Analisi Matematica III - Terzo Appello

19 Giugno 2007

Esercizio 1. Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} x - y \arctan\left(\frac{x}{y}\right) & \text{se } y \neq 0 \\ x & \text{se } y = 0 \end{cases} .$$

a) Studiare la continuità di f in $\mathbb{R}^2$.

b) Studiare la differenziabilità di f in $\mathbb{R}^2$.

c) Calcolare $\max_D f$ e $\min_D f$, ove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Esercizio 2. Siano S e Z i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} S &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}, \\ Z &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x - 1/2)^2 + y^2 < 1/4\}. \end{aligned}$$

a) Determinare i punti singolari della curva Γ ottenuta intersecando S con la frontiera di Z, e nei rimanenti punti di Γ determinare la retta tangente a Γ.

b) Calcolare l'area di $S \cap Z$.

Esercizio 3. Si consideri la forma differenziale

$$\omega = [a(\sin x)(\cos y) + (\cos x)(\sin y)]\, dx + [2(\cos x)(\sin y) + b(\sin x)(\cos y))]\, dy,$$

dove a e b sono numeri reali.

a) Determinare le coppie (a,b) per le quali ω è esatta.

b) Per ciascuna di tali coppie determinare l'insieme di tutte le primitive di ω.