Analisi Matematica III - Primo Compitino

7 Novembre 2006

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x,y) = \begin{cases} x^3 \log\left(1 + \frac{|y|^\alpha}{x^4}\right) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Determinare per quali $\alpha > 0$ la funzione f è

a) continua in $\mathbb{R}^2$;

b) differenziabile in $\mathbb{R}^2$;

c) di classe C^1 in $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 2. Sia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione

$$g(x,y) = \arctan(x^2 + y^2).$$

a) Dimostrare che g è Lipschitziana, ossia che esiste $k > 0$ tale che

$$|g(x,y) - g(x',y')| \leq k\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}, \quad \forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2.$$

b) Determinare la più piccola costante k tale che valga la disuguaglianza sopra.

Esercizio 3. Sia ω la 1-forma differenziale definita come

$$\omega = \frac{1}{y^2 + \cos^2 x}\left(y \sin x \, dx + \cos x \, dy\right),$$

sul dominio $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + \cos^2 x \neq 0\}$.

a) Mostrare che ω è chiusa.

b) Stabilire se ω è esatta su A.

c) Determinare una primitiva di ω sul semipiano $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$.