Analisi Matematica I - Secondo Compitino
19 Dicembre 2005 - Fila 1

Esercizio 1. Data l'applicazione

$$f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1+z}{1-z},$$

determinare $f(i\mathbb{R})$ e $f(\mathbb{U} \setminus \{1\})$, dove $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ è il cerchio unitario.

Soluzione. Osserviamo che per ogni $t \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$1 + it = \sqrt{1+t^2}\, e^{i \arctan t}$$

pertanto

$$f(it) = \frac{e^{i \arctan t}}{e^{i \arctan(-t)}} = e^{2\,i \arctan t}.$$

Ne segue che $f(i\mathbb{R}) = e^{i]-\pi,\pi[} = \mathbb{U} \setminus \{-1\}$.

Ora osserviamo che

$$\mathbb{U} \setminus \{1\} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in]0, 2\pi[\}$$

e consideriamo

$$f(e^{i\theta}) = \frac{(1+e^{i\theta})(1-e^{-i\theta})}{|1-e^{i\theta}|^2} = \frac{2\,i\,\sin\theta}{(1-\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\, i\,.$$

Osserviamo che la funzione $\theta \mapsto \sin\theta(1-\cos\theta)^{-1}$ è continua su $]0, 2\pi[$ e ricordando che $\sin\theta = \theta + o(\theta)$ e $\cos\theta = 1 - \theta^2/2 + o(\theta^2)$, per $\theta \to 0$, si hanno i limiti

$$\lim_{\theta\to0^+} \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = +\infty, \qquad \lim_{\theta\to2\pi^-} \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \lim_{\theta\to0^-} \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = -\infty\,.$$

Pertanto l'immagine di tale funzione corrisponde all'insieme $\mathbb{R}$, ovvero $f(\mathbb{U} \setminus \{1\}) = i\mathbb{R}$.

Esercizio 2. (a) Dimostrare che la derivata n-esima della funzione

$$f(x) = e^{x^3-x}$$

è della forma

$$f^{(n)}(x) = p_n(x)\, e^{x^3-x},$$

con p_n polinomio.

(b) Determinare al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ il limite

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x-x^3+\lambda\log x} f^{(n)}(x).$$

Soluzione. (a) Dimostriamo per induzione che

$$f^{(n)}(x) = p_n(x)\, e^{x^3-x},$$

con p_n polinomio. Per $n = 0$ è sufficiente porre $p_0 = 1$. Se la formula è vera per n, si ha

$$f^{(n+1)}(x) = (p_n'(x) + (3x^2-1)p_n(x))\, e^{x^3-x}.$$

Quindi basta porre

$$p_{n+1}(x) = p_n'(x) + (3x^2-1)p_n(x), \tag{1}$$

che è un polinomio (la derivata di un polinomio è un polinomio, e l'insieme dei polinomi forma un anello).

(b) Risulta

$$e^{x-x^3+\lambda\log x} f^{(n)}(x) = x^\lambda p_n(x).$$

Dalla formula (1) si deduce che il polinomio p_{n+1} ha il grado di p_n più due. Insieme al fatto che $p_0 = 1$, si trova che p_n ha grado $2n$. Sempre da (1), il coefficiente del termine di grado $2(n+1)$ in p_{n+1} è pari a 3 volte il coefficiente del termine di grado $2n$ in p_n. Insieme al fatto che $p_0 = 1$, si trova che il coefficiente del termine di grado $2n$ in p_n è 3^n. Concludiamo quindi che

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x-x^3+\lambda\log x} f^{(n)}(x) = \lim_{x\to+\infty} x^\lambda p_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda < -2n, \\ +\infty & \text{se } \lambda > -2n, \\ 3^n & \text{se } \lambda = -2n. \end{cases}$$

Esercizio 3. (a) Dato un intero positivo n, dimostrare che la funzione

$$f_n : \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \tan x - 2nx - 3\sin x,$$

ha un unico punto di minimo x_n.

(b) Dimostrare che $x_n \to \pi/2$ per $n \to +\infty$.

(c) Determinare costanti a e b tali che valga lo sviluppo

$$x_n = \frac{\pi}{2} + a\, n^{-1/2} + b\, n^{-3/2} + o(n^{-3/2}) \quad \text{per } n \to +\infty.$$

SOLUZIONE. (a) La funzione f_n è derivabile, e la sua derivata vale

$$f_n'(x) = 1 + \tan^2 x - 2n - 3\cos x.$$

La funzione f_n' vale $-2n-2$ in 0, ed il suo limite per $x \to \pi/2$ (da sinistra) vale $+\infty$. Essendo una funzione continua, per il teorema degli zeri la funzione f_n' possiede almeno uno zero in $]0, \pi/2[$. Inoltre f_n' è strettamente crescente su $[0, \pi/2]$, poichè somma di funzioni crescenti di cui almento una (ad esempio $\tan^2$) strettamente crescente. Deduciamo che esiste un unico $x_n \in]0, \pi/2[$ tale che f_n' è negativa su $[0, x_n[$, nulla in x_n, e positiva su $]x_n, \pi/2[$. Quindi f_n è strettamente decrescente su $[0, x_n]$ e strettamente crescente su $[x_n, \pi/2[$. In particolare, x_n è l'unico punto di minimo di f_n.

(b) Da $f'(x_n) = 0$ e dal fatto che il coseno è limitato deduciamo che

$$\tan^2 x_n = 2n - 1 + 3\cos x_n = 2n + O(1), \quad \text{per } n \to +\infty,$$

da cui, tendendo conto del fatto che la tangente è bigettiva da $[0, \pi/2[$ su $[0, +\infty[$, otteniamo

$$x_n = \arctan \sqrt{2n + O(1)}.$$

Questo implica che la successione (x_n) tande a $\pi/2$.

(c) Tenendo conto del fatto che $x_n \to \pi/2$ e che $\cos\pi/2 = 0$ possiamo migliorare lo sviluppo di x_n come segue

$$x_n = \arctan\sqrt{2n-1+3\cos x_n} = \arctan\sqrt{2n-1+o(1)}.$$

Ricordando lo sviluppo a $+\infty$ dell'arcotangente:

$$\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\frac{1}{x^{2k+1}}, \quad \text{per } x \to +\infty,$$

si ottiene

$$x_n = \frac{\pi}{2} - (2n-1+o(1))^{-1/2} + \frac{1}{3}(2n+O(1))^{-3/2} + o(n^{-3/2}). \tag{2}$$

Dallo sviluppo $(1+x)^{-1/2} = 1 - x/2 + o(x)$ per $x \to 0$, si trova

$$\begin{aligned}(2n-1+o(1))^{-1/2} &= 2^{-1/2}n^{-1/2}\left(1-\frac{1}{2n}+o(1/n)\right)^{-1/2} \\ = 2^{-1/2}n^{-1/2}\left(1+\frac{1}{4n}+o(1/n)\right) &= 2^{-1/2}n^{-1/2} + 2^{-5/2}n^{-3/2} + o(n^{-3/2}),\end{aligned} \tag{3}$$

Usando semplicemente il fatto che $(1+x)^{-3/2} = 1 + o(1)$ per $x \to 0$, si trova

$$(2n+O(1))^{-3/2} = 2^{-3/2}n^{-3/2}(1+O(1/n))^{-3/2} = 2^{-3/2}n^{-3/2} + o(n^{-3/2}). \tag{4}$$

Da (2), (3), (4) concludiamo che

$$x_n = \frac{\pi}{2} - 2^{-1/2}n^{-1/2} + (3^{-1} - 2^{-5/2})n^{-3/2} + o(n^{-3/2}).$$

Analisi Matematica I - Secondo Compitino

19 Dicembre 2005 - Fila 2

Esercizio 1. Data l'applicazione

$$f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1-z}{1+z},$$

determinare $f(i\mathbb{R})$ e $f(\mathbb{U} \setminus \{-1\})$, dove $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ è il cerchio unitario.

Soluzione. Osserviamo che per ogni $t \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$1 + it = \sqrt{1+t^2}\, e^{i \arctan t}$$

pertanto

$$f(it) = \frac{e^{i \arctan(-t)}}{e^{i \arctan t}} = e^{-2\,i \arctan t}.$$

Ne segue che $f(i\mathbb{R}) = e^{i]-\pi,\pi[} = \mathbb{U} \setminus \{-1\}$.

Ora osserviamo che

$$\mathbb{U} \setminus \{-1\} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in]-\pi, \pi[\}$$

e consideriamo

$$f(e^{i\theta}) = \frac{(1-e^{i\theta})(1+e^{-i\theta})}{|1+e^{i\theta}|^2} = \frac{-2\,i\,\sin\theta}{(1+\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2} = -\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\, i\,.$$

Ricordando che $\sin\theta = \theta + o(\theta)$ e $\cos\theta = 1 - \theta^2/2 + o(\theta^2)$, per $\theta \to 0$, si hanno i limiti

$$\lim_{\theta\to-\pi^+} -\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \lim_{\theta\to0^+} \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = +\infty,$$
$$\lim_{\theta\to\pi^-} -\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \lim_{\theta\to0^-} \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = -\infty\,.$$

La funzione $\theta \mapsto -\sin\theta(1+\cos\theta)^{-1}$ è continua su $]-\pi,\pi[$, pertanto l'immagine di tale funzione corrisponde all'insieme $\mathbb{R}$, ovvero $f(\mathbb{U}\setminus\{-1\}) = i\mathbb{R}$.

Esercizio 2. (a) Dimostrare che la derivata n-esima della funzione

$$f(x) = e^{x^4-1}$$

è della forma

$$f^{(n)}(x) = p_n(x)\, e^{x^4-1},$$

con p_n polinomio.

(b) Determinare al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ il limite

$$\lim_{x\to+\infty} e^{1-x^4+\lambda\log x} f^{(n)}(x).$$

SOLUZIONE. (a) Dimostriamo per induzione che

$$f^{(n)}(x) = p_n(x)\, e^{x^4-1},$$

con p_n polinomio. Per $n=0$ è sufficiente porre $p_0 = 1$. Se la formula è vera per n, si ha

$$f^{(n+1)}(x) = (p_n'(x) + 4x^3 p_n(x))\, e^{x^4-1}.$$

Quindi basta porre

$$p_{n+1}(x) = p_n'(x) + 4x^3 p_n(x), \tag{5}$$

che è un polinomio (la derivata di un polinomio è un polinomio, e l'insieme dei polinomi forma un anello).

(b) Risulta

$$e^{1-x^4+\lambda\log x} f^{(n)}(x) = x^\lambda p_n(x).$$

Dalla formula (5) si deduce che il polinomio p_{n+1} ha il grado di p_n più tre. Insieme al fatto che $p_0 = 1$, si trova che p_n ha grado $3n$. Sempre da (5), il coefficiente del termine di grado $3(n+1)$

in p_{n+1} è pari a 4 volte il coefficiente del termine di grado $3n$ in p_n. Insieme al fatto che $p_0 = 1$, si trova che il coefficiente del termine di grado $3n$ in p_n è 4^n. Concludiamo quindi che

$$\lim_{x\to+\infty} e^{1-x^4+\lambda\log x} f^{(n)}(x) = \lim_{x\to+\infty} x^\lambda p_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda < -3n, \\ +\infty & \text{se } \lambda > -3n, \\ 4^n & \text{se } \lambda = -3n. \end{cases}$$

Esercizio 3. (a) Dato un intero positivo n, dimostrare che la funzione

$$f_n : \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \tan x - 3nx - 2\sin x,$$

ha un unico punto di minimo x_n.

(b) Dimostrare che $x_n \to \pi/2$ per $n \to +\infty$.

(c) Determinare costanti a e b tali che valga lo sviluppo

$$x_n = \frac{\pi}{2} + a\, n^{-1/2} + b\, n^{-3/2} + o(n^{-3/2}) \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Soluzione. (a) La funzione f_n è derivabile, e la sua derivata vale

$$f_n'(x) = 1 + \tan^2 x - 3n - 2\cos x.$$

La funzione f_n' vale $-3n - 1$ in 0, ed il suo limite per $x \to \pi/2$ (da sinistra) vale $+\infty$. Essendo una funzione continua, per il teorema degli zeri la funzione f_n' possiede almeno uno zero in $]0, \pi/2[$. Inoltre f_n' è strettamente crescente su $[0, \pi/2]$, poichè somma di funzioni crescenti di cui almento una (ad esempio $\tan^2$) strettamente crescente. Deduciamo che esiste un unico $x_n \in]0, \pi/2[$ tale che f_n' è negativa su $[0, x_n[$, nulla in x_n, e positiva su $]x_n, \pi/2[$. Quindi f_n è strettamente decrescente su $[0, x_n]$ e strettamente crescente su $[x_n, \pi/2[$. In particolare, x_n è l'unico punto di minimo di f_n.

(b) Da $f'(x_n) = 0$ e dal fatto che il coseno è limitato deduciamo che

$$\tan^2 x_n = 3n - 1 + 2\cos x_n = 3n + O(1), \quad \text{per } n \to +\infty,$$

da cui, tendendo conto del fatto che la tangente è bigettiva da $[0, \pi/2[$ su $[0, +\infty[$, otteniamo

$$x_n = \arctan \sqrt{3n + O(1)}.$$

Questo implica che la successione (x_n) tande a $\pi/2$.

(c) Tenendo conto del fatto che $x_n \to \pi/2$ e che $\cos \pi/2 = 0$ possiamo migliorare lo sviluppo di x_n come segue

$$x_n = \arctan \sqrt{3n - 1 + 2\cos x_n} = \arctan \sqrt{3n - 1 + o(1)}.$$

Ricordando lo sviluppo a $+\infty$ dell'arcotangente:

$$\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \frac{1}{x^{2k+1}}, \quad \text{per } x \to +\infty,$$

si ottiene

$$x_n = \frac{\pi}{2} - (3n - 1 + o(1))^{-1/2} + \frac{1}{3}(3n + O(1))^{-3/2} + o(n^{-3/2}). \tag{6}$$

Dallo sviluppo $(1 + x)^{-1/2} = 1 - x/2 + o(x)$ per $x \to 0$, si trova

$$(3n - 1 + o(1))^{-1/2} = 3^{-1/2} n^{-1/2} \left(1 - \frac{1}{3n} + o(1/n)\right)^{-1/2}$$
$$= 3^{-1/2} n^{-1/2} \left(1 + \frac{1}{6n} + o(1/n)\right) = 3^{-1/2} n^{-1/2} + 2^{-1/2} 3^{-3/2} n^{-3/2} + o(n^{-3/2}), \tag{7}$$

Usando semplicemente il fatto che $(1 + x)^{-3/2} = 1 + o(1)$ per $x \to 0$, si trova

$$(3n + O(1))^{-3/2} = 3^{-3/2} n^{-3/2} (1 + O(1/n))^{-3/2} = 3^{-3/2} n^{-3/2} + o(n^{-3/2}). \tag{8}$$

Da (6), (7), (8) concludiamo che

$$x_n = \frac{\pi}{2} - 3^{-1/2} n^{-1/2} + (3^{-5/2} - 2^{-1/2} 3^{-3/2}) n^{-3/2} + o(n^{-3/2}).$$