ANALISI I - 18.12.2002 - Secondo compitino[1]

1. Si calcoli
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{1+n^2}}{n}\right)^{n^2}.$$

2. Dire se converge la serie
$$\sum_{k=1}^{+\infty}[1-k\sin(1/k)].$$
e fornire una maggiorazione (motivandola!).

3. Calcolare
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{3}+\sqrt[n]{5}+\sqrt[n]{7}}{3}\right)^{n}.$$
[Facoltativo] Si cerchi una formula che generalizzi questo limite.

4. Sia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1, \qquad (*)$$
$$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=\ell\in\bar{\mathbb{R}}; \qquad (**)$$
si mostri che allora $\ell=0$.

5. Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞;
   (a) si dimostri che se f ha tre zeri in $[a,b]$ allora esiste $\bar{x}\in(a,b)$ tale che $f''(\bar{x})=0$;
   (b) piú in generale si dimostri che se f ha n zeri in $[a,b]$ allora esiste $\bar{x}\in(a,b)$ tale che $f^{(n-1)}(\bar{x})=0$.

---

[1] I risultati del compito saranno presto (?!) disponibili all'indirizzo

*www.dm.unipi.it/~carminat/*2002

Può darsi che, verso gennaio, allo stesso indirizzo troviate una prima schematica versione degli appunti del corso.

ANALISI I - Primo semestre - 9.01.2002

1. Ordinare (se possibile) le seguenti funzioni in modo che ciascuna sia un o-piccolo della successiva per $x \to +\infty$:

$$a(x) = (\log x)^x, \quad b(x) = x^{\sqrt{x}}, \quad c(x) = x^{\log x}, \quad d(x) = (2 + \cos x \sin x)^x.$$

2. Dire se converge la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 1/k(k^{1/k} - 1).$$

3. Si considerino le funzioni

$$f(x) := \sin(\sin(x^2)) - \sin(x^2),$$

$$g(x) := x \sin(\sin x) - (\sin x)^2,$$

$$h(x) := x^2 \sin(\sin(\sin x)) - (\sin x)^3,$$

e per ciascuna di esse si dica se 0 sia un punto di massimo locale oppure un punto di minimo locale o entrambe le cose o nè l'una nè l'altra.

4. Sia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte. Si provi che esiste un punto $\xi \in \mathbb{R}$ con $0 < \xi < 2$ per cui $u(2) - 2u(1) + u(0) = u''(\xi)$.

ANALISI I - Primo semestre - 30.01.2003

1. Si dica se converge la serie
$$\sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{1}{k} - \sin\frac{1}{k}).$$

2. Sia $a > 0$ un parametro reale. Si calcoli al variare di a il limite (qualora esista)
$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log(1+a^k)$$
Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ converge la serie
$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k}\log(1+a^k)$$

3. Sia $u \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ una funzione tale che
$$\begin{array}{l} |u(t)| \leq \ell \\ |u''(t)| \leq g \end{array} \quad \forall\ t \in \mathbb{R}.$$
Si dimostri che allora $|u'(t)|$ è limitata e più precisamente vale la stima
$$|u'(t)| \leq 2\sqrt{g\ell}.$$
[Sugg: può essere utile usare la formula di Taylor.]

ANALISI I - Primo compitino del secondo semestre - 2.04.2003

1. Si consideri la funzione
$$f(x) = x^3 + bx + c.$$
   (a) Dire per quali valori dei parametri b e c la funzione f ammette massimi e/o minimi locali.
   (b) Dire per quali valori dei parametri b e c l'equazione $f(x) = 0$ ammette tre soluzioni reali distinte.

2. Si trovi una primitiva delle seguenti funzioni:
$$f(x) = \frac{\log^2 x}{x}, \qquad g(x) = \frac{1}{x^3 - 1}.$$

3. Si dica per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ la funzione
$$h_a(x) = \frac{1 + a\cos^2 x}{3 + x}$$
è intergrabile in senso improprio sull'intervallo illimitato $[0, +\infty[$.

ANALISI II - Secondo compitino del secondo semestre - 28.05.2003

1. Trovare una soluzione $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = \sin u(t) \\ u(0) = \pi/2 \end{cases}$$

2. Provare che $\forall x > 0$ l'equazione

$$(1+x)e^y = xy^2$$

ammette una unica soluzione $y \in \mathbb{R}$.

Si studi la soluzione $y = y(x)$ come funzione della variabile x.

3. Si calcoli il limite per $\lambda \to 0^+$ e $\lambda \to +\infty$ della funzione

$$f(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{-1}^{1} e^{-\lambda x^2}\, dx$$

ANALISI I

–12.06.2003–

1. (a) Mostrare che l'equazione
$$x = ne^{-x}$$
ammette un'unica soluzione $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1$.

   (b) Detta x_n tale soluzione si mostri che
$$\lim x_n = +\infty$$

   (c) Più precisamente si mostri che $x_n = \log n + o(\log n)$.

   (d) Si aumenti la precisione nella stima precedente mostrando che
$$x_n = \log n - \log\log n + o(1).$$

   (e) [1] Si discuta la convergenza delle serie seguenti:
$$\sum_{k=1}^{+\infty} 1/x_n \ , \quad \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-x_n} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-x_n^2} \ .$$

2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\phi^+(x) := f(x) + x^2/2$ risulti essere una funzione convessa mentre $\phi^-(x) := f(x) - x^2/2$ risulti essere una funzione concava. Si dimostri che allora

   (a) f è continua;

   (b) f è derivabile;

   (c) $|f'(x) - f'(y)| \leq |x - y|$.

[1] Questo punto può essere affrontato anche dando per acquisiti i risultati dei punti precedenti.

ANALISI II

–12.06.2003–

3. Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $u''-u = 1/t$ definite sull'intervallo $(0, +\infty)$. Dire se esistono soluzioni di questa equazione tali che che $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$ e, nel caso, determinarle.

4. (a) Si mostri che le funzioni $u_k(x) := x^k \log x$ sono tutte integrabili (in senso improprio) sull'intervallo $[0, 1]$ e si calcoli $\int_0^1 x^k \log x \; dx \quad \forall k \geq 0$.

   (b) Si mostri che le funzioni $r_m(x) := \frac{x^m}{1-x} \log x$ sono tutte integrabili (in senso improprio) sull'intervallo $[0, 1]$ e si calcoli $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^m}{1-x} \log x \; dx$.

   (c) Si calcoli il valore
   $$\int_0^1 \frac{\log x}{1-x} \; dx.$$
   [Sugg: si approssimi la funzione $1/(1-x)$ mediante il suo polinomio di Taylor di ordine m e successivamente si passi al limite.]

ANALISI I

–3.07.2003–

1. Dire per quali valori del parametro $t \in \mathbb{R}$ risulta convergente la serie
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{3e^t}{e^{2t}+1} \right)^k .$$
Si scriva la somma della serie per tali valori del parametro.

2. Sia consideri l'espressione
$$f(x) := \frac{1}{x \tan x} - \frac{1}{x^2}.$$
   (a) Si mostri che f definisce una funzione estendibile per continuità nell'origine.

   (b) Si studi la funzione in un intorno dell'origine, in particolare si dica se l'origine e' punto di massimo o minimo locale per la funzione estesa per continuità.

ANALISI II

–3.07.2003–

3. Sia $N(r) := \#\{(h,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \ : \ h^2 + k^2 \leq r^2\}$

   (a) Si mostri che
   $$\lim_{r\to+\infty} \frac{N(r)}{r^2} = \pi/4.$$

   (b) Più precisamente si mostri che vale una stima del tipo
   $$0 \leq \frac{\pi r^2}{4} - N(r) \leq Cr$$
   con C una opportuna costante positiva.

4. Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione differenziale
   $$u''' - 6u'' + 9u' = t^2 e^{3t}$$
   e si dica quali di queste sono limitate sull'intervallo $(-\infty, 0)$.

ANALISI I

–14.11.2003–

1. Si consideri la successione definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} &= 2a_n + a_{n-1} \\ a_0 &= 0 \\ a_1 &= 1 \end{cases}$$

(i) Si mostri che $a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2 = (-1)^n$.

(ii) Si mostri che se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ l'insieme

$$D := \{a_{n+1}a_{n-1} + \alpha a_n^2 \ : \ n \in \mathbb{N}\}$$

non è limitato.

2. Sia $I_n := \{k \in \mathbb{N} \ : \ 1 \leq k \leq n\}$;

(i) Si dica quante sono le funzioni $f : I_n \to I_m$ crescenti ed iniettive.

(ii) Si dica quante sono le funzioni $f : I_n \to I_m$ crescenti e surgettive.

(iii) Si provi che le funzioni $f : I_n \to I_m$ crescenti sono $\binom{n+m-1}{n}$.

NB: una $f : I_n \to I_m$ si dice *crescente* se vale $f(k) \leq f(h)$ per ogni h e k con $k \leq h$.

3. (i) Si trovi un espressione esplicita per i prodotti

$$\prod_{k=n+1}^{2n} (1 + \frac{1}{k}), \qquad \prod_{k=n+1}^{2n} (1 - \frac{1}{k}).$$

(ii) Si mostri che l'insieme

$$A := \{ \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \quad : \quad n \in \mathbb{N}^+\}$$

è limitato; si dica inoltre se questo insieme ammette massimo o minimo.

(iii) Detto $\alpha := \sup A$, si mostri che $\exp(\alpha) \geq 2$.

(iv) Si mostri che in realtà $\exp(\alpha) = 2$.

Gli esercizi valgono, rispettivamente, 10, 11, 12 punti; il punteggio all'interno di ogni esercizio è equidistribuito.

È ammesso rispondere ad una domanda di un esercizio anche dando per acquisiti i risultati enunciati nei punti precedenti.

ANALISI I

–18.12.2003–

1. Si mostri che la successione definita dalla ricorrenza
$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = -\sin(x_n) \end{cases}$$
ammette limite.
Si discuta la convergenza e la convergenza assoluta della serie
$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n.$$
Si calcoli la parte intera del numero $s := \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$.

2. Si calcoli
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2 - i\pi n + 1}{n^2 + i\pi n + 1} \right)^n.$$
Piú in generale: siano
$$P(x) = x^h + a_1 x^{h-1} + a_2 x^{h-2} + ... + a_{h-1}x + a_h$$
$$Q(x) = x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + ... + b_{m-1}x + b_m$$
due polinomi a coefficenti complessi; si dica sotto quali condizioni sul grado e sui coefficienti di P e di Q la successione
$$z_n = \left(\frac{P(n)}{Q(n)} \right)^n$$
converge in $\mathbb{C}$.

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(x) \geq x^2$.
   (i) Si mostri che f ammette minimo su $\mathbb{R}$.
   (ii) Si mostri che per ogni $m \geq f(1)$ esiste un $x \in [1, m]$ tale che $f(x) = mx$.

Ciascun esercizio vale 11 punti.
È ammesso rispondere ad una domanda di un esercizio anche dando per acquisiti i risultati enunciati nei punti precedenti.
La correzione sarà alle ore 12.00, alla fine del compito.

I risultati, non appena disponibili, verranno messi in rete all'indirizzo `http://www.dm.unipi.it/~carminat/2003/index.html`.

ANALISI I

–29.01.2004–

1. Si discuta, al variare del parametro reale λ, la convergenza della serie[1]
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(\pi k)}{k(\cos(\pi k) + \lambda)}.$$

2. Si consideri la successione definita da
$$\begin{cases} x_0 = \alpha \geq 0 \\ x_{n+1} = \dfrac{2x_n}{x_n + 1} \end{cases}$$
   (a) Si trovi una espressione esplicita (in n ed α) per x_n.

   (b) Si dica per quali valori del parametro α la successione x_n ammette limite e, nel caso, lo si determini.

3. Sia $\{a_k \ : \ k \in \mathbb{N}\}$ un sottoinsieme (numerabile) della retta reale e si definisca $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ come
$$f(x) = \sum_{\{k \in \mathbb{N} \ : \ a_k \leq x\}} 2^{-k}.$$
   (a) Si mostri che f è limitata e (debolmente) crescente.

   (b) Si mostri che esistono i limiti
$$\lim_{x \to -\infty} f(x), \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x)$$
   e li si calcoli.

   (c) Si mostri che f non è continua in $x = a_k$ per nessun valore di $k \in \mathbb{N}$.

   (d) Viceversa, si mostri che se $x_0 \neq a_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ allora f è continua in x_0.

---

[1]Serie di J.B. Del Pollo (1713–1839).

ANALISI I

–31.03.2004–

Rispondere ai quesiti giustificando le risposte.

1. Si consideri l'equazione
$$x = \tan x, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{1}$$
   (i) Provare che per ogni $k \in \mathbf{Z}$ esiste un'unica soluzione di (1) nell'intervallo $(k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2)$.
   (ii) Trovare due costanti $a,\ b$ tali che, detta x_k la soluzione del punto precedente, valga lo sviluppo $x_k = ak + b + o(1)$ per $k \to +\infty$.
   (iii) Trovare una terza costante c tale che valga lo sviluppo $x_k = ak+b+c/k+o(1/k)$ per $k \to +\infty$.

2. Sia $g_\lambda(x) := e^{-x}(1+x)^{1+\lambda x}$.
   (i) Si determini il parametro reale λ in modo che esista e sia finito il limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log g_\lambda(x)}{x^3}$$
   (ii) Si dica per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ l'origine è un punto di minimo locale per g_λ.
   (iii) Si dica per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha che $g_\lambda(x) > 1$ per ogni $x > 0$.

3. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x) := \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x \sin \frac{1}{x} & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$
   (i) La funzione f è uniformemente continua? È lipschitziana?
   (ii) Determinare $C \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $x,\ y \in [0,1]$ si abbia
$$|f(y) - f(x)| \leq C|y-x|^{1/2} \tag{2}$$
   [Suggerimento: si verifichi la disuguaglianza (2) per $0 \leq x < y \leq 1$ distinguendo i due casi $x \geq |y-x|^{1/2}$ e $x \leq |y-x|^{1/2}$.]
   (iii) Determinare $\delta > 0$ in modo che per ogni partizione di Riemann $\mathcal{P}$ dell'intervallo $[0,1]$ tale che $|\mathcal{P}| < \delta$ si abbia
$$S(\mathcal{P}, f) - \int_0^1 f(x)\ dx < 10^{-6}.$$

ANALISI I

–31.03.2004–

1. Si consideri l'equazione
$$x = \tan x, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

   (i) Provare che per ogni $k \in \mathbf{Z}$ esiste un'unica soluzione di (1) nell'intervallo $I_k := (k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2)$.

   `Sia` $H(x) := \tan x - x$, $k \in \mathbf{Z}$ `fissato. Osserviamo che:`

$$\left.\begin{array}{l} H : I_k \to \mathbb{R} \text{ è continua;} \\ \sup\limits_{x\in I_k} H(x) = +\infty, \quad \inf\limits_{x\in I_k} H(x) = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow H : I_k \to \mathbb{R} \text{ è surgettiva}$$

$$H'(x) = \tan^2 x \geq 0 \qquad \Rightarrow H : I_k \to \mathbb{R} \text{ è iniettiva.}$$

   `(La prima implicazione è una diretta conseguenza del teorema degli zeri; la seconda segue dal fatto che, per il teorema di Lagrange,` H `è monotona crescente su` I_k `inoltre la monotonia è stretta perchè se esistessero valori` $a, b \in I_k$ `tali che` $a < b$ `e` $H(a) = H(b)$ H `sarebbe costante su` $[a, b]$ `e di conseguenza` $H'(x) = 0$ `su` $]a, b[$`, ma ciò non si verifica in quanto` H' `non si annulla su alcun intervallo aperto.)`

   `Quindi` $H : I_k \to \mathbb{R}$ `è bigettiva, di conseguenza esiste un unico` $x_k \in I_k : H(x_k) = 0$ `cioè tale che` $\tan x_k = x_k$.

   (ii)+(iii) Trovare tre costanti a, b e c tali che, detta x_k la soluzione del punto precedente, valga lo sviluppo $x_k = ak + b + c/k + o(1/k)$ per $k \to +\infty$.

   `Sia` $k > 0$. `Per costruzione` $x_k \in I_k$, `anzi` $k\pi < x_k < k\pi + \pi/2$. `Sia` $y_k := k\pi + \pi/2 - x_k$ `quindi` $x_k := k\pi + \pi/2 - y_k$ `e` $y_k \in]0, \pi/2[$. `Poichè`

$$x_k = \tan x_k = \tan(k\pi + \pi/2 - y_k) = \tan(\pi/2 - y_k) = \frac{1}{\tan y_k}$$

   `si ha` $y_k = \arctan(\frac{1}{x_k})$ `ma`

$$\frac{1}{k\pi + \pi/2} < \frac{1}{x_k} < \frac{1}{k\pi} \Rightarrow \frac{1}{x_k} = \frac{1}{k\pi} + o(\frac{1}{k}) \qquad k \to +\infty$$

   `e quindi, visto che` $\arctan y = y + o(y)$ $(y \to 0)$,

$$y_k = \arctan(\frac{1}{k\pi} + o(\frac{1}{k})) = \frac{1}{k\pi} + o(\frac{1}{k}).$$

   `Dunque` $x_k = k\pi + \pi/2 - 1/(k\pi) + o(1/k)$.

2. Sia $g_\lambda(x) := e^{-x}(1+x)^{1+\lambda x}$.

(i) Si determini il parametro reale λ in modo che esista e sia finito il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log g_\lambda(x)}{x^3}$$

$$\begin{aligned} f_\lambda(x) := \ & \log g_\lambda(x) = (1+\lambda x)\log(1+x) - x \\ = \ & (1+\lambda x)(x - x^2/2 + x^3/3 + o(x^3)) - x \\ = \ & x - x^2/2 + x^3/3 + o(x^3) + \lambda x^2 - \lambda x^3/2 + o(x^3) - x \\ = \ & (\lambda - 1/2)x^2 + (1/3 - \lambda/2)x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

È ora evidente che se $\lambda \neq 1/2$ il limite $\lim_{x\to 0} \frac{\log g_\lambda(x)}{x^3}$ non esiste mentre

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_{\frac{1}{2}}(x)}{x^3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

(ii) Si dica per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ 0 è un punto di minimo locale per g_λ.

0 è punto di minimo locale per $g_\lambda \iff$ 0 è punto di minimo locale per f_λ. Ma dallo sviluppo ottenuto al punto precedente si deduce che:

$$\begin{cases} \lambda > 1/2 \Rightarrow \ \text{0 è punto di minimo locale per } f_\lambda \\ \lambda = 1/2 \Rightarrow \text{vicino a 0 il segno di } f_\lambda(x) \text{ coincide con quello di } x^3 \\ \lambda < 1/2 \Rightarrow \ \text{0 è punto di massimo locale per } f_\lambda \end{cases}$$

Pertanto 0 è punto di minimo locale per $g_\lambda \iff \lambda > 1/2$

(iii) Si dica per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha che $g_\lambda(x) > 1$ per ogni $x > 0$.

$$g_\lambda(x) > 1 \ \ \forall x > 0 \iff f_\lambda(x) > 0 \ \ \forall x > 0.$$

Da (ii) $f_\lambda(x) > 0 \Rightarrow \lambda \geq 1/2$. Derivando f_λ otteniamo

$$f'_\lambda(x) = \lambda \log(1+x) + \frac{1+\lambda x}{1+x} - 1, \qquad f''_\lambda(x) = \frac{2\lambda + \lambda x - 1}{(1+x)^2}$$

Per $\lambda \geq 1/2$ $f_\lambda(0) = 0$, $f'_\lambda(0) = 0$ e $f''_\lambda(x) > 0$ su $x > 0$; scrivendo la formula di Taylor con resto di Lagrange si ottiene

$$f_\lambda(x) = f''_\lambda(\xi)x^2, \qquad 0 < \xi < x$$

e dunque $f_\lambda(x) > 0$ per $x > 0$.

3. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) := \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x \sin \frac{1}{x} & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

(i) La funzione f è uniformemente continua? È lipschitziana?

La funzione f è uniformemente continua in quanto è una funzione continua sull'intervallo chiuso e limitato [0,1]. La funzione **non** è lipschitziana in quanto $f'(x) = \sin(\dfrac{1}{x}) - \dfrac{1}{x}\cos(\dfrac{1}{x})$ non è limitata su $(0,1)$, in quanto $f'(\frac{1}{2k\pi}) = 2k\pi \to +\infty$, $k \to \infty$.

(ii) Determinare $C \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $x,\ y \in [0,1]$ si abbia

$$|f(y) - f(x)| \leq C|y-x|^{1/2} \tag{2}$$

[Suggerimento: si verifichi la disuguaglianza (2) per $0 \leq x < y \leq 1$ distinguendo i due casi $x \geq |y-x|^{1/2}$ e $x \leq |y-x|^{1/2}$.]

Non è restrittivo supporre (come sugg.) $0 \leq x < y \leq 1$.
Se $x \leq |y-x|^{1/2}$ allora

$$|f(y)-f(x)| \leq |f(y)|-|f(x)| \leq y+x = y-x+2x \leq |y-x|^{1/2}(|y-x|^{1/2}+2) \leq 3|y-x|^{1/2}$$

Se $x \geq |y-x|^{1/2}$ si prenda $x < \xi < y$ tale che

$$|f(y)-f(x)| = |f'(\xi)||x-y| \leq y-x+\frac{y-x}{x} \leq |y-x|^{1/2}(|y-x|^{1/2}+1) \leq 2|y-x|^{1/2}.$$

Pertanto l'equazione (2) è in ogni caso verificata se $C = 3$.

(iii) Determinare $\delta > 0$ in modo che per ogni partizione di Riemann $\mathcal{P}$ dell'intervallo $[0,1]$ tale che $|\mathcal{P}| < \delta$ si abbia

$$S(\mathcal{P}, f) - \int_0^1 f(x)\ dx < 10^{-6}.$$

$$S(\mathcal{P}, f) - \int_0^1 f(x)\ dx \leq S(\mathcal{P}, f) - s(\mathcal{P}, f) \leq \omega(|\mathcal{P}|) \qquad \text{con } \omega(t) = 3t^{1/2}.$$

Pertanto basterà che $3|\mathcal{P}|^{1/2} < 10^{-6}$ condizione che sarà verificata se $\delta = 10^{-13}$.

ANALISI II

–26.05.2004–

Rispondere ai quesiti giustificando le risposte.

1. Si trovi la soluzione u_λ del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = 1 + \lambda \sin u, \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

al variare del parametro $\lambda \in]0, 1[$.
Si calcolino (per ogni $t \in \mathbb{R}$ fissato) i limiti

$$v_0(t) := \lim_{\lambda \to 0^+} u_\lambda(t), \qquad v_1(t) := \lim_{\lambda \to 1^-} u_\lambda(t)$$

e si verifichi che $v_0(t) = u_0(t)$ e $v_1(t) = u_1(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

2. Si studi la funzione $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \arctan(t/x) e^{-t} \, dt \qquad (x > 0)$$

(i) Provare che f è continua, monotona e convessa.

(ii) Calcolare (qualora esistano) i seguenti valori:

$$\lim_{x \to 0} f(x), \quad \lim_{x \to +\infty} f(x), \quad \sup_{x > 0} f(x), \quad \inf_{x > 0} f(x).$$

(iii) Mostrare che f è derivabile e calcolare f'.

ANALISI I

–07.06.2004–

1. Si dimostrino le formule

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n}{2k} = \begin{cases} 0 & n \text{ dispari,} \\ 2^n(-1)^{n/2} & n \text{ pari} \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{2n}{2k+1} = \begin{cases} 0 & n \text{ pari,} \\ 2^n(-1)^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

2. Si ordinino (se possibile) le seguenti successioni in modo che ciascuna sia un o-piccolo della precedente (per $n \to +\infty$).

$$a_n = \log(n!), \qquad b_n = \sqrt[n]{n!}, \qquad c_n = 3^{\log n}, \qquad d_n = \log(2^n + 3^n).$$

3. Si consideri la successione definita da

$$a_n := \prod_{k=1}^{n} \cos(\frac{1}{k}).$$

   (a) Si dica se a_n è limitata.

   (b) Si trovi $C > 0$ tale che $a_n \geq C$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

ANALISI II[1]

–07.06.2004–

1. Si consideri la funzione razionale

$$q(x) = \frac{9}{x^3 - 3x + 2}.$$

   (a) Trovare una primitiva $Q(x)$ di $q(x)$ tale che $Q(0) = 0$.

   (b) Calcolare i coefficenti c_k dello sviluppo $q(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$.

2. Sia

$$f(x) := \int_{\mathbb{R}} \cos(xt) e^{-t^2/2}\ dt.$$

   (a) Provare che, per ogni valore di x, l'integrale improprio è convergente e definisce una funzione continua.

   (b) Calcolare $f(0)$ (ricordando che $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$).

   (c) Dimostrare che f è derivabile.

   (d) Mostrare che f risolve una semplice equazione differenziale lineare; usare tale equazione per calcolare f.

   (e) Calcolare la miglior costante di Lipschitz per f.

[1] Per Analisi I+II si svolga l'intero compito di analisi II.

ANALISI I

–07.06.2004–

1. Si dimostrino le formule

$$a_n := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{2k} = \begin{cases} 0 & n \text{ dispari,} \\ 2^n(-1)^{n/2} & n \text{ pari} \end{cases}$$

$$b_n := \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{2k+1} = \begin{cases} 0 & n \text{ pari,} \\ 2^n(-1)^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

`Definiamo`

$$A_m := \sum_{k\in Z} (-1)^k \binom{m}{2k}, \qquad B_m := \sum_{k\in Z} (-1)^k \binom{m}{2k+1}.$$

Visto che, per definizione, $\binom{m}{h} = 0$ se $h > m$ o se $h < 0$ è chiaro che le somme scritte sopra sono somme finite e che $a_n = A_{2n}$, $b_n = B_{2n}$. Inoltre dalla proprietà $\binom{m+1}{j} = \binom{m}{j} + \binom{m}{j-1}$ segue

$$A_{m+1} = \sum_{k\in Z} (-1)^k \left[\binom{m}{2k} + \binom{m}{2k-1}\right] = \sum_{k\in Z} (-1)^k \binom{m}{2k} + \sum_{h\in Z} (-1)^{h+1} \binom{m}{2h+1} = A_m -$$

$$B_{m+1} = \sum_{k\in Z} (-1)^k \left[\binom{m}{2k+1} + \binom{m}{2k}\right] = A_m + B_m$$

Quindi A_m, B_m soddisfano la ricorrenza

$$\begin{cases} A_{m+1} = A_m - B_m \\ B_{m+1} = A_m + B_m \\ A_0 = 1 \\ B_0 = 0 \end{cases}$$

Ponendo $Z_m = A_m + \mathrm{i}B_m$ possiamo scrivere la formula precedente come $Z_{m+1} = (1+\mathrm{i})Z_m$, $Z_0 = 1$. Quindi è ora evidente che $Z_m = (1+\mathrm{i})^m$ e dunque $a_n = A_{2n}$ e $b_n = B_{2n}$ sono rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria di $(1+\mathrm{i})^{2n} = (2\mathrm{i})^n$ e la tesi segue dalla formula del binomio di Newton.

2. Si ordinino (se possibile) le seguenti successioni in modo che ciascuna sia un o-piccolo della precedente (per $n \to +\infty$).

$$a_n = \log(n!), \qquad b_n = \sqrt[n]{n!}, \qquad c_n = 3^{\log n}, \qquad d_n = \log(2^n + 3^n).$$

Conviene ricordare che $(n/3)^n < n! < n^n$ quindi $\log n! = O(n \log n)$; inoltre $c_n = 3^{\log n} = n^{\log 3}$ e $d_n \sim n \log 3$. Quindi $a_n < n \log n = o(c_n)$ (visto che $\log 3 > 1$); $b_n = O(n) = o(n \log n) = o(a_n)$; per lo stesso motivo anche $d_n = o(a_n)$. Le successioni d_n e b_n hanno entrambe crescita lineare e quindi non possono essere ordinate come richiesto; tuttavia $d_n - b_n \geq n(\log 3 - 1)$ tende a $+\infty$ per $n \to +\infty$. L'ordine secondo la crescita asintotica è quindi: $c_n,\ a_n,\ d_n,\ b_n$.

3. Si consideri la successione definita da

$$a_n := \prod_{k=1}^{n} \cos(\frac{1}{k}).$$

(a) Si dica se a_n è limitata.

Visto che $0 < 1/k \leq 1 < \pi/2$ si avrà $0 < \cos(1/k) < 1 - 1/(2k^2)$. Quindi $a_n > 0$ e $a_n/a_{n-1} = \cos(1/n) < 1$ cioè a_n è decrescente e dunque $0 < a_n \leq \cos(1)$ per ogni $n \geq 1$.

(b) Si trovi $C > 0$ tale che $a_n \geq C$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

$$a_n = \cos(1) \prod_{k=2}^{n} \cos(\frac{1}{k}) \geq \cos(1) \prod_{k=2}^{n} (1 - \frac{1}{k^2}) = \cos(1) \frac{n+1}{2n} \geq \frac{\cos(1)}{2} > 0.$$

ANALISI II[1]

–07.06.2004–

1. Si consideri la funzione razionale
$$q(x) = \frac{9}{x^3 - 3x + 2}.$$
   (a) Trovare una primitiva $Q(x)$ di $q(x)$ tale che $Q(0) = 0$.

   `Per far ciò si scompone` $q(x)$ `in elementi semplici: visto che`$x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$ `cercheremo una scomposizione del tipo` $q(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}$`; risolvendo un semplice sistema lineare otteniamo che` $a = -1,\ B = 3,\ C = 1$ `cioè`
$$q(x) = \frac{-1}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+2} \tag{1}$$
   `quindi la soluzione cercata sarà` $Q(x) = \log\frac{|x+2|}{|x-1|} + \frac{3}{1-x} + D$ `dove,` D `dovrà essere` $D = -(3 + \log 2)$`.`

   (b) Calcolare i coefficenti c_k dello sviluppo $q(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$.

   `Utilizziamo lo sviluppo (1) e osserviamo che`
$$\frac{1}{1-x} = \sum_0^{+\infty} x^k, \qquad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_0^{+\infty}(k+1)x^k, \qquad \frac{1}{2+x} = \sum_0^{+\infty}(-1)^k x^k/2^{k+1}$$
   `quindi` $c_k = 4 + 3k - \frac{1}{(-2)^{k+1}}$`.`

   `Questo sviluppo converge per` $|x| < 1$`.`

2. Sia
$$f(x) := \int_{\mathbb{R}} \cos(xt)e^{-t^2/2}\ dt.$$
   (a) Provare che, per ogni valore di x, l'integrale improprio è convergente e definisce una funzione continua.

   (b) Calcolare $f(0)$ (ricordando che $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$).

   `L'integrale è convergente per il criterio dell'assoluta convergenza:` $|\cos(xt)e^{-t^2/2}| \le e^{-t^2/2}$`, e`
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\ dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\ dt = \sqrt{2}\int_0^{+\infty} s^{-1/2}e^{-s}\ ds = \sqrt{2}\Gamma(1/2)$$
   `La continuità segue dalla lipschitzianità del coseno:`
$$|f(x) - f(y)| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |\cos(xt) - \cos(yt)|e^{-t^2/2}\ dt \le |x| \int_{-\infty}^{+\infty} |t|e^{-t^2/2}\ dt$$

[1] Per Analisi I+II si svolga l'intero compito di analisi II.

(c) Dimostrare che f è derivabile.

`Sia` $\phi_t(x) := \cos(xt)$. `Usando la formula di Taylor con resto di Lagrange otteniamo che`

$$|\phi_t(x+h) - \phi_t(x) - \phi_t'(x)h| = |\phi_t''(\xi)|h^2 \le t^2h^2.$$

`Siamo quindi in grado di mostrare che` $f_1(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_t'(x)e^{-t^2/2}\ dt$ `è la derivata di` f`, infatti`

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x) - f_1(x)h| &= |\int_{-\infty}^{+\infty}[\phi_t(x+h) - \phi_t(x) - \phi_t'(x)h]e^{-t^2/2}\ dt| \\ &\le h^2\int_{-\infty}^{+\infty} t^2e^{-t^2/2}\ dt = O(h^2) \end{aligned}$$

(d) Mostrare che f risolve una semplice equazione differenziale lineare; usare tale equazione per calcolare f.

`Dal punto precedente` $f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} -t\sin(tx)e^{-t^2/2}\ dt = f'(x)$`; integrando per parti`

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(tx)(-te^{-t^2/2})\ dt = -x\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(xt)e^{-t^2/2}\ dt$$

`cioé` $f' = -xf$`, pertanto, usando formula risolutiva delle equazioni lineari del primo ordine,` $f(x) = \sqrt{2\pi}e^{-x^2/2}$.

(e) Calcolare la miglior costante di Lipschitz per f.

`La miglior costante di Lipschitz è`

$$C = \sup\{|f'(x)| \ :\ x \in \mathbb{R}\} = \sqrt{2\pi/e}.$$

ANALISI I

–28.06.2004–

1. (a) Si dica quanti sono i poligoni convessi (non degeneri) che si possono costruire usando i vertici di un ottagono regolare.

   (b) Si dica quanti sono tutte le spezzate chiuse che si possono costruire usando i vertici di un ottagono regolare.

2. Si calcoli

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{\log(n+1)}{\log n}\right]^n.$$

3. Sia

$$f_n(x) := e^{-nx}, \qquad n\in\mathbb{N}^*.$$

   (a) Si mostri che l'equazione $f_n(x) = x^2$ ammette una unica soluzione positiva.

   (b) Detta α_n la soluzione positiva dell'equazione $f_n(x) = x^2$, si trovino stime per il valore di α_n che permettano di studiare la convergenza delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_n, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_n^2.$$

ANALISI II[1]

–07.06.2004–

1. Sia
$$w_n := \frac{n + i\lambda}{n - i\lambda}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$
   (a) Mostrare che w_n è limitata; determinare $\theta_n \in \mathbb{R}$ tale che $w_n = e^{i\theta_n}$
   (b) Dire per quali valori del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ la successione $(w_n)^{n^2}$ converge per $n \to +\infty$.

2. Sia
$$\varphi_a(x) := \frac{(1+2x)^a - (1+x)^a}{x}, \qquad a > 0.$$
   (a) Calcolare $\lim_{x\to 0} \varphi_a(x)$.
   (b) Studiare la monotonia di $\varphi_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ precisando per quali a è crescente.

3. Si trovino, usando il metodo della variazione delle costanti, tutte le soluzioni della equazione differenziale
$$u'' - u = \frac{1}{e^t + e^{-t}}.$$
   Si mostri che ne esiste una ed una sola limitata su tutto $\mathbb{R}$.

[1]Per Analisi I+II si svolga l'intero compito di analisi II.

ANALISI I

–28.06.2004–

1. (a) Si dica quanti sono i poligoni convessi (non degeneri) che si possono costruire usando i vertici di un ottagono regolare.

   `I poligoni convessi di cui sopra sono tanti quanti i sottoinsiemi di un sottoinsieme di 8 elementi che contengono almeno 3 elementi.`

$$\sum_{k=3}^{8} \binom{8}{k} = 219$$

   (b) Si dica quanti sono tutte le spezzate chiuse che si possono costruire usando i vertici di un ottagono regolare.

   `Si osservi che, fissati` k `punti, le spezzate ciuse che si possono formare usando` **`tutti`** `questi punti sono` $(1/2)(k-1)!$`, pertanto il numero cercato e'`

$$\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{8} \binom{8}{k}(k-1)! = 8018.$$

2. Si calcoli

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{\log(n+1)}{\log n}\right]^n.$$

`Osserviamo che`

$$\frac{\log(n+1)}{\log n} = 1 + \frac{\log(1+1/n)}{\log n} = 1 + \frac{o(1)}{n}.$$

`Pertanto`

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{\log(n+1)}{\log n}\right]^n = \lim_{n\to+\infty}\left[1+\frac{o(1)}{n}\right]^n = 1$$

3. Sia
$$f_n(x) := e^{-nx}, \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

(a) Si mostri che l'equazione $f_n(x) = x^2$ ammette una unica soluzione positiva.

$f_n(x) = x^2$ `se e solo se` $\phi_n(x) := e^{nx/2}x = 1$. `Ma` ϕ_n `è continua,` $\phi_n(0) = 0$ `e` $\phi_n(1) = e^{n/2} \geq 1$`, quindi per il teorema degli zeri esiste` $\alpha_n \in]0,1]$ `tale che` $\phi_n(\alpha_n) = 1$`; dato che` ϕ_n `è strettamente crescente tale soluzione è unica.`

(b) Detta α_n la soluzione positiva dell'equazione $f_n(x) = x^2$, si trovino stime per il valore di α_n che permettano di studiare la convergenza delle seguenti serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n^2.$$

`Osserviamo che`
$$\left.\begin{array}{l} \phi_n(1/n) = \sqrt{e}/n \leq 1 \\ \phi_n((2\log n)/n)) = 2\log n \to +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \alpha_n \leq \frac{2\log n}{n}$$

`Quindi, per il criterio del confronto, la prima serie diverge a` $+\infty$ `mentre la seconda è convergente.`

ANALISI II[1]

–07.06.2004–

1. Sia

$$w_n := \frac{n+i\lambda}{n-i\lambda}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(a) Mostrare che w_n è limitata; determinare $\theta_n \in \mathbb{R}$ tale che $w_n = e^{i\theta_n}$

`Osserviamo che`

$$n+i\lambda = \sqrt{n^2+\lambda^2}e^{i\arctan(\lambda/n)}, \qquad n-i\lambda = \sqrt{n^2+\lambda^2}e^{-i\arctan(\lambda/n)}$$

`e pertanto`

$$w_n := \frac{n+i\lambda}{n-i\lambda} = e^{i2\arctan(\lambda/n)}.$$

`Questo prova che` $|w_n| = 1$ `e quindi che` w_n `è limitata.`

(b) Dire per quali valori del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ la successione $(w_n)^{n^2}$ converge per $n \to +\infty$.

`Ricordando che` $\arctan y = y + o(y^2)$ $(y \to 0)$ `otteniamo che`

$$n^2 \arctan(\lambda/n) = n\lambda + o(1) \ \ (n \to +\infty)$$

`e quindi`

$$(w_n)^{n^2} = e^{2i(n\lambda+o(1))} = e^{2in\lambda}(1+o(1)).$$

`È quindi evidente che` $(w_n)^{n^2}$ `converge` $\iff$ $e^{2in\lambda}$ `converge. Pertanto se` $\lambda \in \{k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$ `allora` $(w_n)^{n^2} \to 1$. `In caso contrario la successione` $(w_n)^{n^2}$ `non converge in quanto`

$$|e^{2i(n+1)\lambda} - e^{2in\lambda}| = |e^{2in\lambda}| \ |e^{2i\lambda} - 1| = |e^{2i\lambda} - 1| > 0.$$

2. Sia

$$\varphi_a(x) := \frac{(1+2x)^a - (1+x)^a}{x}, \qquad a > 0.$$

(a) Calcolare $\lim_{x\to 0} \varphi_a(x)$.

[1] Per Analisi I+II si svolga l'intero compito di analisi II.

Detta $g_a(x) := (1+x)^a$, la funzione che si vuole studiare è il rapporto incrementale

$$\varphi_a(x) = \frac{g(2x) - g(x)}{x}.$$

Per il teorema di Lagrange esiste $\xi \in (x, 2x)$ tale che $\varphi_a(x) = g_a'(\xi)$; quando $x \to 0$ anche $\xi \to 0$ e dunque

$$\lim_{x\to 0} \varphi_a(x) = g_a'(0) = a$$

(b) Studiare la monotonia di $\varphi_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ precisando per quali a è crescente.

Osserviamo che se $a \geq 1$ allora g_a è convessa; pertanto, in tal caso, la funzione $\Delta(x,y) = \frac{g_a(x)-g_a(y)}{x-y}$ è crescente in entrambe le variabili, quindi anche φ_a è crescente.
Un argomento analogo mostra la decrescenza di φ_a nel caso $a \in (0,1)$.

3. Si trovino, usando il metodo della variazione delle costanti, tutte le soluzioni della equazione differenziale

$$u'' - u = \frac{1}{e^t + e^{-t}}.$$

Si mostri che ne esiste una ed una sola limitata su tutto $\mathbb{R}$.

Il polinomio caratteristico associato all'equazione $v'' - v = 0$ è $P(x) = (x-1)(x+1)$ pertanto le funzioni $v_1(x) = e^x$ e $v_2(x) = e^{-x}$ sono due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea. Applicando il metodo di variazione delle costanti per trovare una soluzione u del tipo $u(t) = c_1(t)v_1(t) + c_2(t)v_2(t)$ otteniamo

$$\begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{e^t+e^{-t}} \end{pmatrix}$$

Risolvendo il sistema lineare otteniamo

$$c_1'(t) = \frac{e^{-t}}{2(e^t + e^{-t})}, \qquad c_2'(t) = -\frac{e^t}{2(e^t + e^{-t})}.$$

Integrando ricaviamo

$$c_1(t) = A - \frac{1}{4}\log(1 + e^{-2t}), \qquad c_2(t) = B - \frac{1}{4}\log(1 + e^{2t}).$$

$$u(t) = [A - \frac{1}{4}\log(1 + e^{-2t})]e^t + [B - \frac{1}{4}\log(1 + e^{2t})]e^{-t}.$$

Osserviamo che, se $A = B = 0$ la funzione u tende a zero per $|t| \to +\infty$ ed è pertanto anche limitata.Visto che, se A o B sono non nulli, $v(t) = Ae^t + Be^{-t}$ non è limitata, la scelta $A = B = 0$ è l'unica che corrisponde ad una soluzione limitata.

ANALISI I

–06.09.2004–

1. Sia x_n la successione definita da

$$\begin{cases} x_0 = 7 \\ x_{n+1} = \sqrt{\frac{1+x_n}{2}} \end{cases}$$

   (a) Dire se x_n è convergente.

   (b) Dire se convergono le serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x_n, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \log x_n.$$

2. Si calcoli (qualora esista)

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha \log(n \sin \frac{1}{n}), \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -1.$$

   Detto $Z = \{x \in \mathbb{R} \ : \ f(x) = 0\}$ l'insieme degli zeri di f, mostrare che:

   (a) $Z \neq \emptyset$

   (b) Z ammette massimo e minimo.

ANALISI II[1]

–06.09.2004–

1. Studiare la funzione

$$f(x) = (x-1)^2 - x(\log x)^2, \qquad x > 0.$$

   In particolare:

   (a) Calcolare $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

   (b) Provare che f è convessa.

   (c) Provare che $f(x) \geq 0$ per ogni $x > 0$.

2. Siano $A,\ B \in [0, +\infty]$ definiti da

$$A = \int_{\pi/4}^{+\infty} \left(\frac{\cos x}{x}\right)^2 dx, \qquad b = \int_{\pi/4}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx.$$

   (a) Mostrare che A e B sono entrambi finiti.

   (b) Mostrare che $A < B$.

   (c) Mostrare che $A < \frac{2}{\pi} < B$.

3. Dire per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ esiste una funzione $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $u'' + \lambda u = 0$, $u'(0) = 0$, $u(1) = 1$.

[1] Per Analisi I+II si svolga l'intero compito di analisi II.

Prima prova intermedia del primo modulo di

ANALISI

–07.11.2005–

1. Sia $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ la successione definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 3} \end{cases}$$

   (a) Calcolare $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

   (b) Calcolare la somma infinita

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{a_k}.$$

2. Dire per quali valori del parametro reale $x \in \mathbb{R}$ risulta convergente

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{(k^2)}}{k!}$$

3. Sia D l'insieme dei numeri naturali strettamente positivi con la proprietà che le cifre della loro espressione in base dieci sono strettamente decrescenti (per esempio: 9632 appartiene a D mentre 5411 non appartiene a D).

   (a) Calcolare la cardinalità di D.

   (b) Provare che vale la stima

$$\sum_{k\in D} \frac{1}{k} \leq 10(e-1) - 1$$

Prima prova intermedia del primo modulo di

ANALISI

–07.11.2005–

1. Sia $\{a_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ la successione definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} a_0 = 3 \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 2} \end{cases}$$

   (a) Calcolare $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

   (b) Calcolare la somma infinita

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{a_k}.$$

2. Dire per quali valori del parametro reale $x \in \mathbb{R}$ risulta convergente

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{(k^2)}}{k^k}$$

3. Sia D l'insieme dei numeri naturali con la proprietà che le cifre della loro espressione in base dieci sono strettamente decrescenti (per esempio: 876421 appartiene a D mentre 100 non ci appartiene).

   (a) Calcolare la cardinalità di D.

   (b) Provare che vale la stima

$$\sum_{k\in D} \frac{1}{k+1} \leq 10(e-1)$$

Prima prova intermedia del primo modulo di

ANALISI

–07.11.2005–

1. Sia $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ la successione definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 3} \end{cases}$$

   (a) Calcolare $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

   (b) Calcolare la somma infinita

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{a_k}.$$

   (a) Posto $b_n = a_n^2$ è immediato verificare che $b_{n+1} = b_n + 3$ e quindi, ragionando per induzione, si conclude che b_n è la progressione aritmetica $b_n = 4 + 3n$ e $a_n = \sqrt{b_n}$. Osserviamo che vale la stima $\sqrt{n+1} \le a_n \le 2\sqrt{n+1}$. È chiaro quindi che $\lim a_n = +\infty$: se M è una costante fissata $a_n > M$ definitivamente (per esempio per ogni $n \ge M^2$).

   (b) Visto che $a_n \le 2\sqrt{n+1}$

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{a_k} \ge \frac{1}{2} \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{\sqrt{k+1}} = +\infty$$

.

2. Dire per quali valori del parametro reale $x \in \mathbb{R}$ risulta convergente

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{(k^2)}}{k!}$$

È immediato verificare che se $|x| \le 1$ la serie è *assolutamente convergente*: infatti se $|x| \le 1$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|x|^{(k^2)}}{k!} \le \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e.$$

Se invece $|x| > 1$ allora

$$\frac{|x|^{(k^2)}}{k!} \ge \frac{|x|^{(k^2)}}{k^k} = \left(\frac{|x|^k}{k}\right)^k \qquad (1)$$

Scrivendo $|x| = 1 + (|x| - 1)$, dalla formula del binomio segue che

$$\text{se } |x| > 1 \text{ allora} \qquad \frac{|x|^k}{k} \geq \frac{(k-1)}{2}(|x|-1)^2 \to +\infty \text{ per } k \to +\infty.$$

Quindi la quantità tra parentesi tonde che compare nel termine di destra dell'equazione (1) **non** è infinitesima e dunque non sono infinitesimi gli addendi della serie.

Pertanto la serie **non** converge se $|x| > 1$.

3. Sia D l'insieme dei numeri naturali strettamente positivi con la proprietà che le cifre della loro espressione in base dieci sono strettamente decrescenti (per esempio: 9632 appartiene a D mentre 5411 non appartiene a D).

   (a) Calcolare la cardinalità di D.

   (b) Provare che vale la stima

$$\sum_{k \in D} \frac{1}{k} \leq 10(e-1) - 1$$

(a) Sia D_ℓ l'insieme dei numeri di D con ℓ cifre. In $|D_1|$ ci sono i numeri da 1 a 9, quindi $|D_1| = 9$.
In generale, per $\ell \geq 2$, $|D_\ell| = \binom{10}{\ell}$ in quanto D_ℓ può essere messo in bigezione coi sottoinsiemi di ℓ elementi dell'insieme dei simboli $S := \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$: se $F \subset S$, $|F| = \ell$ ed $F = \{\alpha_1, ..., \alpha_\ell\}$ è ordinato in modo che le cifre siano decrescenti, ad esso si associa il numero $m = \sum_{j=1}^{\ell} 10^{(\ell-j)}\alpha_j \in D$ e viceversa[1]. Pertanto

$$|D| = 9 + \sum_{\ell=2} 10\binom{10}{\ell} = 9 + (1+1)^{10} - \binom{10}{0} - \binom{10}{1} = 2^{10} - 2 = 1022.$$

(b)

$$\sum_{k \in D_1} \frac{1}{k} < 9; \qquad \sum_{k \in D_\ell} \frac{1}{k} \leq \binom{10}{\ell} 10^{(1-\ell)}$$

Quindi

$$|D| \leq 9 + 10 \sum_{\ell=2}^{10} \binom{10}{\ell} 10^{-\ell} = 9 + 10\left[\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} - 2\right] \leq 10e - 11$$

Osserviamo che nella stima sopra abbiamo maggiorato la somma degli inversi dei primi nove interi positivi con 9. In realtà svolgendo il calcolo si verifica che tale somma è minore di 3: in effetti la stima suggerita e' ben lungi dall'essere ottimale!

[1] Per esempio: al sottoinsieme $\{9,6,3,2,0\} \subset S$ assoceremo il numero 96320.

Analisi Matematica I - Secondo Compitino
19 Dicembre 2005 - Fila 1

Esercizio 1. Data l'applicazione

$$f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1+z}{1-z},$$

determinare $f(i\mathbb{R})$ e $f(\mathbb{U} \setminus \{1\})$, dove $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ è il cerchio unitario.

Esercizio 2. (a) Dimostrare che la derivata n-esima della funzione

$$f(x) = e^{x^3 - x}$$

è della forma

$$f^{(n)}(x) = p_n(x)\, e^{x^3 - x},$$

con p_n polinomio.

(b) Determinare al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ il limite

$$\lim_{x \to +\infty} e^{x - x^3 + \lambda \log x} f^{(n)}(x).$$

Esercizio 3. (a) Dato un intero positivo n, dimostrare che la funzione

$$f_n : \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \tan x - 2nx - 3\sin x,$$

ha un unico punto di minimo x_n.

(b) Dimostrare che $x_n \to \pi/2$ per $n \to +\infty$.

(c) Determinare costanti a e b tali che valga lo sviluppo

$$x_n = \frac{\pi}{2} + a\, n^{-1/2} + b\, n^{-3/2} + o(n^{-3/2}) \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Analisi Matematica I - Secondo Compitino

19 Dicembre 2005 - Fila 1

Esercizio 1. Data l'applicazione

$$f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1+z}{1-z},$$

determinare $f(i\mathbb{R})$ e $f(\mathbb{U} \setminus \{1\})$, dove $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ è il cerchio unitario.

Soluzione. Osserviamo che per ogni $t \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$1 + it = \sqrt{1+t^2}\, e^{i \arctan t}$$

pertanto

$$f(it) = \frac{e^{i \arctan t}}{e^{i \arctan(-t)}} = e^{2\,i \arctan t}.$$

Ne segue che $f(i\mathbb{R}) = e^{i]-\pi,\pi[} = \mathbb{U} \setminus \{-1\}$.

Ora osserviamo che

$$\mathbb{U} \setminus \{1\} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in]0, 2\pi[\}$$

e consideriamo

$$f(e^{i\theta}) = \frac{(1+e^{i\theta})(1-e^{-i\theta})}{|1-e^{i\theta}|^2} = \frac{2\,i\,\sin\theta}{(1-\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\, i\,.$$

Osserviamo che la funzione $\theta \mapsto \sin\theta(1-\cos\theta)^{-1}$ è continua su $]0, 2\pi[$ e ricordando che $\sin\theta = \theta + o(\theta)$ e $\cos\theta = 1 - \theta^2/2 + o(\theta^2)$, per $\theta \to 0$, si hanno i limiti

$$\lim_{\theta\to 0^+} \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = +\infty, \qquad \lim_{\theta\to 2\pi^-} \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \lim_{\theta\to 0^-} \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = -\infty\,.$$

Pertanto l'immagine di tale funzione corrisponde all'insieme $\mathbb{R}$, ovvero $f(\mathbb{U} \setminus \{1\}) = i\mathbb{R}$.

Esercizio 2. (a) Dimostrare che la derivata n-esima della funzione

$$f(x) = e^{x^3-x}$$

è della forma

$$f^{(n)}(x) = p_n(x)\, e^{x^3-x},$$

con p_n polinomio.

(b) Determinare al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ il limite

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x-x^3+\lambda \log x} f^{(n)}(x).$$

Soluzione. (a) Dimostriamo per induzione che

$$f^{(n)}(x) = p_n(x)\, e^{x^3-x},$$

con p_n polinomio. Per $n = 0$ è sufficiente porre $p_0 = 1$. Se la formula è vera per n, si ha

$$f^{(n+1)}(x) = (p_n'(x) + (3x^2-1)p_n(x))\, e^{x^3-x}.$$

Quindi basta porre

$$p_{n+1}(x) = p_n'(x) + (3x^2-1)p_n(x), \tag{1}$$

che è un polinomio (la derivata di un polinomio è un polinomio, e l'insieme dei polinomi forma un anello).

(b) Risulta

$$e^{x-x^3+\lambda \log x} f^{(n)}(x) = x^\lambda p_n(x).$$

Dalla formula (1) si deduce che il polinomio p_{n+1} ha il grado di p_n più due. Insieme al fatto che $p_0 = 1$, si trova che p_n ha grado $2n$. Sempre da (1), il coefficiente del termine di grado $2(n+1)$ in p_{n+1} è pari a 3 volte il coefficiente del termine di grado $2n$ in p_n. Insieme al fatto che $p_0 = 1$, si trova che il coefficiente del termine di grado $2n$ in p_n è 3^n. Concludiamo quindi che

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x-x^3+\lambda \log x} f^{(n)}(x) = \lim_{x\to+\infty} x^\lambda p_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda < -2n, \\ +\infty & \text{se } \lambda > -2n, \\ 3^n & \text{se } \lambda = -2n. \end{cases}$$

Esercizio 3. (a) Dato un intero positivo n, dimostrare che la funzione

$$f_n : \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \tan x - 2nx - 3\sin x,$$

ha un unico punto di minimo x_n.

(b) Dimostrare che $x_n \to \pi/2$ per $n \to +\infty$.

(c) Determinare costanti a e b tali che valga lo sviluppo

$$x_n = \frac{\pi}{2} + a\, n^{-1/2} + b\, n^{-3/2} + o(n^{-3/2}) \quad \text{per } n \to +\infty.$$

SOLUZIONE. (a) La funzione f_n è derivabile, e la sua derivata vale

$$f_n'(x) = 1 + \tan^2 x - 2n - 3\cos x.$$

La funzione f_n' vale $-2n - 2$ in 0, ed il suo limite per $x \to \pi/2$ (da sinistra) vale $+\infty$. Essendo una funzione continua, per il teorema degli zeri la funzione f_n' possiede almeno uno zero in $]0, \pi/2[$. Inoltre f_n' è strettamente crescente su $[0, \pi/2]$, poichè somma di funzioni crescenti di cui almento una (ad esempio $\tan^2$) strettamente crescente. Deduciamo che esiste un unico $x_n \in]0, \pi/2[$ tale che f_n' è negativa su $[0, x_n[$, nulla in x_n, e positiva su $]x_n, \pi/2[$. Quindi f_n è strettamente decrescente su $[0, x_n]$ e strettamente crescente su $[x_n, \pi/2[$. In particolare, x_n è l'unico punto di minimo di f_n.

(b) Da $f'(x_n) = 0$ e dal fatto che il coseno è limitato deduciamo che

$$\tan^2 x_n = 2n - 1 + 3\cos x_n = 2n + O(1), \quad \text{per } n \to +\infty,$$

da cui, tendendo conto del fatto che la tangente è bigettiva da $[0, \pi/2[$ su $[0, +\infty[$, otteniamo

$$x_n = \arctan \sqrt{2n + O(1)}.$$

Questo implica che la successione (x_n) tande a $\pi/2$.

(c) Tenendo conto del fatto che $x_n \to \pi/2$ e che $\cos\pi/2 = 0$ possiamo migliorare lo sviluppo di x_n come segue

$$x_n = \arctan\sqrt{2n-1+3\cos x_n} = \arctan\sqrt{2n-1+o(1)}.$$

Ricordando lo sviluppo a $+\infty$ dell'arcotangente:

$$\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\frac{1}{x^{2k+1}}, \quad \text{per } x \to +\infty,$$

si ottiene

$$x_n = \frac{\pi}{2} - (2n-1+o(1))^{-1/2} + \frac{1}{3}(2n+O(1))^{-3/2} + o(n^{-3/2}). \tag{2}$$

Dallo sviluppo $(1+x)^{-1/2} = 1 - x/2 + o(x)$ per $x \to 0$, si trova

$$(2n-1+o(1))^{-1/2} = 2^{-1/2}n^{-1/2}\left(1-\frac{1}{2n}+o(1/n)\right)^{-1/2}$$
$$= 2^{-1/2}n^{-1/2}\left(1+\frac{1}{4n}+o(1/n)\right) = 2^{-1/2}n^{-1/2} + 2^{-5/2}n^{-3/2} + o(n^{-3/2}), \tag{3}$$

Usando semplicemente il fatto che $(1+x)^{-3/2} = 1 + o(1)$ per $x \to 0$, si trova

$$(2n+O(1))^{-3/2} = 2^{-3/2}n^{-3/2}(1+O(1/n))^{-3/2} = 2^{-3/2}n^{-3/2} + o(n^{-3/2}). \tag{4}$$

Da (2), (3), (4) concludiamo che

$$x_n = \frac{\pi}{2} - 2^{-1/2}n^{-1/2} + (3^{-1} - 2^{-5/2})n^{-3/2} + o(n^{-3/2}).$$

Analisi Matematica I - Secondo Compitino

19 Dicembre 2005 - Fila 2

Esercizio 1. Data l'applicazione

$$f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1-z}{1+z},$$

determinare $f(i\mathbb{R})$ e $f(\mathbb{U} \setminus \{-1\})$, dove $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ è il cerchio unitario.

Soluzione. Osserviamo che per ogni $t \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$1 + it = \sqrt{1+t^2}\, e^{i\ \arctan t}$$

pertanto

$$f(it) = \frac{e^{i\ \arctan(-t)}}{e^{i\ \arctan t}} = e^{-2\,i\ \arctan t}.$$

Ne segue che $f(i\mathbb{R}) = e^{i]-\pi,\pi[} = \mathbb{U} \setminus \{-1\}$.

Ora osserviamo che

$$\mathbb{U} \setminus \{-1\} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in]-\pi, \pi[\}$$

e consideriamo

$$f(e^{i\theta}) = \frac{(1-e^{i\theta})(1+e^{-i\theta})}{|1+e^{i\theta}|^2} = \frac{-2\,i\ \sin\theta}{(1+\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2} = -\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\, i\,.$$

Ricordando che $\sin\theta = \theta + o(\theta)$ e $\cos\theta = 1 - \theta^2/2 + o(\theta^2)$, per $\theta \to 0$, si hanno i limiti

$$\lim_{\theta\to-\pi^+} -\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \lim_{\theta\to0^+} \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = +\infty,$$
$$\lim_{\theta\to\pi^-} -\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \lim_{\theta\to0^-} \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = -\infty\,.$$

La funzione $\theta \mapsto -\sin\theta(1+\cos\theta)^{-1}$ è continua su $]-\pi,\pi[$, pertanto l'immagine di tale funzione corrisponde all'insieme $\mathbb{R}$, ovvero $f(\mathbb{U}\setminus\{-1\}) = i\mathbb{R}$.

Esercizio 2. (a) Dimostrare che la derivata n-esima della funzione

$$f(x) = e^{x^4-1}$$

è della forma

$$f^{(n)}(x) = p_n(x)\, e^{x^4-1},$$

con p_n polinomio.

(b) Determinare al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ il limite

$$\lim_{x\to+\infty} e^{1-x^4+\lambda\log x} f^{(n)}(x).$$

Soluzione. (a) Dimostriamo per induzione che

$$f^{(n)}(x) = p_n(x)\, e^{x^4-1},$$

con p_n polinomio. Per $n = 0$ è sufficiente porre $p_0 = 1$. Se la formula è vera per n, si ha

$$f^{(n+1)}(x) = (p_n'(x) + 4x^3 p_n(x))\, e^{x^4-1}.$$

Quindi basta porre

$$p_{n+1}(x) = p_n'(x) + 4x^3 p_n(x), \tag{5}$$

che è un polinomio (la derivata di un polinomio è un polinomio, e l'insieme dei polinomi forma un anello).

(b) Risulta

$$e^{1-x^4+\lambda\log x} f^{(n)}(x) = x^\lambda p_n(x).$$

Dalla formula (5) si deduce che il polinomio p_{n+1} ha il grado di p_n più tre. Insieme al fatto che $p_0 = 1$, si trova che p_n ha grado $3n$. Sempre da (5), il coefficiente del termine di grado $3(n+1)$

in p_{n+1} è pari a 4 volte il coefficiente del termine di grado $3n$ in p_n. Insieme al fatto che $p_0 = 1$, si trova che il coefficiente del termine di grado $3n$ in p_n è 4^n. Concludiamo quindi che

$$\lim_{x\to+\infty} e^{1-x^4+\lambda\log x} f^{(n)}(x) = \lim_{x\to+\infty} x^\lambda p_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda < -3n, \\ +\infty & \text{se } \lambda > -3n, \\ 4^n & \text{se } \lambda = -3n. \end{cases}$$

Esercizio 3. (a) Dato un intero positivo n, dimostrare che la funzione

$$f_n : \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \tan x - 3nx - 2\sin x,$$

ha un unico punto di minimo x_n.

(b) Dimostrare che $x_n \to \pi/2$ per $n \to +\infty$.

(c) Determinare costanti a e b tali che valga lo sviluppo

$$x_n = \frac{\pi}{2} + a\, n^{-1/2} + b\, n^{-3/2} + o(n^{-3/2}) \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Soluzione. (a) La funzione f_n è derivabile, e la sua derivata vale

$$f_n'(x) = 1 + \tan^2 x - 3n - 2\cos x.$$

La funzione f_n' vale $-3n-1$ in 0, ed il suo limite per $x \to \pi/2$ (da sinistra) vale $+\infty$. Essendo una funzione continua, per il teorema degli zeri la funzione f_n' possiede almeno uno zero in $]0,\pi/2[$. Inoltre f_n' è strettamente crescente su $[0,\pi/2]$, poichè somma di funzioni crescenti di cui almento una (ad esempio $\tan^2$) strettamente crescente. Deduciamo che esiste un unico $x_n \in]0,\pi/2[$ tale che f_n' è negativa su $[0, x_n[$, nulla in x_n, e positiva su $]x_n, \pi/2[$. Quindi f_n è strettamente decrescente su $[0, x_n]$ e strettamente crescente su $[x_n, \pi/2[$. In particolare, x_n è l'unico punto di minimo di f_n.

(b) Da $f'(x_n) = 0$ e dal fatto che il coseno è limitato deduciamo che

$$\tan^2 x_n = 3n - 1 + 2\cos x_n = 3n + O(1), \quad \text{per } n \to +\infty,$$

da cui, tendendo conto del fatto che la tangente è bigettiva da $[0,\pi/2[$ su $[0,+\infty[$, otteniamo

$$x_n = \arctan\sqrt{3n + O(1)}.$$

Questo implica che la successione (x_n) tande a $\pi/2$.

(c) Tenendo conto del fatto che $x_n \to \pi/2$ e che $\cos\pi/2 = 0$ possiamo migliorare lo sviluppo di x_n come segue

$$x_n = \arctan\sqrt{3n - 1 + 2\cos x_n} = \arctan\sqrt{3n - 1 + o(1)}.$$

Ricordando lo sviluppo a $+\infty$ dell'arcotangente:

$$\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\frac{1}{x^{2k+1}}, \quad \text{per } x \to +\infty,$$

si ottiene

$$x_n = \frac{\pi}{2} - (3n - 1 + o(1))^{-1/2} + \frac{1}{3}(3n + O(1))^{-3/2} + o(n^{-3/2}). \tag{6}$$

Dallo sviluppo $(1+x)^{-1/2} = 1 - x/2 + o(x)$ per $x \to 0$, si trova

$$(3n - 1 + o(1))^{-1/2} = 3^{-1/2}n^{-1/2}\left(1 - \frac{1}{3n} + o(1/n)\right)^{-1/2}$$
$$= 3^{-1/2}n^{-1/2}\left(1 + \frac{1}{6n} + o(1/n)\right) = 3^{-1/2}n^{-1/2} + 2^{-1/2}3^{-3/2}n^{-3/2} + o(n^{-3/2}), \tag{7}$$

Usando semplicemente il fatto che $(1+x)^{-3/2} = 1 + o(1)$ per $x \to 0$, si trova

$$(3n + O(1))^{-3/2} = 3^{-3/2}n^{-3/2}(1 + O(1/n))^{-3/2} = 3^{-3/2}n^{-3/2} + o(n^{-3/2}). \tag{8}$$

Da (6), (7), (8) concludiamo che

$$x_n = \frac{\pi}{2} - 3^{-1/2}n^{-1/2} + (3^{-5/2} - 2^{-1/2}3^{-3/2})n^{-3/2} + o(n^{-3/2}).$$

Primo appello del primo modulo di

ANALISI

–10.01.2006–

1. Sia $Z_n := \{z \in \mathbf{C} \ : \ z^n = 1\}$ e $f : Z_{80} \to Z_{80}$ definita da $f(z) = z^2$.
   (a) Al variare di $z \in Z_{80}$ determinare la cardinalità $|f^{-1}(\{z\})|$.
   (b) Determinare la cardinalità dell'insieme
   $$A := \{h \circ f \ : \ h : Z_{80} \to Z_{80},\ h \text{ bigettiva}\}$$
   (c) Determinare la cardinalità dell'insieme
   $$B := \{f \circ h \ : \ h : Z_{80} \to Z_{80},\ h \text{ bigettiva}\}$$
   (d) Determinare la cardinalità dell'insieme
   $$C := \{h^{-1} \circ f \circ h \ : \ h : Z_{80} \to Z_{80},\ h \text{ bigettiva}\}$$
   Ordinare tali insiemi in base alla cardinalità.

2. Sia $f(x) := x^2 e^{-x}$.
   (a) Dire se f ammette massimo o minimo sull'intervallo $[1, +\infty[$.
   (b) Discutere, al variare di $t \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = t$.
   (c) Mostrare che esiste un unico valore t tale che l'equazione ha esattamente tre soluzioni $x_1 < x_2 < x_3$ con la proprietà che $x_3 - x_2 = x_2 - x_1$. Si provi che in tal caso vale necessariamente la relazione $x_1 x_3 + x_2 = 0$

3. Dire se zero è punto di massimo o minimo locale per la funzione
   $$F(x) = \sin(\log(1 + x)) - \log(1 + \sin x).$$

Soluzione Compito Analisi I - 10 gennaio 2006

Esercizio 1.

1. In quanti modi possiamo distribuire 60 caramelle tutte uguali tra 30 bambini in modo che ciascun bambino ne abbia 1 oppure 4?

2. In quanti modi possiamo distribuire 30 figurine tutte diverse tra 30 bambini in modo che ciascun bambino ne abbia 0 oppure 3?

(a) Detto n rispettivamente m il numero di bambini con 1 rispettivamente 4 caramelle, si deve avere $n+m=30$ e $n+4m=600$, da cui $n=20$ e $m=10$. Quindi 10 bambini fortunati avranno 4 caramelle, mentre gli altri 20 ne avranno solamente una. I modi con cui si può effettuare la distribuzione sono quindi tanti quanti sono i sottoinsiemi di 10 elementi (i fortunati) di un insieme di 30 elementi (tutti i bambini), cioè $\binom{30}{10}$.

(b) Come prima, 10 bambini riceveranno 3 figurine, mentre i rimanenti 20 non ne riceveranno alcuna. Ci sono $\binom{30}{10}$ possibili sottoinsiemi di 10 fortunati, e per ciascun sottoinsieme dobbiamo calcolare il numero di modi di distribuire le 30 figurine ai bambini del sottoinsieme. Si tratta cioè di calcolare il numero delle *partizioni ordinate* di un insieme I_{30} di 30 elementi composte da 10 sottoinsiemi di 3 elementi. A ciascuno dei $30!$ ordinamenti di I_{30} possiamo associare una partizione ordinata raggruppando i primi tre elementi, poi i secondi tre, e cosí via. Otteniamo cosí tutte le possibili partizioni ordinate, ma ciascuna di esse viene contata più volte, poiché possiamo permutare i primi tre elementi tra loro, i secondi tre, e cosí via. Si hanno cioè $(3!)^{10}=6^{10}$ ripetizioni, quindi il numero delle partizioni ordinate in questione è $30!/6^{10}$. Concludiamo che il numero dei modi richiesto è

$$\binom{30}{10}\frac{30!}{6^{10}}.$$

Esercizio 2. Determinare l'insieme dei numeri complessi z tali che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\frac{(i-z)^n}{z^n}$$

risulti convergente. Per tali z calcolare la somma della serie.

Soluzione. Ponendo $w=(i+z)/z$, la serie risulta una serie di potenze in w,

$$\sum_{n=0}^{\infty} nw^n.$$

Dato che $\sqrt[n]{n}\to 1$, questa serie ha raggio di convergenza 1. Inoltre non converge in alcun punto del bordo del disco di convergenza: se $|w|=1$ la successione

nw^n non è limitata. Quindi la serie data converge per tutti e soli gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $|(i-z)/z| < 1$. Equivalentemente, $|i-z|^2 < |z|^2$, ossia

$$(\operatorname{Re} z)^2 + (1 - \operatorname{Im} z)^2 < (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2,$$

cioè $\operatorname{Im} z > 1/2$. Quindi la serie data converge se e solamente se z appartiene al semipiano aperto

$$\{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Im} z > 1/2\}.$$

Derivando per serie, si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} nw^n = w \sum_{n=0}^{\infty} nw^{n-1} = wD\left(\sum_{n=0}^{\infty} w^n\right) = wD\frac{1}{1-w} = \frac{w}{(1-w)^2},$$

per $|w| < 1$. Quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\frac{(i-z)^n}{z^n} = \frac{i-z}{z}\left(1 - \frac{i-z}{z}\right)^{-2} = \frac{z(i-z)}{(2z-i)^2}.$$

Esercizio 3. Dato l'intero $n \geq 2$, si consideri l'equazione

$$(1+n^2)\sin x = n^2 x. \tag{1}$$

1. Dimostrare che (1) ha un'unica soluzione positiva x_n.
2. Dimostrare che la successione (x_n) è decrescente ed infinitesima.
3. Determinare il numero reale α tale che

$$x_n = \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{per } n \to \infty.$$

(a) Consideriamo la funzione $f(x) = (\sin x)/x$, prolungata per continuità ponendo $f(0) = 1$. Si tratta di dimostrare che esiste un unico $x_n > 0$ tale che $f(x_n) = n^2/(n^2+1)$. Per $x \geq \pi$ si ha

$$f(x) \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\pi} < \frac{1}{3}$$

Dunque $f(x) = n^2/(n^2+1)$ non ammette soluzioni per $x \geq \pi$ perchè $n^2/(n^2+1) \geq 1/2$ per ogni $n \geq 1$. La funzione f è continua, vale 1 in 0 e 0 in π, quindi il teorema degli zeri ci garantisce che esiste $x_n \in]0, \pi[$ tale che $f(x) = n^2/(n^2+1)$. La derivata di f è

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\sin x}{x}\left(\operatorname{cotan} x - \frac{1}{x}\right).$$

Se $x \in]0,\pi[$, $(\sin x)/x$ è positivo e $\mathrm{cotan}\, x - 1/x$ è negativo (segue dal fatto che $\tan x > x$ in $]0,\pi/2[$). Quindi $f' < 0$ in $]0,\pi[$, da cui f è strettamente decrescente in $[0,\pi]$, ed il punto dove f vale $n^2/(n^2+1)$ è unico.

(b) Per quanto visto sopra la funzione f è strettamente decrescente in $[0,\pi]$, e l'immagine di tale intervallo è $[0,1]$. Detta g l'inversa di f in tale intervallo, g è ancora strettamente decrescente. La successione $\frac{n^2}{n^2+1}$ cresce strettamente ed ha limite 1, da cui $x_n = g(\frac{n^2}{n^2+1})$ decresce strettamente ed ha limite $g(1) = 0$.

(c) Usando lo sviluppo $\sin x = x - x^3/6 + o(x^3)$ per $x \to 0$, l'identità $f(x) = n^2/(n^2+1)$ implica

$$1 - \frac{x_n^2}{6} + o(x_n^2) = 1 - \frac{1}{n^2+1},$$

per $n \to \infty$.

$$x_n^2 = (\frac{6}{n^2+1})(1+o(1)) = (\frac{6}{n^2})(1+o(1)) =$$

per $n \to \infty$. Sapendo che $x_n > 0$ ciò ci permette di concludere che $\alpha = \sqrt{6}$.

Analisi Matematica II - Primo Compitino

27 Marzo 2006

Esercizio 1. Determinare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(x-1)}$$

sull'intervallo $]0,1[$ e dire se tale primitiva è estendibile con continuità agli estremi.

Esercizio 2. Sia $L(\lambda)$ la lunghezza dell'ellisse parametrizzata dalle equazioni

$$\begin{cases} x = (1+\lambda)^{1/4} \cos t, \\ y = (1+\lambda)^{-1/4} \sin t, \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Determinare tre numeri a, b, c tali che

$$L(\lambda) = a + b\lambda + c\lambda^2 + o(\lambda^2), \quad \text{per } \lambda \to 0.$$

Dire se 0 è punto di massimo o minimo locale della funzione L.

Esercizio 3. Sia

$$F(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\, dt.$$

(a) Dire per quali $\mu \in \mathbb{R}$ la funzione

$$F(x) - \frac{\mu}{x} e^{-x^2}$$

ha massimo su $]0, +\infty[$.

(b) Calcolare

$$\lim_{x \to +\infty} e^{x^2} F(x), \qquad \lim_{x \to +\infty} x e^{x^2} F(x).$$

Analisi Matematica II - Primo Compitino

27 Marzo 2006

Esercizio 1. Determinare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(x-1)}$$

sull'intervallo $]0,1[$ e dire se tale primitiva è estendibile con continuità agli estremi.

Visto che $f(x) \sim x^{-1/2}$ (per $x \to 0^+$) f è integrabile in senso improprio sugli intervalli del tipo $[0,x]$ ($x \in [0,1[$). Una primitiva e' data da

$$F(x) := \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}(t-1)} dt = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{2}{s^2-1} ds = \int_0^{\sqrt{x}} [\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-1}] ds = \log \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}.$$

(dove si è effettuata la sostituzione $x = t^2$). È evidente che $\lim_{x\to 1^-} F(x) = -\infty$ e dunque F non puó essere estesa nel punto 1.

Esercizio 2. Sia $L(\lambda)$ la lunghezza dell'ellisse parametrizzata dalle equazioni

$$\begin{cases} x = (1+\lambda)^{1/4} \cos t, \\ y = (1+\lambda)^{-1/4} \sin t, \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Determinare tre numeri a, b, c tali che

$$L(\lambda) = a + b\lambda + c\lambda^2 + o(\lambda^2), \quad \text{per } \lambda \to 0.$$

Dire se 0 è punto di massimo o minimo locale della funzione L.

Applicando la formula per calcolare la lunghezza di una curva si ottiene

$$L(\lambda) = \int_0^{2\pi} \left[(1+\lambda)^{1/2} \sin^2 t + (1+\lambda)^{-1/2} \cos^2 t\right]^{1/2} dt = (1+\lambda)^{-1/4} \int_0^{2\pi} [1+\lambda \sin^2 t]^{1/2} dt$$

Ricordando che $(1+y)^\alpha = 1 + \alpha y + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} y^2 + o(y^2)$ e che

$$\int_0^\pi \sin^2 t \ \ dt = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^\pi \sin^4 t \ \ dt = \frac{3}{8}\pi$$

ricaviamo che

$$L(\lambda) = [1 - \frac{\lambda}{4} + \frac{5}{32}\lambda^2 + o(\lambda^2)] \cdot [2\pi + \frac{\pi}{2}\lambda - \frac{3\pi}{32}\lambda^2 + o(\lambda^2)] = 2\pi + \frac{3\pi}{32}\lambda^2 + o(\lambda^2)$$

Dalla formula precedente si deduce che $\lambda = 0$ è minimo locale per L.

Esercizio 3. Sia

$$F(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\, dt.$$

(a) Dire per quali $\mu \in \mathbb{R}$ la funzione

$$F(x) - \frac{\mu}{x} e^{-x^2}$$

ha massimo su $]0, +\infty[$.

(b) Calcolare

$$\lim_{x \to +\infty} e^{x^2} F(x), \qquad \lim_{x \to +\infty} x e^{x^2} F(x).$$

(a) Utilizzando il TFdCI

$$\frac{d}{dx}\left[F(x) - \frac{\mu}{x} e^{-x^2}\right] = e^{-x^2}[\frac{\mu}{x^2} + 2\mu - 1].$$

Affinchè ci sia un massimo questa derivata deve annullarsi, ciò può avvenire solo se $\mu \in]0, 1/2[$; per tali valori di μ si ha che effettivamente la derivata è positiva sull'intervallo $]0, \sqrt{\frac{\mu}{1-2\mu}}[$ mentre è negativa su $]\sqrt{\frac{\mu}{1-2\mu}}, +\infty[$, quindi la funzione ha massimo in $x = \sqrt{\frac{\mu}{1-2\mu}}$.

(b) Usando il cambio di variabile $t = x + s$ otteniamo che

$$F(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = e^{-x^2} \int_0^{+\infty} e^{-s^2} e^{-2xs} ds$$

da cui segue che

$$0 \leq e^{x^2} F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-s^2} e^{-2xs} ds \leq \int_0^{+\infty} e^{-2xs} ds = \frac{1}{2x} \to 0 \qquad \texttt{per } x \to +\infty.$$

Dunque, per il teorema dei due carabinieri il primo limite è zero.

Per quanto riguarda il secondo limite osserviamo che, integrando per parti,

$$xe^{x^2} F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-s^2} x e^{-2xs} ds = \left[-\frac{1}{2} e^{-s^2} e^{-2xs} \right]_{s=0}^{s=+\infty} - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} s e^{-s^2} e^{-2xs} ds$$

D'altro canto

$$\left[-\frac{1}{2} e^{-s^2} e^{-2xs} \right]_{s=0}^{s=+\infty} = \frac{1}{2}, \qquad 0 \leq \int_0^{+\infty} s e^{-s^2} e^{-2xs} ds \leq \frac{M}{2x} \to 0 \qquad \texttt{per } x \to +\infty$$

con $M := \max\{se^{-s^2},\ s \geq 0\}$. Pertanto il secondo limite vale $1/2$.

Terzo appello del primo modulo di

ANALISI

–26.06.2006–

1. Si vuole ripartire un insieme di 12 elementi in 3 classi di 4 elementi ciascuna. In quanti modi diversi si può fare questa suddivisione?

2. Sia $a_k \geq 3^k$. Mostrare che se $|x| < 3$ la quantità
$$F(x) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\log a_k}{a_k} x^k$$
è ben definita. Mostrare inoltre che $F(1) \leq \frac{1}{e} + \frac{3}{4} \log 3$.

3. Provare che per ogni $f \in C^2([0,1])$ con $f(0) = f(1) = 0$ e $|f''(x)| \leq 1$ si ha che
$$|f(x)| \leq \frac{1}{2} x(1-x) \qquad \forall x \in [0,1].$$

Primo appello del secondo modulo di

ANALISI

–26.06.2006–

1. Calcolare, al variare del parametro positivo α, il valore
$$\sup_{t>0} \frac{(1+t)^\alpha - 1}{t}.$$

2. (a) Determinare i valori del parametro β per cui risulti finito l'integrale improprio
$$\int_0^\pi \frac{\sin^3 x}{(1+\cos x)^\beta} dx$$
   (b) Per tali valori calcolare il valore dell'integrale.

3. (a) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione
$$y'' + y = \frac{\sin t}{t}.$$
   (b) Trovare $\gamma \in \mathbb{R}$ tale che per ciascuna di esse si abbia
$$y(t) = \gamma \cos t \log t + O(1) \qquad \text{per } t \to +\infty$$

Terzo appello del primo modulo di

ANALISI

–26.06.2006–

1. Si vuole ripartire un insieme di 12 elementi in 3 classi di 4 elementi ciascuna. In quanti modi diversi si può fare questa suddivisione?

   Sia X l'insieme di 12 elementi e sia A un insieme di tre elementi; consideriamo l'insieme di funzioni

   $$F := \{f \in A^X : |f^{-1}(a)| = 3 \ \ \forall a \in A\}$$

   La cardinalità di F è data da $|F| = \binom{12}{4}\binom{8}{4}\binom{4}{4}$. Ogni $f \in F$ determina una suddivisione dell'insieme X in 3 classi di 4 elementi ciascuna; osserviamo anche che due funzioni $f_1, f_2 \in F$ determinano la stessa suddivisione se solo se differiscono per una permutazione di A cioè se $f_1 = \sigma \circ f_2$. Pertanto la cardinalità delle suddivisioni possibili è

   $$\frac{|F|}{3!} = \frac{12!}{3!(4!)^3} = 5775.$$

2. Sia $a_k \geq 3^k$. Mostrare che se $|x| < 3$ la quantità

   $$F(x) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\log a_k}{a_k} x^k$$

   è ben definita. Mostrare inoltre che $F(1) \leq \frac{1}{e} + \frac{3}{4}\log 3$.

   Conviene innanzitutto fare uno studio qualitativo della funzione $f(t) = \frac{\log t}{t}$: è immediato verificare che f è positiva su $[1, +\infty[$

ed è infinitesima per $t \to +\infty$, inoltre visto che $f'(t) = (1-\log t)/t^2$ si deduce che f è crescente su $]0, e]$ e decrescente su $[e, +\infty[$ e quindi $\max f = f(e) = 1/e$. Di conseguenza si avra' che $\frac{\log a_0}{a_0} \le 1/e$, $\frac{\log a_k}{a_k} \le \frac{\log 3^k}{3^k}$ per $k \ge 1$, pertanto, se $|x| < 3$, la serie che definisce F è assolutamente convergente

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\log a_k}{a_k} |x|^k \le \frac{1}{e} + \log 3 \sum_{k=1}^{+\infty} k (\frac{|x|}{3})^k.$$

Dalla formula precedente, ponendo $x = 1$ ricaviamo

$$F(1) \le \frac{1}{e} + \log 3 \sum_{k=1}^{+\infty} k 3^{-k}$$

da cui la tesi, visto che $\sum_{k=1}^{+\infty} k x^k = \frac{x}{(1-x)^2}$.

3. Provare che per ogni $f \in C^2([0,1])$ con $f(0) = f(1) = 0$ e $f''(x) \ge -1$ si ha che

$$f(x) \le \frac{1}{2} x(1-x) \qquad \forall x \in [0,1].$$

Definiamo $h(x) := f(x) - \frac{1}{2}x(1-x)$; chiaramente si ha che $h(0) = h(1) = 0$ e $h''(x) \ge 0$ $\forall x \in (0,1)$. Se si ha $h'(x_0) = 0$ per qualche $x_0 \in (0,1)$ dalla formula di Taylor con resto di Lagrange segue che $h(x) = h(x_0) + h''(\xi)(x - x_0)^2$ e dunque $h(x) \ge h(x_0)$ $\forall x \in [0,1]$ cioè x_0 è punto di minimo per h. D'altronde, per il teorema di Weierstrass, h ammette massimo su $[0,1]$ e dunque tale massimo deve cadere agli estremi o coincidere col minimo: in entrambi i casi si ha che il massimo è zero e quindi $h(x) \le 0$ $\forall x \in [0,1]$ il che equivale alla tesi[1].

[1] In effetti $h'' \ge 0$ implica che h è convessa e quindi h deve assumere il massimo agli estremi.

Primo appello del secondo modulo di

ANALISI

–26.06.2006–

1. Calcolare, al variare del parametro positivo α, il valore

$$\sup_{t>0} \frac{(1+t)^\alpha - 1}{t}.$$

`Se` $\alpha \in (0,1]$ `la funzione` $g : t \mapsto (1+t)^\alpha$ `è concava (infatti` $g'' \le 0$`), pertanto ha rapporti incrementali decrescenti; dunque`

$$\sup_{t>0} \frac{(1+t)^\alpha - 1}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{(1+t)^\alpha - 1}{t} = g'(0) = \alpha.$$

`D'altra parte se` $\alpha \in (1,+\infty)$ `la funzione` $g : t \mapsto (1+t)^\alpha$ `è convessa (infatti` $g'' > 0$`), pertanto ha rapporti incrementali crescenti; dunque`

$$\sup_{t>0} \frac{(1+t)^\alpha - 1}{t} = \lim_{t\to +\infty} \frac{(1+t)^\alpha - 1}{t} = +\infty.$$

2. (a) Determinare i valori del parametro β per cui risulti finito l'integrale improprio

$$I_\beta := \int_0^\pi \frac{\sin^3 x}{(1+\cos x)^\beta} dx$$

(b) Per tali valori calcolare il valore dell'integrale.

Osserviamo che $\sin^3 x = (1+\cos x)(1-\cos x)\sin x$ pertanto

$$I_\beta = \int_0^\pi \frac{1-\cos x}{(1+\cos x)^{\beta-1}} \sin x dx$$

Mediante il cambio di variabile $t = -\cos x$ l'integrale si riduce a

$$I_\beta = \int_{-1}^1 \frac{1+t}{(1-t)^{\beta-1}} dt.$$

Scomponendo $\frac{1+t}{(1-t)^{\beta-1}} = \frac{2}{(1-t)^{\beta-1}} - \frac{1}{(1-t)^{\beta-2}}$ otteniamo

$$I_\beta = \int_{-1}^1 \frac{2}{(1-t)^{\beta-1}} dt - \int_{-1}^1 \frac{1}{(1-t)^{\beta-2}} dt = 2^{3-\beta}[(2-\beta)^{-1} - (3-\beta)^{-1}].$$

3. (a) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$y'' + y = \frac{\sin t}{t}.$$

(b) Trovare $\gamma \in \mathbb{R}$ tale che per ciascuna di esse si abbia

$$y(t) = \gamma \cos t \log t + O(1) \qquad \text{per } t \to +\infty$$

Le soluzioni dell'equazione omogenea sono del tipo $u(t) = a\cos t + b\sin t$ con $a, b \in \mathbb{R}$ e sono quindi tutte limitate. Applicando il metodo della variazione delle costanti otteniamo che le soluzioni dell'equazione non omogenea sono del tipo:

$$y(t) = -\cos t \int_1^t \frac{\sin^2 s}{s} ds + \sin t \int_1^t \frac{\sin s \cos s}{s} ds + a\cos t + b \sin t.$$

Osserviamo che $\sin^2 s = \frac{1-cos(2s)}{2}$; ricordiamo inoltre che, se ϕ è una funzione periodica a media nulla, $\int_1^t \frac{\phi(s)}{s} ds = O(1)$ per $t \to +\infty$. Da ciò si ottiene che $y(t) = -\cos t \int_1^t \frac{1}{2t} + O(1) = -\frac{1}{2}\cos t \log t + O(1)$ per $t \to +\infty$.

Terzo appello del

primo modulo

di ANALISI

–18.07.2006–

1. Si vogliono infilare su un filo delle perle distinguibili tra loro solo in base alla dimensione: si hanno a disposizione perle grandi di diametro di 2 centimetri e perle più piccole di diametro di 1 centimetro. Con quanti distinti allineamenti è possibile coprire un filo di 10 centimetri?

   Più in generale mostrare che, se denotiamo con $A(n)$ il numero dei distinti allineamenti di perle (di 1 o 2 centimetri di diametro) che coprono un filo lungo n centimetri, allora c'é una semplice relazione lineare che permette di ricavare $A(n)$ dai termini che lo precedono.

   Sia $0 \leq k \leq 5$ un intero fissato. Se decidiamo di infilare sul filo di 10 cm k perle grosse rimarrà solo lo spazio per $10-2k$ perle piccole e quindi sul filo verranno infilate $10-k$perle. Pertanto una configurazione sarà determinata specificando in quali dei $10-k$ posti si viene a trovare una perla grossa, il che equivale a selezionare un sottoinsieme di k elementi in un insieme di cardinalità $n-k$; questa operazione può essere fatta in $\binom{10-k}{k}$ modi diversi. Pertanto il numero totale di configurazioni possibili su un filo di 10 cm è

$$A(10) = \sum_{k=0}^{5} \binom{10-k}{k} = 89.$$

   Sia C_n l'insieme delle configurazioni su un filo lungo n cm, possiamo vedere C_n come unione disgiunta di due insiemi $C_n = C_n^o \cup C_n^O$ dove C_n^o denota il sottoinsieme delle configurazioni che terminano con una perla piccola mentre C_n^O denota quello delle configurazioni che terminano con una perla grande. Chiaramene C_n^o è in bigezione con C_{n-1} mentre C_n^O è in bigezione con C_{n-2}

(in entrambi i casi la bigezione si ottiene tagliando il tratto di filo su cui è infilata l'ultima perla) pertanto si ha

$$A(n) = |C_n| = |C_n^o| + |C_n^O| = A(n-1) + A(n-2).$$

Si avrà dunque $A(1) = 1$, $A(2) = 2$, $A(3) = 3$, $A(4) = 5$, $A(5) = 8$, ... abbiamo ritrovato i numeri di Fibonacci!

2. Sia $f(x) := e^{x-1}$ e sia x_n la successione definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

(a) Mostrare che x_n è monotona.

(b) Dire per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ la successione x_n risulta limitata.

Studiamo la funzione $g(x) := e^{x-1} - x$: da $g'(x) = e^{x-1} - 1$ deduciamo che g è decrescente sull'intervallo $]-\infty, 1]$ e crescente sull'intervallo $[1, +\infty[$ dunque $g(x) \geq g(1) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e di conseguenza $f(x) \geq x$ $\forall x \in \mathbb{R}$ e quest'ultima disuguaglianza implica la crescenza di x_n.

Se $a \leq 1$ x_n è limitata: infatti, visto che $f(]-\infty, 1]) \subset]-\infty, 1]$, è facile verificare per induzione che $x_n \in]-\infty, 1] \forall n \in \mathbb{N}$ e dunque $x_n \in [x_0, 1]$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Osserviamo inoltre che, per la monotonia, $\sup_{n \in \mathbb{N}} x_n = \lim_{n \to +\infty} x_n := \ell$. Se $\ell < +\infty$ dalla continuit'a di f segue che

$$f(\ell) = f(\lim_{n \to +\infty} x_n) = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{n \to +\infty} x_{n+1} = \ell$$

da segue $\ell = 1$. Da ciò deduciamo che se $x_0 = a > 1$ allora x_n **non** può essere superiormente limitata.

3. Sia $f(x) := (\cos x)^{1/x^2}$.

   (a) Mostrare che f è estendibile per continuità in 0.

   (b) Dire se 0 è punto di massimo o minimo locale per la funzione così estesa.

Studiamo dapprima la funzione $h(x) = \log f(x) = \frac{\log\cos x}{x^2}$: visto che

$$\log\cos x = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + O(x^6)$$

si ha immediatamente che $h(x) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{12}x^2 + O(x^4)$ è estendibile per continuità in $x = 0$ e l'origine è punto di massimo per la funzione così estesa. Visto che $f(x) = e^{h(x)}$ dalla crescenza della funzione esponenziale segue che le medesime considerazioni valgono anche per f.

Secondo appello del
secondo modulo
di ANALISI
–18.07.2006–

1. Mostrare che
$$\int_{1/x}^{x} \frac{\arctan s}{s} ds = \frac{\pi}{2} \log x.$$

   `Derivando l'espressione` $f(x) = \int_{1/x}^{x} \frac{\arctan s}{s} ds$ `otteniamo`

$$f'(x) = \frac{\arctan x}{x} - \frac{\arctan(1/x)}{(1/x)}(-\frac{1}{x^2}) = \frac{1}{x}[\arctan x + \arctan(1/x)].$$

   `Ricordando che` $\arctan x + \arctan(1/x) = \pi/2$ `ed osservando che` $f(1) = 0$ `deduciamo che` $f(x) = \frac{\pi}{2} \log x$.

2. (a) Mostrare che l'equazione
$$y'' - y = \frac{1}{e^t + e^{-t}} \qquad (*)$$
ammette al più una soluzione limitata.

   (b) Mostrare che l'equazione (*) del punto precedente ammette una soluzione $y(t)$ tale che $\lim_{|t|\to\infty} y(t) = 0$.

   `Le soluzioni dell'equazione omogenea` $v''-v = 0$ `sono del tipo` $v(t) = ae^t+be^{-t}$. `Se` y_1 `ed` y_2 `sono soluzioni limitate dell'equazione non omogenea (*) allora la loro differenza è una soluzione` *`limitata`* `dell'equazione omogenea e di conseguenza è nulla.`

In effetti, applicando il metodo della variazione delle costanti arbitrarie, otteniamo che la generica soluzione dell'equazione ha la forma

$$y(t) = (a + \int_0^t \frac{e^{-s}}{e^s + e^{-s}} ds)e^t + (b + \int_0^t \frac{e^s}{e^s + e^{-s}} ds)e^{-t}.$$

Visto che $\int_0^t \frac{e^{-s}}{e^s+e^{-s}} ds = -\frac{1}{2}\log(\frac{1+e^{-2t}}{2})$ e $\int_0^t \frac{e^s}{e^s+e^{-s}} ds = -\frac{1}{2}\log(\frac{1+e^{2t}}{2})$ affinchè la soluzione sia infinitesima serve che $a = -\frac{1}{2}\log 2$ e $b = \frac{1}{2}\log 2$; in effetti per questa scelta dei parametri $y(t) = -\frac{1}{2}\log(1+e^{-2t})e^t + \frac{1}{2}\log(1+e^{2t})e^{-t}$ ed è immediato verificare che entrambi gli addendi che compongono y sono infinitesimi per $|t| \to +\infty$.

3. Sia $g \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ una funzione 1-periodica.

   (a) Mostrare che per ogni $k \in \mathbb{Z} \setminus (0)$ si ha che
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \int_0^n g(t)e^{ikt} dt = 0.$$

   (b) Più in generale, mostrare che se $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ è 2π-periodica si ha che
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \int_0^n g(t)f(t)dt = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt\right)\left(\int_0^1 g(t)dt\right).$$

(a). Visto che g è 1-periodica conviene riscrivere l'integrale

$$\begin{aligned}
\int_0^n g(t)e^{ikt} dt &= \sum_{h=0}^{n-1} \int_h^{h+1} g(t)e^{ikt} dt \\
&= \sum_{h=0}^{n-1} \int_0^1 g(t+h)e^{ik(t+h)} dt \\
&= \sum_{h=0}^{n-1} \int_0^1 g(t)e^{ikt}e^{ikh} dt = \frac{1-e^{iknh}}{1-e^{ikh}} \int_0^1 g(t)e^{ikt} dt
\end{aligned}$$

È evidente che questa quantità è limitata, pertanto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \int_0^n g(t)e^{ikt} dt = 0.$$

(b). Supponiamo ora, per semplicità, che f sia a media nulla. Dato $\epsilon > 0$, è possibile trovare un polinomio trigonometrico (a media nulla) σ tale che $\|\sigma - f\|_\infty < \epsilon$; possiamo quindi scrivere

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\int_0^n g(t)f(t)dt\right| &\leq \left|\frac{1}{n}\int_0^n g(t)\sigma(t)dt\right| + \left|\frac{1}{n}\int_0^n g(t)|f(t)-\sigma(t)|dt\right| \\ &\leq \left|\frac{1}{n}\int_0^n g(t)\sigma(t)dt\right| + \epsilon\|g\|_\infty\end{aligned}$$

Dal punto (a) segue che $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^n g(t)\sigma(t)dt = 0$, pertanto si avrà che $\left|\frac{1}{n}\int_0^n g(t)f(t)dt\right| < \epsilon(1+\|g\|_\infty)$ definitivamente, e di conseguenza, visto che ϵ è arbitrario, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^n g(t)f(t)dt = 0$. Il caso in cui f non abbia media nulla si tratta semplicemente scrivendo $f(t) = \hat{f}_0 + (f(t) - \hat{f}_0)$: il primo pezzo è costante mentre il secondo ha media nulla e la tesi segue immediatamente.

Quinto appello del

primo modulo

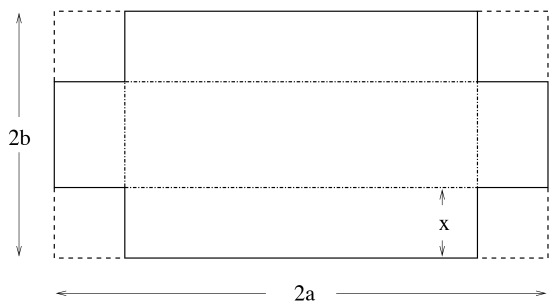
di ANALISI

–04.09.2006–

1. Discutere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la sommabilità della somma infinita
$$\sum_{\substack{n\geq 1\\ m\geq 1}} \frac{1}{(n+m)^\alpha}.$$

2. Si consideri la funzione
$$f(x) = \sqrt[3]{8x^2+4x+1}.$$
   (a) Determinare a, b, α, β tali che
   $$f(x) = ax^\alpha + bx^\beta + o(x^{-1/3}) \quad \text{per } x \to +\infty.$$
   (b) Determinare $A = f([0,+\infty[)$ e dimostrare che $f : [0,+\infty[\to A$ è invertibile.
   (c) Determinare d, δ tali che
   $$f^{-1}(y) = dy^\delta + o(y^{3/2}) \quad \text{per } y \to +\infty.$$

3. Dai quattro angoli di un foglio rettangolare di lati $2a$ e $2b$ si ritagliano quattro quadrati di lato x e si piegano i quattro rettangoli di bordo in modo da formare una scatola senza coperchio (vedi figura). Determinare x in modo che la scatola abbia capienza massima.



Terzo appello del

secondo modulo

di ANALISI

–04.09.2006–

1. Mostrare che se $\phi \in C^2([0, +\infty[)$ è tale che $\phi'' \geq 0$ per $x \geq 0$ e $\phi(0) \leq 0$ allora la funzione $\phi(x)/x$ è monotona.

2. Mostrare che tutte le soluzioni dell'equazione
$$u'(x) + u(x) \sin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 0$$
sono infinitesime per $x \to +\infty$.

3. Si consideri la funzione
$$f(x) = \sin(\lambda |x|), \quad -\pi \leq x \leq \pi,$$
prolungata ad una funzione 2π-periodica.
   (a) Sviluppare f in serie di Fourier.
   (b) Valutando tale sviluppo per $x = 0$ e facendo tendere λ a zero, dimostrare che
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{1}{12}\pi^2.$$