Soluzione Compito Analisi I - 31 gennaio 2006

Esercizio 1.

1. In quanti modi possiamo distribuire 120 caramelle tutte uguali tra 60 bambini in modo che ciascun bambino ne abbia 1 oppure 4?

2. In quanti modi possiamo distribuire 60 figurine tutte diverse tra 60 bambini in modo che ciascun bambino ne abbia 0 oppure 3?

Soluzione. (a) Detto n rispettivamente m il numero di bambini con 1 rispettivamente 4 caramelle, si deve avere $n + m = 60$ e $n + 4m = 120$, da cui $n = 40$ e $m = 20$. Quindi 20 bambini fortunati avranno 4 caramelle, mentre gli altri 40 ne avranno solamente una. I modi con cui si può effettuare la distribuzione sono quindi tanti quanti sono i sottoinsiemi di 20 elementi (i fortunati) di un insieme di 60 elementi (tutti i bambini), cioè $\binom{60}{20}$.

(b) Come prima, 20 bambini riceveranno 3 figurine, mentre i rimanenti 40 non ne riceveranno alcuna. Ci sono $\binom{60}{20}$ possibili sottoinsiemi di 20 fortunati, e per ciascun sottoinsieme dobbiamo calcolare il numero di modi di distribuire le 60 figurine ai bambini del sottoinsieme. Si tratta cioè di calcolare il numero delle *partizioni ordinate* di un insieme I_{60} di 60 elementi composte da 20 sottoinsiemi di 3 elementi. A ciascuno dei 60! ordinamenti di I_{60} possiamo associare una partizione ordinata raggruppando i primi tre elementi, poi i secondi tre, e cosí via. Otteniamo cosí tutte le possibili partizioni ordinate, ma ciascuna di esse viene contata più volte, poiché possiamo permutare i primi tre elementi tra loro, i secondi tre, e cosí via. Si hanno cioè $(3!)^{20} = 6^{20}$ ripetizioni, quindi il numero delle partizioni ordinate in questione è $60!/6^{20}$. Concludiamo che il numero dei modi richiesto è

$$\binom{60}{20}\frac{60!}{6^{20}}.$$

Esercizio 2. Determinare l'insieme dei numeri complessi z tali che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\frac{(i+z)^n}{z^n}$$

risulti convergente. Per tali z calcolare la somma della serie.

Soluzione. Ponendo $w = (i + z)/z$, la serie risulta una serie di potenze in w,

$$\sum_{n=0}^{\infty} nw^n.$$

Dato che $\sqrt[n]{n} \to 1$, questa serie ha raggio di convergenza 1. Inoltre non converge in alcun punto del bordo del disco di convergenza: se $|w| = 1$ la successione nw^n non è limitata. Quindi la serie data converge per tutti e soli gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $|(i + z)/z| < 1$. Equivalentemente, $|i + z|^2 < |z|^2$, ossia

$$(\operatorname{Re} z)^2 + (1 + \operatorname{Im} z)^2 < (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2,$$

cioè $\mathrm{Im}\, z < -1/2$. Quindi la serie data converge se e solamente se z appartiene al semipiano aperto

$$\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}\, z < -1/2\}.$$

Derivando per serie, si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} n w^n = w \sum_{n=0}^{\infty} n w^{n-1} = wD \left(\sum_{n=0}^{\infty} w^n \right) = wD \frac{1}{1-w} = \frac{w}{(1-w)^2},$$

per $|w| < 1$. Quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \frac{(i+z)^n}{z^n} = \frac{i+z}{z} \left(1 - \frac{i+z}{z}\right)^{-2} = \frac{i+z}{z} \frac{z^2}{(-i)^2} = -z(i+z).$$

Esercizio 3. Dato l'intero $n \geq 2$, si consideri l'equazione

$$n \sin x = (n-1)x. \tag{1}$$

1. Dimostrare che (1) ha un'unica soluzione positiva x_n.
2. Dimostrare che la successione (x_n) è decrescente ed infinitesima.
3. Determinare il numero reale α tale che

$$x_n = \frac{\alpha}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{per } n \to \infty.$$

Soluzione. (a) Consideriamo la funzione $f(x) = (\sin x)/x$, prolungata per continuità ponendo $f(0) = 1$. Si tratta di dimostrare che esiste un unico $x_n > 0$ tale che $f(x_n) = 1 - 1/n$. Per $x \geq \pi$ si ha

$$f(x) \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\pi} < \frac{1}{3} < 1 - \frac{1}{n},$$

poichè $n \geq 2$. La funzione f è continua, vale 1 in 0 e 0 in π, quindi il teorema degli zeri ci garantisce che esiste $x_n \in]0, \pi[$ tale che $f(x_n) = 1 - 1/n$. La derivata di f è

$$f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\sin x}{x} \left(\mathrm{cotan}\, x - \frac{1}{x} \right).$$

Se $x \in]0, \pi[$, $(\sin x)/x$ è positivo e $\mathrm{cotan}\, x - 1/x$ è negativo (segue dal fatto che $\tan x > x$ in $]0, \pi/2[$). Quindi $f' < 0$ in $]0, \pi[$, da cui f è strettamente decrescente in $[0, \pi]$, ed il punto dove f vale $1 - 1/n$ è unico.

(b) Per quanto visto sopra la funzione f è strettamente decrescente in $[0, \pi]$, e l'immagine di tale intervallo è $[0, 1]$. Detta g l'inversa di f in tale intervallo, g è ancora strettamente decrescente. La successione $1 - 1/n$ cresce strettamente ed ha limite 1, da cui $x_n = g(1 - 1/n)$ decresce strettamente ed ha limite $g(1) = 0$.

(c) Usando lo sviluppo $\sin x = x - x^3/6 + o(x^3)$ per $x \to 0$, l'identità $f(x_n) = 1 - 1/n$ implica

$$1 - \frac{x_n^2}{6} + o(x_n^2) = 1 - \frac{1}{n},$$

per $n \to \infty$. Quindi

$$(1 + o(1))x_n^2 = \frac{6}{n},$$

da cui

$$x_n = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{n}}(1 + o(1))^{-1/2} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{n}}(1 + o(1)) = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

per $n \to \infty$. Concludiamo che $\alpha = \sqrt{6}$.