^{-1} \circ f \circ h \mid h : Z_{40} \to Z_{40},\ h \text{ bigettiva}\}.$$

Soluzione. (a) Le radici 40-esime di 1 sono i 40 numeri complessi

$$e^{2\pi ik/40}, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, 39\}.$$

Se $z \in Z_{40}$, allora $f(z)^{20} = (z^2)^{20} = z^{40} = 1$, cioè $f(z)$ è una radice 20-esima di 1, quindi $f(Z_{40}) \subset Z_{20}$. Data una radice 20-esima di 1, ossia un numero z tale che $z^{20} = 1$, le sue due radici quadrate w e $-w$ verificano $w^{40} = (w^2)^{20} = z^{20} = 1$ e $(-w)^{40} = 1$, e quindi sono entrambe radici 40-esime di 1. Perciò $f(Z_{40}) = Z_{20}$, e per ogni $z \in Z_{20}$ l'insieme $f^{-1}(\{z\})$, ossia l'insieme dei $w \in Z_{40}$ tali che $f(w) = z$, è costituito dalle 2 radici quadrate di z. Da $f(Z_{40}) = Z_{20}$ segue anche che le due radici quadrate di una radice 40-esima di 1 che non è radice 20-esima di 1 non appartengono a Z_{40} (lo si potrebbe verificare anche direttamente usando la formula esponenziale per le radici n-esime). In conclusione

$$|f^{-1}(\{z\})| = \begin{cases} 2 & \text{se } z \in Z_{20}, \\ 0 & \text{se } z \in Z_{40} \setminus Z_{20}. \end{cases}$$

(b) L'insieme delle $h : Z_{40} \to Z_{40}$ bigettive - ossia delle permutazioni di Z_{40} - ha cardinalità 40!, ma se h e g sono permutazioni distinte, $h \circ f$ e $g \circ f$ non sono necessariamente distinte. Vediamo di capire quando h e g producono applicazioni $h \circ f$ e $g \circ f$ identiche. Fissata h permutazione di Z_{40}, le permutazioni g di Z_{40} tali che $g \circ f = h \circ f$ sono esattamente quelle permutazioni che coincidono con h sull'immagine di f, cioè su Z_{20}. Il numero di tali permutazioni g è dunque pari al numero delle permutazioni di $Z_{40} \setminus Z_{20}$, ossia 20!. La cardinalità di A sarà dunque

$$|A| = \frac{40!}{20!}.$$

Più formalmente: la relazione $g|_{Z_{20}} = h|_{Z_{20}}$ è una relazione di equivalenza $\sim$ sull'insieme delle permutazioni di Z_{40}, e $g \circ f = h \circ f$ se e solamente se $g \sim h$. Quindi A è equipotente al quoziente dell'insieme delle permutazioni di Z_{40} per questa relazione di equivalenza. Dato che ciascuna classe di equivalenza ha cardinalità 20!, l'insieme quoziente ha cardinalità 40!/20!.

(c) Data h permutazione di Z_{40}, la permutazione g di Z_{40} verifica $f \circ h = f \circ g$, ossia $h^2 = g^2$, se e solamente se per ogni $z \in Z_{40}$, $g(z)$ vale $h(z)$ oppure $-h(z)$. Scegliamo 20 elementi $z_1, \dots, z_{20}$ in Z_{40} in modo che

$$Z_{40} = \{h(z_1), -h(z_1), \dots, h(z_{20}), -h(z_{20})\}.$$

Una permutazione g tale che $g(z) \in \{h(z), -h(z)\}$ per ogni z è univocamente determinata dai suoi valori in $z_1, \dots, z_{20}$, per ciascuno dei quali si hanno due possibilità. Infatti se $z \in Z_{40} \setminus \{z_1, \dots, z_{20}\}$, risulterà $h(z) = -h(z_k)$ per un certo k e se abbiamo deciso che $g(z_k) = h(z_k)$ (rispettivamente che $g(z_k) = -h(z_k)$) si dovrà avere $g(z) = -h(z_k)$ (risp. $g(z) = h(z_k)$). Quindi abbiamo 2^{20} permutazioni g con la proprietà $g^2 = h^2$, da cui (ragionando come nel punto (b)),

$$|B| = \frac{40!}{2^{20}}.$$

(d) Due permutazioni h e g di Z_{40} sono tali che $h^{-1} \circ f \circ h = g^{-1} \circ f \circ g$ se e solamente se, posto $\sigma = h \circ g^{-1}$, si ha $f \circ \sigma = \sigma \circ f$. Fissata la permutazione h, l'associazione $g \mapsto h \circ g^{-1}$ definisce un'applicazione bigettiva

$$\{g \text{ permutazione di } Z_{40} \mid h^{-1} \circ f \circ h = g^{-1} \circ f \circ g\} \longrightarrow \{\sigma \text{ permutazione di } Z_{40} \mid f \circ \sigma = \sigma \circ f\}.$$

Chiamiamo D l'insieme di destra. Per ogni permutazione h, l'insieme delle permutazioni g che producono una $g^{-1} \circ f \circ g$ uguale a $h^{-1} \circ f \circ h$ è equipotente all'insieme D. Perciò

$$|C| = \frac{40!}{|D|},$$

e si tratta di determinare la cardinalità di D, ossia dell'insieme delle permutazioni di Z_{40} che commutano con f.

E' conveniente identificare Z_{40} con l'anello delle classi di resto modulo 40,

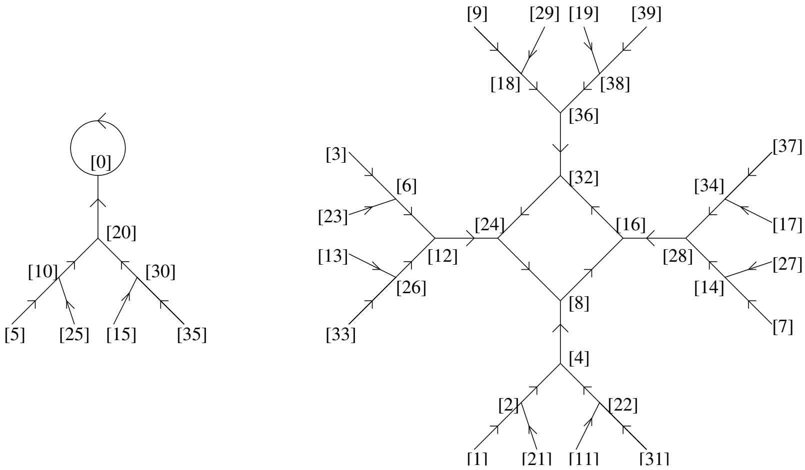
$$Z_{40} = \{[0], [1], \dots, [39]\}.$$

Con tale identificazione, l'applicazione f diventa la moltiplicazione per 2,

$$f([k]) = [2k].$$

L'applicazione f ha un unico punto fisso, [0], ed un'altra sola orbita periodica,

$$[8] \overset{f}{\mapsto} [16] \overset{f}{\mapsto} [32] \overset{f}{\mapsto} [24] \overset{f}{\mapsto} [8] \dots$$



Costruiamo un grafo orientato i cui vertici sono gli elementi di Z_{80}, e in cui mettiamo un lato orientato da $[h]$ a $[k]$ se e solo se $f([h]) = [k]$. Otteniamo il grafo rappresentato sopra.

Se f commuta con σ, allora anche f^n, l'n-esima iterata di f, commuta con σ. Da ciò si deduce facilmente che $\sigma \in D$ se e solamente se definisce un automorfismo del grafo orientato costruito sopra. Il sottografo di sinistra deve pertanto essere mandato in sé, e ci sono 8 modi di farlo (si possono scmbiare [10] con [30], e corrispondentemente scambiare [5] con [25] e [15] con [35]). Per quanto riguarda il sottografo di destra, il ciclo $([8], [16], [32], [24])$ può essere traslato in 4 modi possibili ([8] puó essere mandato in uno dei quattro elementi dell'orbita periodica, e questa scelta determina il destino di [16], [32], e [24]). I quattro grafi che arrivano nei quattro elementi dell'orbita periodica vengono traslati allo stesso modo, e ciascuno di essi può essere mandato nel grafo di pertinenza in 8 modi possibili (ciascuno di essi è isomorfo al grafo di sinistra). Mettendo assieme tutti questi fatti vediamo che D ha cardinalità $8 \cdot 4 \cdot 8^4 = 2^{17}$. Quindi

$$|C| = \frac{40!}{2^{17}}.$$

Esercizio 2. Sia $f(x) := x^2 e^x$.

(a) Dire se f ammette massimo o minimo sull'intervallo $]-\infty, -1]$.

(b) Discutere al variare di $t \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni reali dell'equazione $f(x) = t$.

(c) Mostrare che esiste un unico dato t per cui l'equazione $f(x) = t$ ha esattamente tre soluzioni $a < b < c$ con la proprietà che $c - b = b - a$. Si provi che in tal caso vale anche la relazione $ac + b^2 = 0$

Soluzione. La derivata di f,

$$f'(x) = x(x+2)e^x,$$

è positiva in $]-\infty,-2[$ e $]0,+\infty[$, negativa in $]-2,0[$, e nulla in -2 e 0. Quindi f è strettamente crescente su $]-\infty,-2]$, strettamente decrescente su $[-2,0]$, e strettamente crescente su $[0,+\infty[$. Inoltre f è sempre positiva, tranne che in 0 dove si annulla, e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

(a) Dallo studio precededente segue che f ammette massimo $f(-2) = 4e^{-2}$ su $]-\infty,-1]$, ma che non ammette minimo su tale intervallo, poichè l'estremo inferiore di f su tale intervallo è 0, valore che non viene assunto in $]-\infty,-1]$.

(b) Dallo studio precedente e dal teorema degli zeri segue che l'equazione $f(x) = t$ non ha soluzioni se $t < 0$, ha una soluzione se $t = 0$, ha tre soluzioni se $0 < t < 4e^{-2}$, ha due soluzioni se $t = 4e^{-2}$, e ha una soluzione se $t > 4e^{-2}$.

(c) Per la discussione del punto (b), il t di cui vogliamo dimostrare esistenza ed unicità deve essere cercato nell'intervallo $]0,4e^{-2}[$. Siano

$$h_1 :]0,4e^{-2}] \to]-\infty,-2], \quad h_2 : [0,4e^{-2}] \to [-2,0], \quad h_3 : [0,+\infty[\to [0,+\infty[,$$

le funzioni inverse delle restrizioni di f agli intervalli $]-\infty,-2]$, $[-2,0]$, e $[0,+\infty[$. La h_1 e la h_3 sono strettamente crescenti, mentre la h_2 è strettamente decrescente. Tutte e tre le funzioni sono continue e surgettive, per il teorema di continuità dell'inversa e per il teorema degli zeri. Vogliamo dimostrare che esiste un unico $t \in]0,4e^{-2}[$ tale che

$$c - b = h_3(t) - h_2(t) = h_2(t) - h_1(t) = b - a.$$

Equivalentemente, definendo la funzione

$$g :]0,4e^{-2}] \to \mathbb{R}, \quad g(s) = h_3(s) + h_1(s) - 2h_2(s),$$

vogliamo dimostrare che g ha un unico zero in $]0,4e^{-2}[$. Dato che $h_1, h_3, -2h_2$ sono strettamente crescenti, la funzione g è strettamente crescente, perciò ha al più uno zero. Inoltre g è continua, e

$$\begin{aligned}\lim_{s\to0} g(s) &= \lim_{s\to0}(h_1(s) + 0 - 2\cdot 0) = -\infty,\\ g(4e^{-2}) &= -2 + h_3(4e^{-2}) - 2\cdot(-2) = h_3(4e^{-2}) + 2 > 0,\end{aligned}$$

quindi g ha almeno uno zero. Concludiamo che esiste unico $t \in]0,4e^{-2}[$ tale che $g(t) = 0$, come richiesto. Detti $a = h_1(t)$, $b = h_2(t)$, $c = h_3(t)$, si ha $f(a) = f(b) = f(c) = t$, cioè

$$a^2e^a = b^2e^b = c^2e^c,$$

da cui, moltiplicando il primo membro per il terzo ed uguagliando il risultato al quadrato del secondo,

$$a^2c^2e^{a+c} = b^4e^{2b}.$$

Dato che $a+c = 2b$, si ha $a^2c^2 = b^4$, che tenuto conto dei segni di a, b, c ($a < 0$, $b < 0$, $c > 0$), implica $ac = -b^2$, ossia $ac + b^2 = 0$.

Esercizio 3. Data la funzione

$$F(x) = \log(1 + \sin x) - \sin \log(1 + x),$$

dire se 0 è punto di massimo locale, di minimo locale, oppure nessuna delle due cose.

Soluzione. Usiamo la formula di Taylor per sviluppare F in 0 a meno di $o(x^4)$. Osserviamo che in una composizione di funzioni è in genere conveniente iniziare a sviluppare la funzione più esterna. Dagli sviluppi $\log(1+y) = y - y^2/2 + y^3/3 - y^4/4 + o(y^4)$ e $\sin y = y - y^3/6 + o(y^4)$ per $y \to 0$ otteniamo

$$\begin{aligned} F(x) = \log(1 + \sin x) - \sin \log(1 + x) &= \sin x - \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{4}\sin^4 x + o(\sin x^4) \\ &\quad - \log(1+x) + \frac{1}{6}\log^3(1+x) + o(\log^4(1+x)) \\ &= \sin x - \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{4}\sin^4 x - \log(1+x) + \frac{1}{6}\log^3(1+x) + o(x^4), \end{aligned}$$

per $x \to 0$, dove abbiamo usato anche il fatto che $\sin x \sim \log(1 + x) \sim x$ per $x \to 0$. Proseguendo con gli sviluppi, troviamo

$$\begin{aligned} F(x) &= x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x + o(x^2)\right)^3 - \frac{1}{4}\left(x + o(x^2)\right)^4 \\ &\quad - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + o(x^4) + \frac{1}{6}\left(x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)^2 + o(x^4) \\ &= x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4) \\ &= -\frac{1}{12}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

Quindi $F(x) = -x^4/12 + o(x^4)$ per $x \to 0$, da cui 0 è un punto di massimo locale.

Soluzione Compito Analisi I - 31 gennaio 2006

Esercizio 1.

1. In quanti modi possiamo distribuire 120 caramelle tutte uguali tra 60 bambini in modo che ciascun bambino ne abbia 1 oppure 4?

2. In quanti modi possiamo distribuire 60 figurine tutte diverse tra 60 bambini in modo che ciascun bambino ne abbia 0 oppure 3?

Soluzione. (a) Detto n rispettivamente m il numero di bambini con 1 rispettivamente 4 caramelle, si deve avere $n + m = 60$ e $n + 4m = 120$, da cui $n = 40$ e $m = 20$. Quindi 20 bambini fortunati avranno 4 caramelle, mentre gli altri 40 ne avranno solamente una. I modi con cui si può effettuare la distribuzione sono quindi tanti quanti sono i sottoinsiemi di 20 elementi (i fortunati) di un insieme di 60 elementi (tutti i bambini), cioè $\binom{60}{20}$.

(b) Come prima, 20 bambini riceveranno 3 figurine, mentre i rimanenti 40 non ne riceveranno alcuna. Ci sono $\binom{60}{20}$ possibili sottoinsiemi di 20 fortunati, e per ciascun sottoinsieme dobbiamo calcolare il numero di modi di distribuire le 60 figurine ai bambini del sottoinsieme. Si tratta cioè di calcolare il numero delle *partizioni ordinate* di un insieme I_{60} di 60 elementi composte da 20 sottoinsiemi di 3 elementi. A ciascuno dei 60! ordinamenti di I_{60} possiamo associare una partizione ordinata raggruppando i primi tre elementi, poi i secondi tre, e cosí via. Otteniamo cosí tutte le possibili partizioni ordinate, ma ciascuna di esse viene contata più volte, poiché possiamo permutare i primi tre elementi tra loro, i secondi tre, e cosí via. Si hanno cioè $(3!)^{20} = 6^{20}$ ripetizioni, quindi il numero delle partizioni ordinate in questione è $60!/6^{20}$. Concludiamo che il numero dei modi richiesto è

$$\binom{60}{20}\frac{60!}{6^{20}}.$$

Esercizio 2. Determinare l'insieme dei numeri complessi z tali che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\frac{(i+z)^n}{z^n}$$

risulti convergente. Per tali z calcolare la somma della serie.

Soluzione. Ponendo $w = (i + z)/z$, la serie risulta una serie di potenze in w,

$$\sum_{n=0}^{\infty} nw^n.$$

Dato che $\sqrt[n]{n} \to 1$, questa serie ha raggio di convergenza 1. Inoltre non converge in alcun punto del bordo del disco di convergenza: se $|w| = 1$ la successione nw^n non è limitata. Quindi la serie data converge per tutti e soli gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $|(i + z)/z| < 1$. Equivalentemente, $|i + z|^2 < |z|^2$, ossia

$$(\operatorname{Re} z)^2 + (1 + \operatorname{Im} z)^2 < (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2,$$

cioè $\operatorname{Im} z < -1/2$. Quindi la serie data converge se e solamente se z appartiene al semipiano aperto

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < -1/2\}.$$

Derivando per serie, si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} n w^n = w \sum_{n=0}^{\infty} n w^{n-1} = w D \left(\sum_{n=0}^{\infty} w^n \right) = w D \frac{1}{1-w} = \frac{w}{(1-w)^2},$$

per $|w| < 1$. Quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \frac{(i+z)^n}{z^n} = \frac{i+z}{z} \left(1 - \frac{i+z}{z} \right)^{-2} = \frac{i+z}{z} \frac{z^2}{(-i)^2} = -z(i+z).$$

Esercizio 3. Dato l'intero $n \geq 2$, si consideri l'equazione

$$n \sin x = (n-1)x. \tag{1}$$

1. Dimostrare che (1) ha un'unica soluzione positiva x_n.

2. Dimostrare che la successione (x_n) è decrescente ed infinitesima.

3. Determinare il numero reale α tale che

$$x_n = \frac{\alpha}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \quad \text{per } n \to \infty.$$

Soluzione. (a) Consideriamo la funzione $f(x) = (\sin x)/x$, prolungata per continuità ponendo $f(0) = 1$. Si tratta di dimostrare che esiste un unico $x_n > 0$ tale che $f(x_n) = 1 - 1/n$. Per $x \geq \pi$ si ha

$$f(x) \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\pi} < \frac{1}{3} < 1 - \frac{1}{n},$$

poichè $n \geq 2$. La funzione f è continua, vale 1 in 0 e 0 in π, quindi il teorema degli zeri ci garantisce che esiste $x_n \in]0, \pi[$ tale che $f(x_n) = 1 - 1/n$. La derivata di f è

$$f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\sin x}{x} \left(\operatorname{cotan} x - \frac{1}{x} \right).$$

Se $x \in]0, \pi[$, $(\sin x)/x$ è positivo e $\operatorname{cotan} x - 1/x$ è negativo (segue dal fatto che $\tan x > x$ in $]0, \pi/2[$). Quindi $f' < 0$ in $]0, \pi[$, da cui f è strettamente decrescente in $[0, \pi]$, ed il punto dove f vale $1 - 1/n$ è unico.

(b) Per quanto visto sopra la funzione f è strettamente decrescente in $[0, \pi]$, e l'immagine di tale intervallo è $[0, 1]$. Detta g l'inversa di f in tale intervallo, g è ancora strettamente decrescente. La successione $1 - 1/n$ cresce strettamente ed ha limite 1, da cui $x_n = g(1 - 1/n)$ decresce strettamente ed ha limite $g(1) = 0$.

(c) Usando lo sviluppo $\sin x = x - x^3/6 + o(x^3)$ per $x \to 0$, l'identità $f(x_n) = 1 - 1/n$ implica

$$1 - \frac{x_n^2}{6} + o(x_n^2) = 1 - \frac{1}{n},$$

per $n \to \infty$. Quindi

$$(1 + o(1))x_n^2 = \frac{6}{n},$$

da cui

$$x_n = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{n}}(1 + o(1))^{-1/2} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{n}}(1 + o(1)) = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

per $n \to \infty$. Concludiamo che $\alpha = \sqrt{6}$.