Analisi Matematica III - Primo Appello
8 Gennaio 2007

Esercizio 1. Si consideri l'insieme

$$Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2y - xe^y = 2\}.$$

a) Mostrare che in un intorno di $(0, 1)$ l'insieme Z è il grafico di una funzione $y = y(x)$.

b) Determinare numeri a, b, c tali che

$$y(x) = a + bx + cx^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \to 0.$$

Esercizio 2. Si consideri l'integrale improprio

$$\int_A \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^2y^2 + y^4}{1 - x^2 - y^2}}\, dxdy,$$

ove $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1,\ 0 < y < x/2\}$.

a) Mostrare che tale integrale è convergente.

b) Calcolarne il valore.

Esercizio 3. Data $f \in C^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$ positiva ed infinitesima per $x \to +\infty$, definiamo

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x > 0,\ \sqrt{y^2 + z^2} < f(x)\}.$$

a) Mostrare che se la frontiera di Ω ha area finita, allora Ω ha volume finito.

b) Mostrare con un esempio che il viceversa non è vero.

Analisi Matematica II - Quarto Appello

8 Gennaio 2007

Esercizio 1. Determinare al variare del numero reale α il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^5} \int_0^{x^3} \log(1+t^\alpha)\, dt.$$

Esercizio 2. Stabilire se il seguente integrale improprio è convergente, ed in caso affermativo calcolarne il valore

$$\int_0^\pi \frac{e^{-(\tan(x/2))^2}}{1+\cos x}\, dx.$$

Esercizio 3. Si consideri l'equazione differenziale

$$y'''(t) + y''(t) = t.$$

a) Determinare tutte le soluzioni.

b) Determinare, se esistono, tutte le soluzioni y tali che $y(t) = O(|t|^3)$ per $|t| \to +\infty$.

c) Determinare, se esistono, tutte le soluzioni y tali che $y(t) = O(t^2)$ per $|t| \to +\infty$.