INTEGRALE DI RIEMANN

DEFINIZIONE 1. Sia $I=[a,b]$ un intervallo di $\mathbb{R}$ chiuso e limitato. Una sequenza finita di punti $a=t_0<t_1<\dots<t_n=b$ di $[a,b]$ si dice "suddivisione (alla Riemann) di $[a,b]$". (anche "partizione" è usato)

DEF 2. Se $\mathcal{P}=\{a=t_0<\dots<t_n=b\}$ è una suddivisione alla Riemann di $[a,b]$, si chiama "modulo di $\mathcal{P}$" il numero

$$|\mathcal{P}|:=\max_{0\le i<n}|t_{i+1}-t_i| .$$

DEF 3. Se $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sono due suddivisioni di $[a,b]$ e se $\mathcal{P}\subseteq\mathcal{Q}$, diciamo anche che "$\mathcal{Q}$ è più fine di $\mathcal{P}$". (Si noti che per $\mathcal{P},\mathcal{Q}\in\mathbb{F}(I)$, $\mathcal{P}\cup\mathcal{Q}\in\mathbb{F}(I)$ è più fine di entrambe.)

NOTAZIONE Indichiamo $\mathbb{F}(I)$ l'insieme delle suddivisioni alla Riemann dell'intervallo I.

Sia $f:I=[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione limitata e $\mathcal{P}=\{a=t_0<t_1\dots<t_n=b\}\in\mathbb{F}(I)$. Si definiscono rispettivamente somma inferiore e somma superiore alla Riemann della funzione f rispetto alla suddivisione $\mathcal{P}$ le quantità:

$$s(f,\mathcal{P}):=\sum_{i=0}^{n-1}\inf_{t_i\le t\le t_{i+1}}f(t)\cdot(t_{i+1}-t_i)$$

$$S(f,\mathcal{P}):=\sum_{i=0}^{n-1}\sup_{t_i\le t\le t_{i+1}}f(t)\,(t_{i+1}-t_i)$$

PROP 1. Si ha, per ogni $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata, $\mathcal{P} \in \mathbb{F}(I), \mathcal{Q} \in \mathbb{F}(I)$

i. $S(f,\mathcal{P}) = -s(-f,\mathcal{P})$; $s(f,\mathcal{P}) \leq S(f,\mathcal{P})$

ii. $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q} \Rightarrow \inf_{[a,b]} f \cdot (b-a) \leq s(f,\mathcal{P}) \leq s(f,\mathcal{Q})$;

$$S(f,\mathcal{Q}) \leq S(f,\mathcal{P}) \leq \sup_{[a,b]} f \cdot (b-a).$$

iii. $s(f,\mathcal{P}) \leq s(f,\mathcal{P}\cup\mathcal{Q}) \leq S(f,\mathcal{P}\cup\mathcal{Q}) \leq S(f,\mathcal{Q})$

DIM. (i): Scendono subito dalle proprietà $\sup A = -\inf(-A)$, e $\inf A \leq \sup A$, che valgono per ogni $A \subseteq \mathbb{R}$.

(ii) Basta considerare il caso in cui $\mathcal{P} \subsetneq \mathcal{Q} = \mathcal{P} \cup \{c\}$; si ha allora per qualche indice $0 \leq k < n$, $t_k < c < t_{k+1}$ e

$$s(f,\mathcal{Q}) - s(f,\mathcal{P}) = \inf_{[t_k,c]} f\,(c-t_k) + \inf_{[c,t_{k+1}]} (t_{k+1}-c) - \inf_{[t_k,t_{k+1}]} f \cdot (t_{k+1}-t_k)$$

$$\geq \inf_{[t_k,t_{k+1}]} f \cdot \left[(c-t_k) + (t_{k+1}-c) - (t_{k+1}-t_k) \right] \geq 0 .$$

Dalla (i) segue subito $S(f,\mathcal{Q}) \leq S(f,\mathcal{P})$. Le altre si ottengono considerando la suddivisione $\mathcal{P}_0 = \{a, b\}$.

iii. Date $\mathcal{P},\mathcal{Q} \in \mathbb{F}([a,b])$ si ha, per le (i) e (ii)

$$s(f,\mathcal{P}) \leq s(f,\mathcal{P}\cup\mathcal{Q}) \leq S(f,\mathcal{P}\cup\mathcal{Q}) \leq S(f,\mathcal{Q})$$

QED

DEF 4. Si chiamano, rispettivamente, integrale inferiore e integrale superiore alla Riemann di una funzione limitata f le quantità

$$\int_{*a}^{b} f(t)\,dt := \sup_{\mathcal{P}\in\mathbb{F}(I)} s(f,\mathcal{P})$$

$$\int_{a}^{*b} f(t)\,dt := \inf_{\mathcal{P}\in\mathbb{F}(I)} S(f,\mathcal{P})$$

NB: le notazioni $s(f,[a,b])$ e $S(f,[a,b])$ sono anche usate

PROP 2: Si ha, per ogni $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitata:

i. $\inf_{[a,b]} f(t)(b-a) \le \int_{*a}^{b} f(t)\,dt \le \int_{a}^{*b} f(t)\,dt \le \sup_{[a,b]} f(t)(b-a)$;

ii. $\int_a^{*b}(f(t)+g(t))\,dt \le \int_a^{*b} f(t)\,dt + \int_a^{*b} g(t)\,dt$;

iii. $\forall \lambda \ge 0$ $\int_a^{*b}(\lambda f(t))\,dt = \lambda \int_a^{*b} f(t)\,dt$ e $\int_a^{*b}(-f(t))\,dt = -\int_{*a}^{b} f(t)\,dt$.

DIM: Immediata, dalla PROP 1, QED

DEF. 5 Una funzione $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ si dice integrabile secondo Riemann se e solo se è limitata e
$$\int_{*a}^{b} f(t)\,dt = \int_a^{*b} f(t)\,dt$$
Il comune valore viene allora indicato $\int_a^b f(t)\,dt$.
Si indica $\mathcal{R}[a,b]$ l'insieme delle funzioni $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabili secondo Riemann (o $\mathcal{R}$-integrabili, in breve).

Dalla PROP 1 si ha immediatamente: una funzione $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitata è $\mathcal{R}$-integrabile se e solo se $\forall \varepsilon>0$ $\exists \mathcal{P}\in\mathbb{F}(I)$ tale che
$$S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) \le \varepsilon$$
o anche, indicando
$$\rho(f,\mathcal{P}) := S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}),$$
se e solo se $\inf_{\mathcal{P}\in\mathbb{F}(I)} \rho(f,\mathcal{P}) = 0$.

ESERC. 1 Sia $g = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}:[0,1]\to\mathbb{R}$, cioè $g(x)=1$ se $x\in\mathbb{Q}$, $g(x)=0$ se $x\notin\mathbb{Q}$.
Provare che per ogni $\mathcal{P}\in\mathbb{F}([0,1])$ $\rho(g,\mathcal{P})=1$ (e che quindi g NON è $\mathcal{R}$-int.)

Si ricordi che l'oscillazione di una funzione $f: A \to \mathbb{R}$ sull'insieme $S \subseteq A$ è la quantità

$$\operatorname{osc}(f, S) = \operatorname{diam}(f(S)) = \sup_{x, x' \in S}(f(x) - f(x')) = \sup_S f - \inf_S f$$

Indicando $I_i = [t_i, t_{i+1}]$ gli intervalli consecutivi individuati da $\mathcal{P}$, i quali hanno lunghezza

$$|I_i| = t_{i+1} - t_i \leq |\mathcal{P}|$$

si ha anche

$$\rho(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=0}^{n-1} \operatorname{osc}(f, I_i)|I_i|$$

PROP 3. Ogni $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ (i) continua e ogni $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ (ii) monotona, è integrabile secondo Riemann

DIM. (i) Per il teor. di Weierstrass f è limitata; per il teor. di Heine essa è uniformemente continua; sia ω un modulo di continuità per f. Si ha allora, per ogni intervallo $I_i = [t_i, t_{i+1}]$ determinato da $\mathcal{P}$

$$\operatorname{osc}(f, I_i) \leq \omega(|I_i|) \leq \omega(|\mathcal{P}|)$$

perciò

$$\rho(f, \mathcal{P}) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega(|\mathcal{P}|)|I_i| = \omega(|\mathcal{P}|)(b-a)$$

(ii) Sia per esempio f crescente su $[a,b]$. Allora f è limitata (per ogni $t \in [a,b]$ $f(a) \leq f(t) \leq f(b)$) inoltre, per ogni intervallo $I_i = [t_i, t_{i+1}]$

$$\operatorname{osc}(f, I_i) = (f(t_{i+1}) - f(t_i))(t_{i+1} - t_i) \leq (f(t_{i+1}) - f(t_i))|\mathcal{P}|$$

perciò
$$\rho(f, \mathcal{P}) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(t_{i+1}) - f(t_i)\right) \cdot |\mathcal{P}| = \left(f(b) - f(a)\right)|\mathcal{P}|.$$

In entrambi i casi $\inf_{\mathcal{P} \in \mathbb{P}([a,b])} \rho(f, \mathcal{P}) = 0$, e f è R-integrabile.

QED

PROP 4. $\mathcal{R}([a,b])$ è uno spazio vettoriale di funzioni e $f \mapsto \int_a^b f(t)\,dt$ è lineare.

DIM: Siano $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$ e $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in \mathbb{F}(I)$. Si ha:

$$s(f,\mathcal{P}) + s(g,\mathcal{Q}) \leq s(f, \mathcal{P}\cup\mathcal{Q}) + s(g, \mathcal{P}\cup\mathcal{Q}) \leq s(f+g, \mathcal{P}\cup\mathcal{Q}) \leq \int_{*a}^{b} (f+g)\,dt$$

prendendo l'estremo superiore su $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$

$$\int_{*a}^{b} f(t)\,dt + \int_{*a}^{b} g(t)\,dt \leq \int_{*a}^{b} (f+g)\,dt$$

Similmente

$$\int_{a}^{*b} f(t)\,dt + \int_{a}^{*b} g(t)\,dt \geq \int_{a}^{*b} (f+g)\,dt$$

Quindi se f e g sono R-integrabili anche $f+g$ lo è e

$$\int_a^b (f+g)\,dt = \int_a^b f\,dt + \int_a^b g(t)\,dt.$$

Se f è integrabile $-f$ lo è pure, perché per la PROP 1.i.

$$\int_{*a}^{b} (-f)\,dt = -\int_{a}^{*b} f\,dt \quad \text{e} \quad \int_{a}^{*b} (-f)\,dt = -\int_{*a}^{b} f\,dt$$

Infine $\forall \lambda \geq 0$, λf è integrabile e $\int_a^b (\lambda f)\,dt = \lambda \int_a^b f\,dt$, infatti

$$S(\lambda f, \mathcal{P}) = \lambda S(f, \mathcal{P}) \qquad s(\lambda f, \mathcal{P}) = \lambda s(f, \mathcal{P})$$

e prendendo l'estremo superiore e l'estremo inferiore rispettivamente

$$\int_a^{*b} (\lambda f)\,dt = \lambda \int_a^b f\,dt \; ; \quad \int_{*a}^b (\lambda f)\,dt = \lambda \int_a^b f\,dt \, ,$$

QED

PROP 5 Siano $a < b < c$ e $f : [a,c] \to \mathbb{R}$. Allora $f \in \mathcal{R}[a,c]$ se e solo se $f_{|[a,b]} \in \mathcal{R}[a,b]$ e $f_{|[b,c]} \in \mathcal{R}[b,c]$; nel qual caso

$$\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt$$

DIM. Si osservi che per ogni $\mathcal{P} \in \mathbb{F}([a,b])$ e $Q \in \mathbb{F}([b,c])$ si ha $\mathcal{P} \cup Q \in \mathbb{F}([a,c])$ e per ogni $f : [a,c] \to \mathbb{R}$

$$S(f, \mathcal{P} \cup Q) = S(f_{|[a,b]}, \mathcal{P}) + S(f_{|[b,c]}, Q)$$

Inoltre al variare di $\mathcal{P}$ e Q, $\mathcal{P} \cup Q$ descrive tutte le possibili suddivisioni alla Riemann di $[a,c]$ contenenti il punto b. Quindi

$$\int_a^{*c} f\,dt = \inf_{\substack{\mathcal{P} \in \mathbb{F}[a,b] \\ Q \in \mathbb{F}[b,c]}} S(f, \mathcal{P} \cup Q) = \inf_{\substack{\mathcal{P} \in \mathbb{F}[a,b] \\ Q \in \mathbb{F}[b,c]}} \left\{ S(f, \mathcal{P}) + S(f, Q) \right\}$$

$$= \inf_{\mathcal{P} \in \mathbb{F}[a,b]} S(f, \mathcal{P}) + \inf_{Q \in \mathbb{F}[a,c]} S(f, Q) = \int_a^{*b} f\,dt + \int_b^{*c} f\,dt \, .$$

Con analogo ragionamento, o considerando la funzione

$-f$ e usando la PROP 1, i, si ha anche

$$\underset{*}{\int_a^c} f\,dt = \underset{*}{\int_a^b} f\,dt + \underset{*}{\int_b^c} f\,dt$$

sottraendo

$$\left(\int_a^{*c} f\,dt - \int_{*a}^{c} f\,dt\right) = \left(\int_a^{*b} f\,dt - \int_{*a}^{b} f\,dt\right) + \left(\int_b^{*c} f\,dt - \int_{*b}^{c} f\,dt\right)$$

Poiché per la PROP 2 le tre quantità fra parentesi sono ≥ 0, si ha subito che quella di sinistra è nulla se e solo se le due di destra sono entrambe nulle, da cui segue subito la tesi, QED

DEF. Se $a<b$ e $f \in R[a,b]$ si pone per convenzione

$$\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$$

Si verifica subito come conseguenza della PROP 5 che l'identità

$$\int_a^c f\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f\,dt$$

vale per ogni $f \in R(I)$ e per ogni terna a, b, c in I, indipendentemente dall'ordine.

OSS: Come conseguenza delle PROP 3 e 5, ogni funzione monotona a tratti o continua a tratti è R-integrabile

PROP 6. Sia $f \in \mathcal{R}(I)$. Allora $f^+, f^-, |f| \in \mathcal{R}(I)$

DIM. Basta mostrare che $f^+ \in \mathcal{R}(I)$; si ha allora
$f^- = (-f)^+ \in \mathcal{R}(I)$ e $|f| = \frac{1}{2}(f^+ + f^-) \in \mathcal{R}(I)$.
La tesi segue subito osservando che $\forall S \subseteq I$
$\operatorname{osc}(f^+, S) \leq \operatorname{osc}(f, S)$, quindi per ogni $\mathcal{P} \in \mathbb{P}(I)$

$$\rho(f^+, \mathcal{P}) = \sum_{i=0}^{n-1} \operatorname{osc}(f^+, I_i)|I_i| \leq \rho(f, \mathcal{P})$$

QED

Vale un risultato più generale:

PROP 7. Sia $f \in \mathcal{R}([a,b])$, $J = [\inf f, \sup f]$, $\varphi \in C^0(J)$
Allora $\varphi \circ f \in \mathcal{R}([a,b])$

DIM. Intanto $\varphi \circ f$ è limitata perché lo è φ (per il teor. di Weierstrass). Sia ω un mod. di cont. per φ. (φ è unif. continua per il teor di Heine). Si noti che, $\forall S \subseteq [a,b]$

$$\operatorname{osc}(\varphi \circ f, S) = \sup_{t, t' \in S} \left(\varphi(f(t)) - \varphi(f(t'))\right) \leq \omega\left(\operatorname{osc}(f, S)\right)$$

Sia $\eta > 0$, che verrà fissato poi, e sia $\mathcal{P} \in \mathbb{P}([a,b])$
Allora

$$\rho(\varphi \circ f, \mathcal{P}) = \sum_{i=0}^{n-1} \operatorname{osc}(\varphi \circ f, I_i)|I_i| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega(\operatorname{osc}(f, I_i))|I_i|$$

$$\leq \sum_{\substack{i \\ \operatorname{osc}(f, I_i) < \eta}} \omega(\operatorname{osc}(f, I_i))|I_i| + \sum_{\substack{i \\ \operatorname{osc}(f, I_i) \geq \eta}} \omega\left(\operatorname{osc}(f, I_i)\right)|I_i|$$

Ora: per gli indici della prima somma, essendo ω crescente, si ha $\omega(osc(f, I_i)) \leq \omega(\eta)$ e quindi

$$\sum_{\substack{i \\ osc(f, I_i) < \eta}} \omega(osc(f, I_i)) \, |I_i| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega(\eta) \, |I_i| = \omega(\eta) \cdot (b-a)$$

Per gli indici della seconda somma, osservando che

$$\rho(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=0}^{n-1} osc(f, I_i) |I_i| \geq \sum_{\substack{i \\ osc(f, I_i) \geq \eta}} osc(f, I_i) |I_i|$$

$$\geq \eta \cdot \sum_{osc(f, I_i) \geq \eta} |I_i|$$

si ha

$$\sum_{\substack{i \\ osc(f, I_i) \geq \eta}} \omega(osc(f, I_i)) |I_i| \leq \omega(osc(f, [a,b])) \cdot \sum_{osc(f, I_i) \geq \eta} |I_i|$$

$$\leq \frac{\omega(|J|)}{\eta} \rho(f, \mathcal{P})$$

Dunque, qualunque sia $\eta > 0$, si ha

$$\rho(\varphi \circ f, \mathcal{P}) \leq \omega(\eta) \cdot (b-a) + \frac{\omega(|J|)}{\eta} \rho(f, \mathcal{P}) .$$

Perciò, dato $\varepsilon > 0$, vi è un $\eta > 0$ tale che $\omega(\eta) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$; poiché $f \in \mathcal{R}[a,b]$ vi è una $\mathcal{P} \in \mathbb{P}[a,b]$ tale che $\rho(f, \mathcal{P}) \leq \frac{\eta \varepsilon}{2\omega(|J|)}$ e per questa $\mathcal{P}$ si ha quindi

$$\rho(\varphi \circ f, \mathcal{P}) < \varepsilon$$

il che mostra che $\varphi \circ f \in \mathcal{R}[a,b]$

QED

OSS: Il risultato precedente, nel caso in cui φ sia k-Lipschitziana, ammette una dimostrazione alquanto più semplice. Infatti, $\forall\, S \subseteq [a,b]$ si ha

$$\operatorname{osc}(\varphi \circ f, S) \leq k \operatorname{osc}(f, S)$$

quindi

$$\rho(\varphi \circ f, \mathbb{P}) \leq k \rho(f, \mathbb{P})$$

e segue la tesi.
(Si noti che la PROP 6 è un caso particolare, con $\varphi(x) = x^+, x^-, |x|$)

PROP 8 Siano f e g R-integrabili su $[a,b]$. Allora anche $f(x) \cdot g(x)$ lo è.

DIM: Poiché

$$f(t)g(t) = \frac{1}{2}\left[(f(t)+g(t))^2 - f(t)^2 - g(t)^2\right]$$

la tesi segue subito dalla PROP 4 e dalla PROP 7 (o dall'osservazione successiva) applicata alla funzione $\varphi(x) = x^2$.
QED

Le funzioni integrabili secondo Riemann sono anche alquanto stabili per cambi di variabile; per esempio

PROP 9. Sia $f \in \mathcal{R}([a,b])$ e $g:[a,b] \to [a',b']$ un omeomorfismo crescente con g^{-1} Lipschitziano. Allora $f \circ g \in \mathcal{R}([a',b'])$.

DIM. Siccome g è bigettiva e crescente vi è una bigezione

$$\mathbb{F}([a,b]) \ni \mathcal{P} = \{t_i\} \longmapsto \mathcal{P}' = \{t'_i\} \in \mathbb{F}([a',b']), \quad \text{t.che } t'_i = g(t_i)$$

Indicando $I_i = [t_i, t_{i+1}]$ e $I'_i = [t'_i, t'_{i+1}] = g(I_i)$ per una data $\mathcal{P}$:

$$\rho(f \circ g, \mathcal{P}) = \sum_0^{n-1} \operatorname{osc}(f \circ g, I_i)\,|I_i| = \sum_0^{n-1} \operatorname{osc}(f, I'_i)\,|g^{-1}(I'_i)| \leq C \rho(f, \mathcal{P}')$$

da cui la tesi,
QED

Cambiare il valore di una funzione in un numero finito di punti del suo dominio non ha influenza sul suo essere integrabile, nè sul valore dell'integrale:

PROP 10. Sia $f \in \mathcal{R}[a,b]$ e $g:[a,b] \to \mathbb{R}$ tale che $F \doteq \{x \in [a,b] : f(x) \neq g(x)\}$ è finito. Allora $g \in \mathcal{R}[a,b]$ e

$$\int_a^b g(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$$

DIM: Se $c \in [a,b]$, la funzione $\chi_{\{c\}}$ (che vale 1 oppure 0 a seconda che $x = c$ o $x \neq c$) è integrabile secondo Riemann e ha $\int_a^b \chi_{\{c\}}(t)\,dt = 0$:
infatti per ogni $\mathcal{P} \in \mathbb{F}([a,b])$ si ha

$$0 = s(\chi_{\{c\}}, \mathcal{P}) \leq S(\chi_{\{c\}}, \mathcal{P}) \leq |\mathcal{P}|.$$

Per ipotesi $f = g + h$ con h una combinazione lineare di funzioni $\chi_{\{c\}}$, $c \in F$, e la tesi segue dalla PROP 4,

QED

ESERC. 2 Sia $f(x) = \frac{1}{q}$ per ogni razionale $x = \frac{p}{q} \in [0,1]$ con $(p,q)=1$ e $f(x) = 0$ per x irrazionale. Allora f è integrabile e $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ (si osservi che, $\forall \varepsilon > 0$, $f = f_\varepsilon + h$ con $0 \leq f_\varepsilon \leq \varepsilon$ e $\{h(x) \neq 0\}$ finito.

OSS: L'ipotesi di continuità della funzione φ nella PROP ~~7~~ non si può indebolire: se $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ è la funzione dell'ES 2 e $\varphi = \chi_{\mathbb{R}^+}$ si ha (ES 1)

$$f \in \mathcal{R}[0,1], \quad \varphi \circ f = \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}} \notin \mathcal{R}([0,1]).$$

DEF. Sia $f \in \mathcal{R}([a,b])$. La funzione (ben definita per la PROP 5)

$$F : [a,b] \ni x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt \in \mathbb{R},$$

si chiama FUNZIONE INTEGRALE di f.

PROP 11 (Teorema fondamentale del calcolo integrale)
Sia $f \in \mathcal{R}[a,b]$ e $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ la sua funzione integrale
Allora (i) F è lipschitziana con costante $\|f\|_\infty$;
(ii) se f è continua in $x_0 \in [a,b]$ allora F è derivabile in x_0 e $F'(x_0) = f(x_0)$

Siano $a \leq x < x' \leq b$. Allora

$$F(x') - F(x) = \int_a^{x'} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt = \int_x^{x'} f(t)\,dt,$$

quindi

$$\inf_{x \leq t \leq x'} f(t) \cdot (x'-x) \leq F(x') - F(x) \leq \sup_{x \leq t \leq x'} f(t)\,(x'-x)$$

Allora $|F(x) - F(x')| \leq \|f\|_\infty \cdot |x-x'|$.

(ii) Si ha, tenendo presente che $\int_{x_0}^{x} 1\,dt = x - x_0$:

$$F(x) - F(x_0) - f(x_0)(x-x_0) = \int_{x_0}^{x} \left(f(t) - f(x_0)\right) dt$$

Quindi

$$|F(x) - F(x_0) - f(x_0)(x-x_0)| = \left| \int_{x_0}^{x} \left(f(t) - f(x_0)\right) dt \right|$$

$$\leq |x-x_0| \sup_{\substack{x_0 \leq t \leq x \\ (x \leq t \leq x_0)}} |f(t) - f(x_0)| = o(|x-x_0|) \quad (x \to x_0)$$

QED

ESEMPIO. Sia $L(x) := \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$, $\forall x > 0$.
La funzione $L : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ è localmente lipschitziana e strettamente crescente.
Se $x > 0$ si può considerare la suddivisione $\mathcal{P}_n$ di $[1, x]$ data dai punti $\{\frac{k}{n} : n \leq k < nx\} \cup \{x\}$
Si ha

$$S(\tfrac{1}{t}, \mathcal{P}_n) = \sum_{n \leq k < nx}' \frac{1}{k} + O(\tfrac{1}{n^2})$$

e quindi, essendo $\rho(\frac{1}{t}, \mathcal{P}_n) = O(\frac{1}{n})$

$$L(x) = \sum_{n \leq k < nx} \frac{1}{k} + O(\tfrac{1}{n}) \qquad (n \to \infty)$$

Poiché, $\forall \lambda > 0$ e $0 < a < b$ vi è una bigezione $\mathbb{F}([a, b]) \ni \mathcal{P} \longleftrightarrow \lambda\mathcal{P} \in \mathbb{F}([\lambda a, \lambda b])$ e risulta

$$S(\tfrac{1}{t}, \mathcal{P}) = S(\tfrac{1}{t}, \lambda\mathcal{P})$$

si ottiene

$$\int_a^b \frac{1}{t}\,dt = \int_{\lambda a}^{\lambda b} \frac{1}{t}\,dt$$

(valida anche se $a \geq b$)
Quindi, $\forall x > 0\ \forall y > 0$

$$L(xy) = \int_1^{xy} \frac{1}{t}\,dt = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt + \int_x^{xy} \frac{1}{t}\,dt = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt + \int_1^y \frac{1}{t}\,dt = L(x) + L(y)$$

Poiché $L(2) = \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt \geq \frac{1}{2}$ si ha $L(2^n) \geq \frac{n}{2}$
quindi

$$\lim_{x \to \infty} L(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0} L(x) = -\lim_{x \to 0} L(\tfrac{1}{x}) = -\infty$$

Dunque L è un omeomorfismo $L : \mathbb{R}^+ \xrightarrow{\simeq} \mathbb{R}$.
Poiché $\forall x > 1$ e $n > -x$

$$\frac{x}{n} \cdot \frac{n}{n+x} = \frac{x}{n}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-1} \leq L(1 + \tfrac{x}{n}) = \int_1^{1+\frac{x}{n}} \frac{1}{t}\,dt \leq \frac{x}{n}$$

si ha $\quad x \cdot \frac{n}{n+x} \leq L\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right) \leq x$

e $L\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right) \to x$ per ogni $x \geq 0$ (similmente per $x < 0$)

Poiché L è un omeomorfismo, segue che, $\forall x \in \mathbb{R}$ $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ converge alla funzione $L^{-1}: \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^+$

Quindi $L(x) = \log(x)$.

OSS: Si osservi che il calcolo fatto fornisce anche una costruzione della funzione esponenziale e logaritmo, poiché contiene la convergenza di $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e il fatto che la funzione limite, L^{-1} verifica $L^{-1}(u+v) = L^{-1}(u)L^{-1}(v)$.
Naturalmente il teorema fondamentale del calcolo integrale permette di concludere immediatamente che $L(x) = \log(x)$, osservando che $L(1) = 0$, $L'(x) = \frac{1}{x}$ (se uno sa già che $\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$.)
Il calcolo dell'area di un settore di iperbole fu effettuato nel 1647 da Saint-Vincent e più rigorosamente da Huygens nel 1661. I logaritmi naturali erano stati introdotti da Briggs nel 1618.

ESERCIZIO. Sia $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Provare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $\mathcal{P} \in \mathcal{F}([a,b])$

$$|\mathcal{P}| < \delta \Rightarrow \rho(f, \mathcal{P}) < \varepsilon$$

(Ciò vale se f è continua oppure monotona, grazie alle stime della PROP 3, ma per una $f \in \mathcal{R}[a,b]$ qualunque?)

Gli esercizi che seguono sono preparatori alla successiva PROP 12 (Facoltativa!).

DEF. Un insieme $S \subseteq \mathbb{R}$ si dice TRASCURABILE se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una famiglia di intervalli aperti $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tale che $S \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k$ e $\sum_{k \in \mathbb{N}} |I_k| \leq \varepsilon$

ESERCIZIO [espandere]

1. Se $S' \subseteq S$ e S è trascurabile anche S' lo è ;
2. Se S_n è un insieme trascurabile, $\forall n \in \mathbb{N}$, anche $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ lo è
3. Se S è trascurabile e $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è lipschitziana anche $\varphi(S)$ è trascurabile
4. Se S è COMPATTO e trascurabile, esiste una famiglia finita di intervalli aperti $\{I_k\}_{k=1}^{m}$ tale che
$$S \subseteq \bigcup_{1 \leq k \leq m} I_k , \quad \sum_{1 \leq k \leq m} |I_k| \leq \varepsilon .$$
[Heine-Borel]

DEF. Sia $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x \in X$.
L'oscillazione (o salto) di f in x è il numero
$$\operatorname{osc}(f, x) := \inf \{ \operatorname{osc}(f, U) \ ; \ U \text{ intorno di } x \text{ in } X \}$$

ESERCIZ. Sia $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x \in X$. Allora

5. f è continua in $x \iff \operatorname{osc}(f, x) = 0$;
6. Per ogni $\lambda \in \bar{\mathbb{R}}$ l'insieme $\{x \in X : \operatorname{osc}(f, x) \geq \lambda\}$ è chiuso in X e
7. $\operatorname{osc}(f, x) < \lambda \iff \exists U$ int. di x in X tale che $\operatorname{osc}(f, U) < \lambda$.
(se $\operatorname{osc}(f, x_n) \geq \lambda$ e $x_n \to x$, $\forall U$ intorno di x $\operatorname{osc}(f, U) \geq \operatorname{osc}(f, x_n) \geq \lambda$)
8. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ con $\operatorname{osc}(f, x) \leq \lambda$ per ogni $x \in [a, b]$.
Allora
$$\int_a^{*b} f(t)\,dt - \int_{*a}^{b} f(t)\,dt \leq \lambda (b - a)$$

5. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monotona e $\lambda > 0$. Allora l'insieme $S_\lambda := \{x \in [a, b] : \operatorname{osc}(f, x) \geq \lambda\}$ è finito, e $\operatorname{disco}(f) = \bigcup_{\lambda > 0} S_\lambda$ è numerabile

PROP 12. Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Allora f è integrabile secondo Riemann se e solo se, f è limitata e l'insieme dei suoi punti di discontinuità, $\text{disco}(f)$, è trascurabile

DIM. Sia f integrabile secondo Riemann. Per ogni $\lambda>0$ consideriamo l'insieme

$$S_\lambda=\{x\in[a,b]:\ \text{osc}(f,x)\geq\lambda\}$$

e proviamo che è trascurabile. Sia $\varepsilon>0$ e $\mathcal{P}=\{t_k\}_{k=0}^{n}$ una suddivisione di $[a,b]$ tale che $\rho(f,\mathcal{P})\leq\varepsilon\lambda$

Sia $\Lambda=\{k:\ 0\leq k<n \text{ e } \text{osc}(f,I_k)\geq\lambda\}$

$$\varepsilon\lambda\geq\rho(f,\mathcal{P})\geq\sum_{k\in\Lambda}\text{osc}(f,I_k)\cdot|I_k|\geq\lambda\sum_{k\in\Lambda}|I_k|$$

Quindi $\sum_{k\in\Lambda}|I_k|\leq\varepsilon$ e siccome $S_\lambda\subseteq\mathcal{P}\cup\bigcup_{k\in\Lambda}I_k$

si ha, per l'arbitrarietà di $\varepsilon>0$, che S_λ è trascurabile. Allora anche $\text{disco}(f)=\bigcup_{n>0}S_{1/n}$ lo è.

Viceversa:

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitata con $\text{disco}(f)$ trascurabile; sia $\varepsilon>0$. $S_\varepsilon\subseteq\text{disco}(f)$ è pure trascurabile ed è compatto, quindi esiste una famiglia finita di intervalli aperti $\{I_k\}_{k=1}^{m}$ e disgiunti, t.che $S_\varepsilon\subseteq\bigcup_{k=1}^{m}I_k$ e $\sum_1^m|I_k|\leq\varepsilon$. L'insieme $[a,b]\setminus\bigcup_1^m I_k$ è unione di una famiglia finita di intervalli chiusi disgiunti $\{I'_k\}_1^{m'}$; poiché sono disgiunti da S_ε, per ciascuno di essi $\text{osc}(f|I'_k,x)<\varepsilon$; usando l'es. 8

$$\int_a^{*b}f\,dt-\int_{*a}^{b}f\,dt=\sum_{k=1}^{m}\left(\int_{I_k}^{*}f\,dt-\int_{*I_k}f\,dt\right)+\sum_{k=1}^{m'}\left(\int_{I'_k}^{*}f\,dt-\int_{*I'_k}f\,dt\right)\leq$$

$$\leq 2\|f\|_\infty\sum_1^m|I_k|+\varepsilon(b-a)\leq\left(2\|f\|_\infty+b-a\right)\varepsilon$$

Essendo $\varepsilon>0$ arbitrario, f è Riemann-integrabile: QED

OSS: Si osservi come da questa caratterizzazione seguano le PROP 3 – 10.

CURVE

DEF. sia $u : [a,b] \to X, d$ (X, d spazio metrico)
La lunghezza di u relativamente alla suddivisione $\mathbb{P} \in \mathbb{F}([a,b])$ è il numero

$$\ell(u, \mathbb{P}) = \sum_{i=0}^{n-1} d(u(t_{i+1}), u(t_i))$$

È facile vedere che se $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{Q}$ allora $\ell(u,\mathbb{P}) \leq \ell(u,\mathbb{Q})$
È perciò sensato dare la definizione:

DEF: Sia $: [a,b] \to X, d$.
La lunghezza di u relativamente all'intervallo $[a,b]$ è

$$\ell(u, [a,b]) = \sup_{\mathbb{P} \in \mathbb{F}([a,b])} \ell(u, \mathbb{P}) \leq \infty$$

PROP 13 Sia $u : [a,b] \to \mathbb{R}^m, \|\cdot\|$ una curva C^1
Allora

$$\ell(u, [a,b]) = \int_a^b \|\dot{u}(t)\| dt$$

DIM: Sia $\mathbb{P} \in \mathbb{F}([a,b])$ e sia $\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$ per $i = 0 \dots n-1$.
Dal teorema del valor medio per curve (v. sotto) applicato alla curva

$$[t_i, t_{i+1}] \ni t \mapsto u(t) - t\,\dot{u}(\xi_i) \in \mathbb{R}^m$$

segue la stima $\big|\, \|u(t_{i+1}) - u(t_i)\| - (t_{i+1} - t_i)\|\dot{u}(\xi_i)\| \,\big| \leq$

$$\| u(t_{i+1}) - u(t_i) - (t_{i+1} - t_i)\dot{u}(\xi_i) \| \leq (t_{i+1} - t_i) \sup_{t_i \leq t \leq t_{i+1}} \|\dot{u}(t) - \dot{u}(\xi_i)\|$$

$$\leq (t_{i+1} - t_i)\cdot \omega(t_{i+1} - t_i) \leq (t_{i+1} - t_i)\, \omega(|\mathbb{P}|)$$

dove ω è un m.d.c. per $\dot{u}$. Si ha, sommando

$$\left| \ell(u, \mathbb{P}) - \sum_0^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \|\dot{u}(\xi_i)\| \right| = \left| \sum_0^{n-1} \|u(t_{i+1}) - u(t_i)\| - (t_{i+1} - t_i)\|\dot{u}(\xi_i)\| \right| \leq$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)\, \omega(t_{i+1} - t_i) \leq (b-a)\, \omega(|\mathbb{P}|).$$ Ne segue ($\forall\, \xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$)

$$\ell(u, \mathbb{P}) - \omega(|\mathbb{P}|)(b-a) \leq \sum_0^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \|\dot{u}(\xi_i)\| \leq \ell(u, \mathbb{P}) + \omega(|\mathbb{P}|)(b-a)$$

e si ottiene $\ell(u, [a,b]) = \int_a^b \|\dot{u}(t)\| dt$ QED

CONSEGUENZE del Teorema fondamentale del calcolo integrale

1. Ogni $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua ammette una primitiva, cioè, vi è una funzione $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ tale che $u'(x)=f(x)\ \forall x\in[a,b]$.
Infatti una primitiva di f è la funzione integrale di f, $x\mapsto\int_a^x f(t)\,dt$.
In altre parole: l'equazione differenziale
$u'(x)=f(x)$ ha soluzione $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ per ogni data $f\in C([a,b])$.

2. Vogliamo calcolare $\int_a^x f(t)\,dt$ e conosciamo una primitiva u di f: allora
$$\int_a^x f(t)\,dt=\varphi(x)-\varphi(a)$$
Infatti la funzione $[a,b]\ni x\mapsto\int_a^x f(t)\,dt-\varphi(x)$ ha derivata nulla, quindi è una costante, e la costante vale $-\varphi(a)$, come si vede ponendo $x=a$.

NOTAZIONE: Data $f: I\to\mathbb{R}$ indichiamo
$$\Big[f(x)\Big]_{x=a}^{x=b}=\Big[f\Big]_a^b\doteq f(b)-f(a)$$

ESEMPIO: $$\int_0^{\pi}\sin(x)\,dx=\Big[-\cos(x)\Big]_{x=0}^{x=\pi}=-\cos(\pi)+\cos(0)=2$$

La regola di derivazione di un prodotto e di derivazione di una composizione, tenendo conto del T.F.C.I, si traducono rispettivamente nelle seguenti

FORMULA DI INTEGRAZIONE PER PARTI: siano $u, v:[a,b]\to\mathbb{R}$ con derivate u' v', continue su $[a,b]$.
Allora
$$\int_a^b u'v\,dt=-\int_a^b uv'\,dt+\Big[u(x)v(x)\Big]_{x=a}^{x=b}$$

FORMULA DI INTEGRAZIONE PER CAMBIO DI VARIABILE

Sia $u: I \to \mathbb{R}$ continua e $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile con g' continua e $g([a,b]) \subseteq I$. Allora

$$\int_{g(a)}^{g(b)} u(s)\,ds = \int_a^b u(g(t))\,g'(t)\,dt$$

DIM: Nel primo caso si osserva che, per il TFCI,

$$\int_a^b u v'\,dt + \int_a^b u' v\,dt = \int_a^b (u v' + u' v)\,dt = \int_a^b (u v)'\,dt = \Big[u v\Big]_a^b$$

nel secondo caso si osserva che, per il TFCI,

$$x \mapsto \int_{g(a)}^{g(x)} u(s)\,ds \quad e \quad x \mapsto \int_a^x u(g(t))\,g'(t)\,dt$$

sono entrambe derivabili con derivata in x $u(g(x))\,g'(x)$, e si annullano per $x = a$.

QED

PROP (TEOR. DEL VALOR MEDIO PER CURVE) Sia $u: [a,b] \to \mathbb{R}^m$ una curva continua e derivabile in $]a,b[$. Allora vale la disuguaglianza $\|u(b) - u(a)\| \leq (b-a) \cdot \sup_{a<\xi<b} \|u'(\xi)\|$

DIM. Sia $M > \sup_{a<\xi<b} \|u'(\xi)\|$. Consideriamo la funzione continua $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}$ tale che $\forall t \in [a,b]$ $\varphi(t) = \|u(t) - u(a)\| - Mt$. Tenendo conto che M è arbitrario basta provare che $\varphi(b) \leq \varphi(a)$. FATTO: se $a \leq t_0 < b$, t_0 NON è un punto di minimo di φ. Infatti in tal caso, $\forall\, t_0 < t \leq b$ si ha

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \|u(t) - u(a)\| - \|u(t_0) - u(a)\| - M(t - t_0) \leq$$
$$\|u(t) - u(t_0)\| - M(t - t_0) = \|u'(t_0)(t - t_0) + o(t - t_0)\| - M(t - t_0)$$
$$\leq (\|u'(t_0)\| - M + o(1))(t - t_0)$$

per $t \to t_0$. Quindi $\varphi(t) < \varphi(t_0)$ se $t > t_0$ e $|t - t_0|$ è sufficientemente piccolo. Poiché per il Teor. di Weierstrass la funzione φ HA un minimo, questo è il punto b: allora $\varphi(b) \leq \varphi(a)$. QED

ESEMPIO INTERESSANTE. Sia $n \in \mathbb{N}$; calcoliamo

$$I(n) = \int_0^\pi \sin^n(x)\,dx.$$

Per $n=0$ $I(0) = \int_0^\pi 1\,dx = \pi$; per $n=1$

$\int_0^\pi \sin(x)\,dx = 2$ come visto dinanzi. Per $n=2$

si può osservare che $\sin^2(x)$ è π-periodica, quindi

$$\int_0^\pi \sin^2(x-c)\,dx = \int_0^\pi \sin^2(x)\,dx$$

per ogni $c \in \mathbb{R}$ (dimostrarlo in generale per f π-periodica: esercizio)

In particolare, essendo $\sin^2(x-\frac{\pi}{2}) = \cos^2(x)$

$$\int_0^\pi \sin^2(x)\,dx = \int_0^\pi \cos^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\sin^2(x) + \cos^2(x)\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi 1\,dx = \frac{\pi}{2}$$

In generale, se $n \geq 2$, integrando per parti:

$$I(n) = \int_0^\pi \sin^n(x)\,dx = \int_0^\pi \sin^{n-1}(x)\cdot\sin(x)\,dx = \int \sin^{n-1}(x)\cdot(-\cos(x))'\,dx =$$

$$= -\int_0^\pi \left(\sin^{n-1}(x)\right)'(-\cos x)\,dx + \left[\sin^{n-1}(x)(-\cos(x))\right]_{x=0}^{x=\pi} =$$

$$= \int_0^\pi (n-1)\sin^{n-2}(x)\cos^2(x)\,dx = (n-1)\int_0^\pi \sin^{n-2}(x)\left(1-\sin^2(x)\right)dx$$

$$= (n-1)\left(\int_0^\pi \sin^{n-2}(x)\,dx - \int_0^\pi \sin^n(x)\,dx\right) = (n-1)\,I(n-2) - (n-1)\,I(n)$$

Da cui $nI(n) = (n-1)\,I(n-2)$

Poichè $I(n) = \frac{n-1}{n} I(n-2)$; $I(0) = \pi$ $I(1) = 2$
si trova

$$I(n) = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} I(0) = \frac{(n-1)!!}{n!!} \pi & (n \text{ pari}) \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} I(1) = \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot 2 & (n \text{ dispari}) \end{cases}$$

In particolare $I(n)$ è un razionale se n è dispari, un multiplo razionale di π se n è pari.
Poichè $\forall\, x \in [0, \pi]$ $0 \leq \sin(x) \leq 1$, si ha
$$0 \leq \sin^{n+1}(x) \leq \sin^n(x) \leq 1$$
e integrando su $[0, \pi]$
$$0 \leq I(n+1) \leq I(n).$$
Quindi, $I(2K+1) \leq I(2K) \leq I(2K-1)$ cioè

$$\frac{(2K)!!}{(2K+1)!!} 2 \leq \frac{(2K-1)!!}{(2K)!!} \pi \leq \frac{(2K-2)!!}{(2K-1)!!} 2$$

e

$$p_K \doteq \frac{[(2K)!!]^2}{(2K+1)!!(2K-1)!!} \leq \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2K-2)!!(2K)!!}{[(2K-1)!!]^2} = \frac{2K+1}{2K} \cdot p_K$$

Quindi si ha $0 \leq \frac{\pi}{2} - p_K \leq \frac{2K+1}{2K} p_K - p_K = \frac{p_K}{2K} \leq \frac{\pi}{2K}$

Perciò $p_K \to \frac{\pi}{2}$, cioè

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{K \to \infty} \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2K}{2K-1} \cdot \frac{2K}{2K+1}$$ (prodotto di WALLIS)

$$= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2}{4k^2-1} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{4k^2-1}\right)$$

Si ha anche

$$p_k = \frac{[(2k)!!]^2}{(2k-1)!!\,(2k+1)!!} = \frac{[(2k)!!]^4}{(2k-1)!!\,(2k)!!\ (2k+1)!!\,(2k)!!} = \frac{[2^k \cdot k!]^4}{(2k+1)[(2k)!]^2}$$

dove si è usata l'identità $(2k)!! = 2^k n!$ e l'identità $(2k)! = (2k)!!\,(2k-1)!!$. Quindi

$$\frac{2^{4k}}{(2k+1)} \cdot \left[\frac{k!\,k!}{(2k)!}\right]^2 = \frac{2^{4k}}{2k+1} \cdot \frac{1}{\binom{2k}{k}^2} = \frac{\pi}{2}(1+o(1)) \quad \text{per } k\to\infty$$

da cui la stima asintotica per $\binom{2k}{k}$

$$\binom{2k}{k} = \frac{4^k}{\sqrt{k\pi}}(1+o(1)) = \pi^{-\frac{1}{2}} n^{-\frac{1}{2}} 2^{2k}(1+o(1))$$

$(k\to\infty)$

FORMULA DI STIRLING PER $n!$

ESEMPIO 1. Dalla serie di e^x si ha $e^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} \geq \frac{n^n}{n!}$ e quindi $n! \geq n^n e^{-n}$.

ESEMPIO 2. Poiché $\log(x)$ è una funzione crescente la somma inferiore di $\log(x)$ sull'intervallo $[1, n]$ rispetto alla suddivisione $P = \{1, 2 \dots n\}$ è

$$s(\log(x), \{1, 2 \dots n\}) = \sum_{k=1}^{n-1} \log(k) = \log(n-1)!$$

quindi

$$\log(n-1)! \leq \int_1^n \log(x)\,dx = n\log n - n + 1$$

e

$$(n-1)! \leq n^n e^{-n+1} \quad ; \quad n! = n\cdot(n-1)! \leq n^{n+1} e^{-n+1}$$

Poiché

$$n^n \cdot e^{-n} \leq n! \leq e \cdot n^{n+1} e^{-n}$$

è ragionevole aspettarsi una espressione asintotica della forma $n! \sim c\, n^{n+\alpha} \cdot e^{-n}$ con $\alpha \in [0,1]$.

Sia $\rho_n := \dfrac{n^{n+\alpha} \cdot e^{-n}}{n!}$. Allora

$$\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} = \frac{(n+1)^{n+1+\alpha}}{n^{n+\alpha}} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \frac{e^{-n-1}}{e^{-n}} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}$$

$$= \exp\left\{ (n+\alpha)\log\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1 \right\}$$

Dallo sviluppo di Taylor di $\log(1+x)$ in 0 di ordine 3 con la formula del resto di Peano

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Perciò, per $x = \frac{1}{n}$, $\log\left(\dfrac{\rho_{n+1}}{\rho_n}\right) =$

$$= (n+\alpha)\log\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1 = (n+\alpha)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o(n^{-3})\right) - 1 =$$

$$= \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{3} - \frac{\alpha}{2}\right)\frac{1}{n^2} + o(n^{-2}).$$

Con la scelta $\alpha = \frac{1}{2}$ si ha quindi $\log \dfrac{\rho_{n+1}}{\rho_n} = \dfrac{1}{12n^2}(1+o(1))$
quindi, per n grande,

$$0 < \log\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} \leq \frac{1}{n^2} \quad e \quad 1 \leq \frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} \leq \exp\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Quindi ρ_n risulta definitivamente crescente e limitata perché

$$\rho_n = \rho_1 \cdot \prod_{1}^{n-1} \frac{\rho_{k+1}}{\rho_k} \leq M \cdot \exp\left(\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right) < +\infty$$

Dunque: esiste una costante $c > 0$ tale che

$$n! = c\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} (1 + o(1))$$

Determiniamo la costante c.

Da $n! = c\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} (1+o(1))$ si ottiene

$$\binom{2n}{n} = \frac{c\,(2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n}}{c^2\, n^{2n+1}\, e^{-2n}} (1+o(1)) = \frac{\sqrt{2}}{c} \frac{4^n}{\sqrt{n}} (1+o(1))$$

che, confrontata con lo sviluppo $\binom{2n}{n} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} (1+o(1))$ dà il valore

$$c = \sqrt{2\pi}$$

Conclusione:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\cdot n^n e^{-n} (1+o(1)) \qquad \text{(FORMULA DI STIRLING)}$$

ESERCIZIO: provare che la successione ρ_n è in realtà crescente da $n=1$ in poi, per cui

$$\sqrt{2\pi}\cdot n^{n+\frac{1}{2}}\cdot e^{-n} \leq n! \leq e\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \qquad (n \geq 1)$$

$[\sqrt{2\pi} = 2{,}5.. \quad e = 2{,}7..]$

(Usare la disuguaglianza

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} \leq \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4}$$

e dedurne $\frac{1}{4n^2} \leq \log \frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} \leq \frac{1}{26 n^2} \quad \forall n \geq 1$)

ESERCIZIO. (Volume n-dimensionale della palla euclidea di $\mathbb{R}^n$)

I numeri

$$\omega_n := Vol_n(B^n(0,1)) \qquad \text{con } B^n(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$$

verificano la relazione

$$\omega_n = \int_{-1}^{+1} \omega_{n-1} (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt \qquad \omega_0 = 1$$

Col cambio di variabile $t = -\cos(x)$ si trova $\omega_n = I(n)\,\omega_{n-1}$; $\omega_n = \begin{cases} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{(\frac{n}{2})!} & n \text{ pari} \\ \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n!!} & n \text{ dispari} \end{cases}$

RESTO IN FORMA INTEGRALE nello sviluppo di Taylor,

Sia $f \in C^{n+1}(I)$ e $x, x_0 \in I$ (intervallo di $\mathbb{R}$).

Allora (ricordando che $T_n(x;t) := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(t)(x-t)^k$ ha derivata in t $\partial_t T_n(x,t) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)\cdot(x-t)^n$ e che $f(x) = T_n(x,x)$)

$$f(x) - T_n(x,x_0) = T_n(x,x) - T_n(x,x_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt \quad , \text{QED}$$

ESERC. Dedurre la formula: $f(x) - T_n(x,x_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{(n-1)!}\left(f^{(n)}(t) - f^{(n)}(x_0)\right)(x-t)^{n-1} dt$, $\forall f \in C^n$

DEF (INTEGRALE IMPROPRIO) Sia $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ con $b \leq +\infty$ e $f_{|[a,c]} \in \mathcal{R}[a,c]$ $\forall c < b$. Se esiste il limite

$$\lim_{c \to b} \int_a^c f(x)\,dx$$

esso si indica $\int_a^b f(x)\,dx$ e si dice integrale impropriò di f su $[a,b)$.
Analogamente ne$_a$ caso $f : (a,b] \to \mathbb{R}$, ∞

ESEMPI/ESERCIZI: Verificare che $\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = 1$; $\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2$;

TEST INTEGRALE per le serie:
Sia $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, decrescente, $f \geq 0$. Si ha, rispetto alla suddivisione $\mathcal{P}_n = \{0,1,\dots n\}$ di $[0,n]$

$$s(f,\mathcal{P}_n) = \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_0^n f(x)\,dx \leq S(f,\mathcal{P}_n) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$$

Ne segue

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \leq \int_0^{\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{k=0}^{\infty} f(k)$$

in particolare $\sum_0^{\infty} f(k) < \infty$ se e solo se $\int_0^{\infty} f(x)\,dx < \infty$

(da ampliare)

CARATTERIZZAZIONE DELLE FUNZIONI $C^n(I)$ $I =]a,b[$

Una funzione $f: I \to \mathbb{R}$ è di classe C^n se e solo se ha in ogni punto $x \in I$ uno sviluppo polinomiale di ordine n "dipendente con continuità" da x: cioè, sse, $\forall x \in I$ $\forall x+h \in I$

(*) $f(x+h) = P(x,h) + h^n r(x,h)$

con:

$$P(x,h) = \sum_{j=0}^{n} a_j(x) \frac{h^j}{j!} \;;\; a_j \in C^0(I) \quad j = 0 \dots n$$

$$r \in C^0(U) \quad U \supseteq I \times \{0\} \;;\; r(x,0) = 0 \;\forall x \in I$$

Quindi, con un MDC $|r(x,h)| \leq \omega(h)$

Inoltre le a_j sono determinate e $a_j = f^{(j)}$ $j = 0 \dots n$

DIM. Sia $f \in C^n(I)$. Allora (formula di Taylor & resto di Lagr.)

$$f(x+h) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} \cdot h^j + \left(f^{(n)}(\xi) - f^{(n)}(x)\right) \frac{h^n}{n!}$$ con $\exists \xi = \xi(x,h)$ fra x e $x+h$

Quindi f ha la forma (*) con $a_j = \frac{f^{(j)}}{j!} \in C^0(I)$ e

$$r(x,h) = \frac{f(x+h) - P(x,h)}{h^n} = \frac{f^{(n)}(\xi) - f^{(n)}(x)}{n!}$$

continuità: se $x_k \to x$ e $h_k \to h$ allora $r(x_k, h_k) \to r(x,h)$: ovvio se $h \neq 0$; ma anche se $h = 0$ perché $\xi(x_k, h_k) \to x$.

VICEVERSA sia $f: I \to \mathbb{R}$ con la forma (*). Siano $x, y \in I$. Siano F_j primitive di a_j $(j = 0 \dots n)$. Sia $\varphi(h) := F_0(y+h) - F_0(x+h)$

Da (*) abbiamo, integrando $f(t+h)$ in t fra x e y:

$$\varphi(h) = \int_x^y f(t+h)\,dt = \sum_{j=0}^{n} (F_j(y) - F_j(x)) \frac{h^j}{j!} + h^n \cdot \int_x^y r(t,h)\,dt$$

questo è uno S.P. di ord. n per φ:

infatti qui $\int_x^y r(t,h)\,dt = o(1)$ per $h \to 0$ ($|r(t,h)| \leq \omega_x(h)$ per U.C.)

Inoltre, integrando $f(y+s) - f(x+s)$ per s fra 0 e h, usando lo sviluppo (*) di ordine $n-1$ [oss: l'ipotesi (*) implica l'esistenza di uno sviluppo analogo per $n-1$] si ha:

$$\int_0^h \{f(y+s) - f(x+s)\}\,ds = \varphi(h) - \varphi(0) = \sum_{j=0}^{n-1} f^{(j)}(x) \frac{h^{j+1}}{(j+1)!} + \int_0^h s^{n-1} r_1(x,s)\,ds$$

Di nuovo $\left|\int_0^h s^{n-1} r_1(x,s)\,ds\right| \leq h^n \omega_1(h)$ e per l'unicità dello sviluppo si conclude $F_1(y) - F_1(x) = f_{1-1}(y) - f_{1-1}(x)$ cioè $\exists f_1'(x) = f(x)$ $\forall x$.