Analisi Matematica III - Secondo Compitino
21 Dicembre 2006

Esercizio 1. Si consideri la funzione

$$f(x,y,z) = \frac{xy}{x^2+y^2+z^2+xy}.$$

a) Mostrare che f è ben definita su $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ e che è 0-omogenea (ossia che è costante su ogni semiretta $\{t\mathbf{u} \,|\, t > 0\}$, dove $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$).

b) Dimostrare che f possiede massimo e minimo su $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ e determinarli.

Esercizio 2. Sia B_1 la palla aperta di raggio 1 e centro 0 in $\mathbb{R}^2$.

a) Determinare i numeri $\alpha > 0$ per i quali converge l'integrale improprio

$$\iint_{B_1} \frac{1}{x^2 + |y|^\alpha}\, dxdy.$$

b) Determinare le coppie di numeri $\alpha > 0$, $\beta > 0$ per i quali converge l'integrale improprio

$$\iint_{B_1} \frac{1}{(x^2 + |y|^\alpha)^\beta}\, dxdy.$$

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = \log(x^2+y^2).$$

Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{\partial\Omega} \nabla f \cdot \nu \, ds,$$

dove $\partial\Omega$ è la frontiera dell'aperto

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^4 + y^4 < 1\},$$

e ν indica il versore normale esterno.